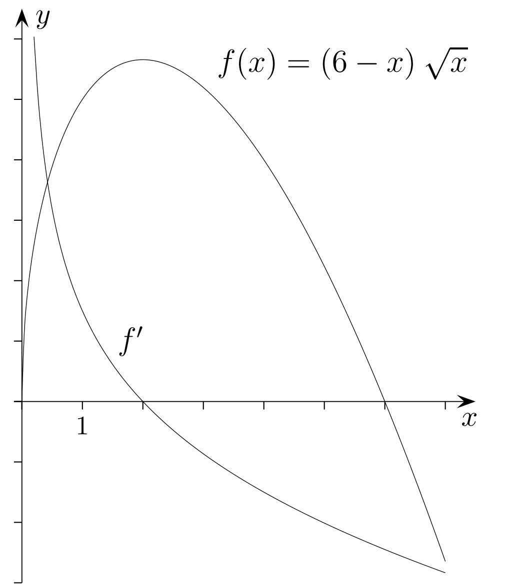
Vorzeichenwechsel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (6-x)\sqrt{x}$
Um das Extremum zu bestimmen, ermitteln wir die

1. Ableitung: $\quad f'(x) = \dfrac{6-3x}{2\sqrt{x}}$



An der Stelle $x_0 = 2$ wird $f'(x_0) = 0$.

Der Nachweis des Extremums kann auch ohne die 2. Ableitung erbracht werden. Wir erinnern uns:
Wäre $f''(x_0) < 0$, so wäre f' in einer Umgebung von x_0 fallend, der Graph von f beschriebe also eine Rechtskurve, an der Stelle x_0 läge daher ein Maximum vor. Entscheidend für das Maximum ist, neben $f'(x_0) = 0$, dass f' in einer Umgebung von x_0 fällt. Dies kann auch dadurch begründet werden, dass in einer Umgebung von x_0 für kleinere Werte von x_0 $\;f'(x) > 0$ und für größere Werte $f'(x) < 0$ nachgewiesen wird, dass also ein Vorzeichenwechsel von f' an der Stelle x_0 vorliegt:

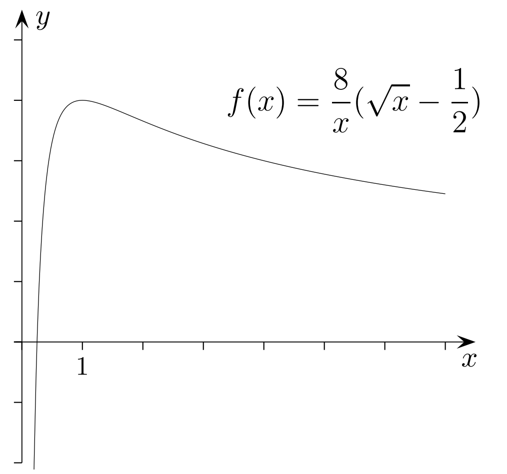
$$f'(x_0 - h) > 0$$

$$f'(x_0 + h) < 0$$

Dies ist für die obige Funktion offensichtlich, da $6-3x_0 = 0$ ist. Wird für x_0 ein kleinerer Wert eingesetzt, so wird die linke Seite positiv, wird ein größerer Wert eingesetzt, so wird die linke Seite negativ.

Wäre umgekehrt $f'(x_0-h) < 0$ und $f'(x_0+h) > 0$, so läge ein Minimum vor.

Gegeben sei nun die Funktion $f(x) = \dfrac{8}{x}(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2})$



Zum Nachweis eines Wendepunktes bilden wir die

2. Ableitung: $\quad f''(x) = \dfrac{6\sqrt{x}-8}{x^3}$

Für $x_w = \dfrac{16}{9}$ ist $f''(x_w) = 0$. Statt $f'''(x_w) \neq 0$ nachzuweisen, ist es zweckmäßiger zu zeigen, dass für f'' an der Stelle x_w ein Vorzeichenwechsel vorliegt:

$$f''(x_w - h) < 0$$

$$f''(x_w + h) > 0$$

Dies ist jedoch offensichtlich, da $6\sqrt{x_w} - 8 = 0$ ist.