Wurzelfunktionen Typisches

Ein negativer Radikand (Term unter der Wurzel) ist nicht zugelassen,
da sonst mit den Rechenregeln für Potenzen Seltsames entstehen kann:

$$-2 \;=\; \sqrt[3]{-8} \;=\; (-8)^{\frac{1}{3}} \;=\; (-8)^{\frac{2}{6}} \;=\; \sqrt[6]{(-8)^2} \;=\; \sqrt[6]{64} \;=\; 2$$

1. $f(x) = \frac{1}{2}\,x\,\sqrt{10-x}$

   <u>maximaler Definitionsbereich</u>

   $\mathbb{D} = \{\,x \,|\, x \leq 10\}$ oder $\mathbb{D} = \,]-\infty;\,10]$

   <u>Nullstellen</u>

   $x_1 = 0, \quad x_2 = 10$

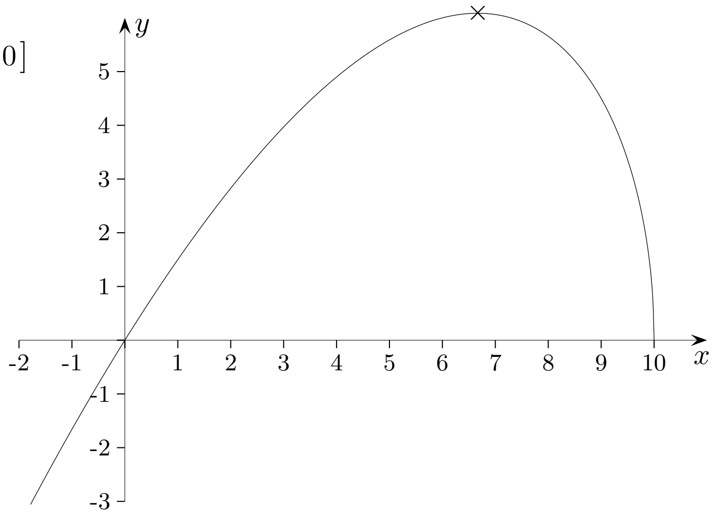
   <u>1. Ableitung</u> durch implizites Differenzieren

   $y^2 = \frac{1}{4}x^2\,(10-x) \qquad |\;(\;)'$

   $2y\,y' = \ldots$

   $\Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{20-3x}{4\sqrt{10-x}}$

   $Max(\,\frac{20}{3}\;|\;6{,}09\,)$

   <u>Rotationsvolumen</u>

   $$V = \int_a^b Q(x)\;dx \;=\; \pi\int_a^b (f(x))^2\;dx \;=\; \frac{625}{3}\,\pi$$

2. Der Graph schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.
   Berechne das zugehörige Rotationsvolumen.

   a) $f(x) = (3-x)\,\sqrt{x}$

   b) $f(x) = (x^2-9)\,\sqrt{x}$

3. Die Graphen der Funktionen $f(x) = 3\,\sqrt{x}$ und $g(x) = \sqrt{36-3x}$
   begrenzen mit der x-Achse ein Flächenstück.

   a) Wie groß ist das Volumen des Körpers, der durch Rotation dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht?

   b) Welches Rechteck mit maximalem Inhalt kann diesem Flächenstück einbeschrieben werden?

4. Berechne die Nullstellen und das Extremum der Funktion $f(x) = 3 - x + 2\,\sqrt{x}$.

5. Welche Eigenschaft haben ganzrationale Funktionen im Gegensatz zur Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$?

2. a) $\frac{27}{4}\pi$

   b) $\frac{243}{2}\pi$

3. a) 162π

   b) $a = 8,\ b = 3$

4. $x_1 = 1,\ (x_2 = 9)$
   $Max(\,1\,|\,4\,)$

a) Weise nach: Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\,x\,\sqrt{10-x}$
schließt mit der x-Achse an der Stelle $x = 0$ einen Winkel von 57,7° ein.

b) $\int \sqrt{x}\ dx = \ldots = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

c) $\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \ldots = 2 - 2\sqrt{a}$ für $0 < a < 1$

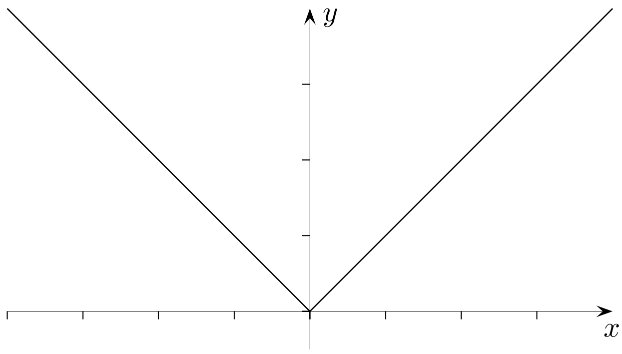
d) $\int \sqrt{2-3x}\ dx = \ldots = -\frac{2}{9}\sqrt{(2-3x)^3} + C$

beachte: $\int f'(ax+b)\ dx = \frac{1}{a}\,f(ax+b) + C$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \ldots = \arcsin\frac{x}{2} + C$

Differenzierbarkeit

$$f(x) = \sqrt{x^2} = |\,x\,| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

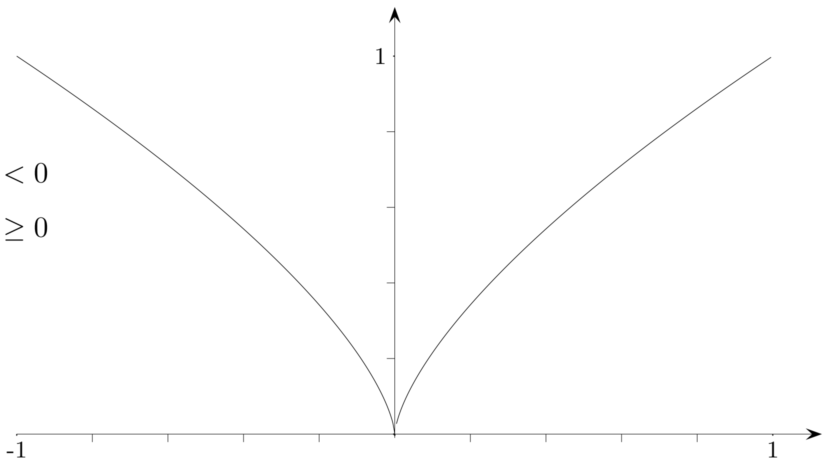


An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion zwar stetig,
jedoch nicht differenzierbar, da links- und rechtsseitige Ableitung nicht übereinstimmen:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = |\,x\,|^{\frac{2}{3}} = \begin{cases} (-x)^{\frac{2}{3}} & x < 0 \\ x^{\frac{2}{3}} & x \geq 0 \end{cases}$$



An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion stetig,
jedoch nicht differenzierbar, da die Ableitung an dieser Stelle nicht existiert:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \infty$$

Sei eine zusammengesetzte Funktion f gegeben und $f_1(a) = f_2(a)$.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < a \\ f_2(x) & x \geq a \end{cases}$$

f ist an der Stelle a differenzierbar, falls $f_1'(a) = f_2'(a)$ ist.

Relationen

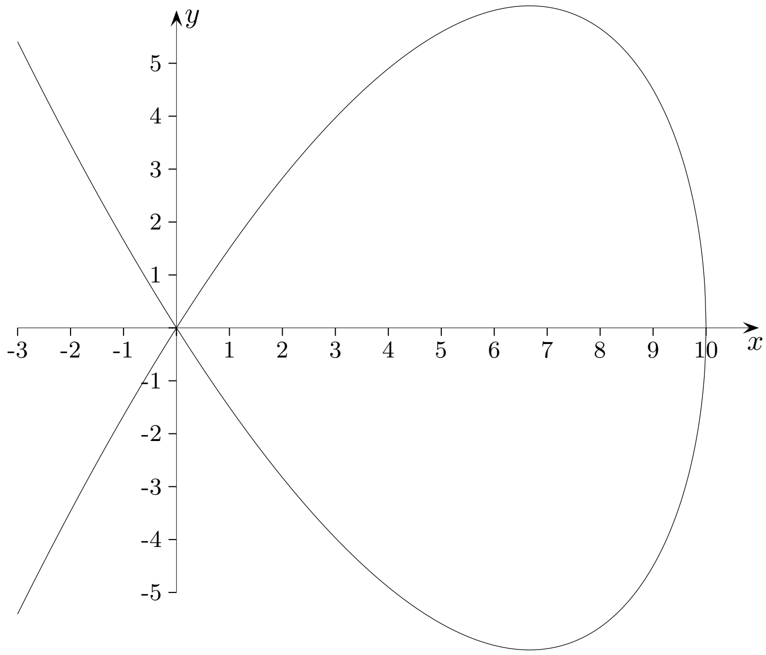
$$f(x) = \frac{1}{2}\, x\, \sqrt{10 - x}$$

ist ein Zweig der Relation

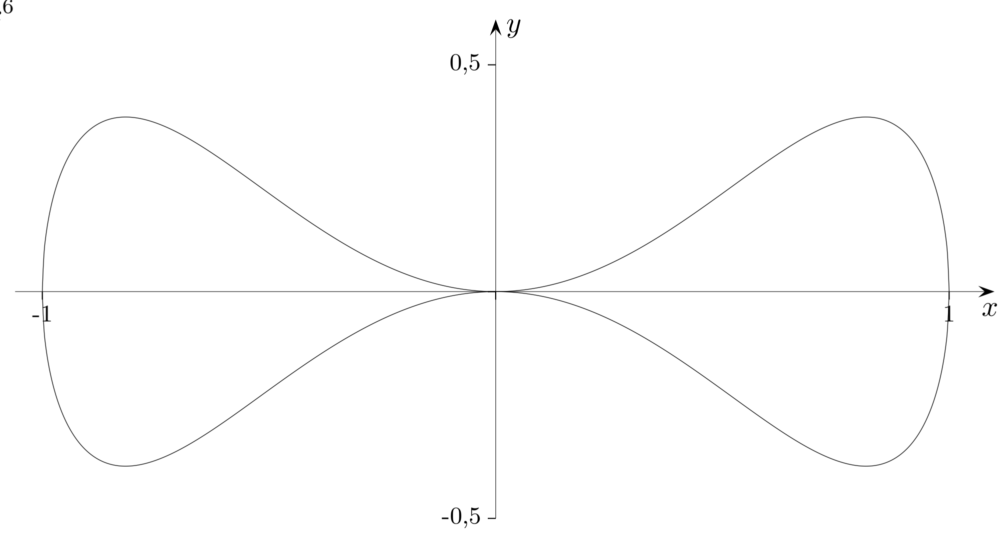
$$y^2 = \frac{1}{4}\, x^2\, (10 - x)\,,$$

der übrige Zweig lautet

$$g(x) = -\frac{1}{2}\, x\, \sqrt{10 - x}\;.$$

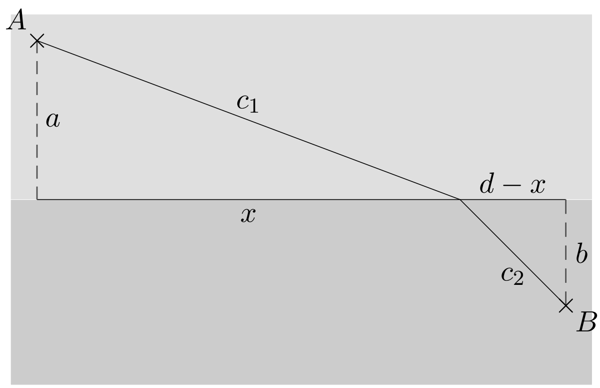


$$y^2 = x^4 - x^6$$



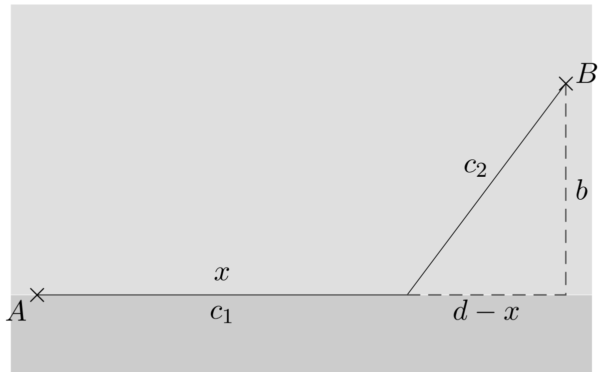
Welcher Weg von A nach B
kann in kürzester Zeit zurückgelegt werden?
Die in den Bereichen möglichen Geschwindigkeiten
sind c_1 und c_2.

$a = 3$ (in km)
$b = 2$
$d = 10$
$c_1 = 5$ (in $\frac{km}{h}$)
$c_2 = 3$



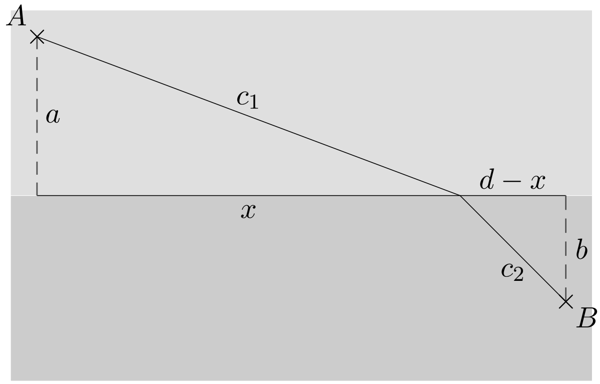
Welcher Weg von A nach B
kann in kürzester Zeit zurückgelegt werden?
Die in den Bereichen möglichen Geschwindigkeiten
sind c_1 und c_2.

$b = 4$ (in km)
$d = 10$
$c_1 = 4$ (in $\frac{km}{h}$)
$c_2 = 2$



Welcher Weg von A nach B
kann in kürzester Zeit zurückgelegt werden?
Die in den Bereichen möglichen Geschwindigkeiten sind c_1 und c_2.

$a = 3$ (in km)
$b = 2$
$d = 10$
$c_1 = 5$ (in $\frac{km}{h}$)
$c_2 = 3$

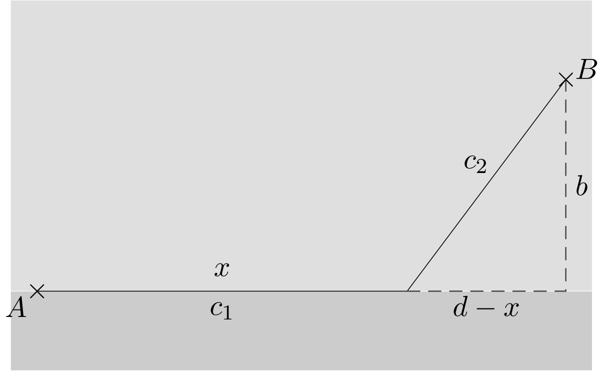


$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{c_2}$$

$x_{\min} = 8{,}62$

Welcher Weg von A nach B
kann in kürzester Zeit zurückgelegt werden?
Die in den Bereichen möglichen Geschwindigkeiten sind c_1 und c_2.

$b = 4$ (in km)
$d = 10$
$c_1 = 4$ (in $\frac{km}{h}$)
$c_2 = 2$



$$f(x) = \frac{x}{c_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{c_2}$$

$x_{\min} = 7{,}69$

Aufgaben

1. Bilde die 1. Ableitung   Ergebnis auf einen Bruchstrich

   a) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{2-x}$

   b) $f(x) = (x-2) \cdot \sqrt{x}$

2. Integriere   Ergebnis in Wurzelschreibweise

   a) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\; dx$

   b) $\displaystyle\int x \cdot \sqrt{x}\;\; dx$ Tipp: Vor dem Integrieren ist manchmal eine Umformung nützlich.

3. Der Graph der Funktion $f(x) = (6-x) \cdot \sqrt{x}$ erzeugt bei Rotation um die x-Achse zwischen den Nullstellen einen „Tropfen". Berechne

   a) das Volumen des Tropfens (algebraisch),

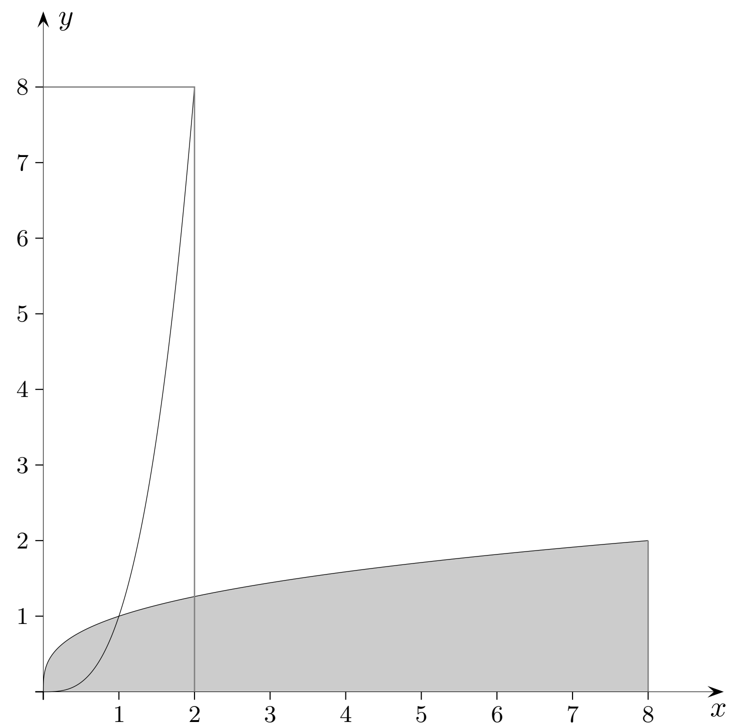
   b) Schnittfläche des Tropfens, in der die x-Achse liegt (GTR),

   c) die größte ebene Schnittfläche des Tropfens rechtwinklig zur Drehachse (GTR).

4. Ermittle (GTR) den Punkt P auf dem Graphen der Funktion $f(x) = 2\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$, der vom Punkt $A(5 \mid 0)$ den kleinsten Abstand hat.

5. Bestimme $\displaystyle\int_0^a \sqrt[n]{x}\; dx$ mit einer Umkehrfunktion.

Grafen für $n = 3$ und $a = 8$.



Aufgaben Lösungen

1. Bilde die 1. Ableitung Ergebnis auf einen Bruchstrich

   a) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{2-x}$ $f'(x) = \frac{x(8-5x)}{2\sqrt{2-x}}$

   b) $f(x) = (x-2) \cdot \sqrt{x}$ $f'(x) = \frac{3x-2}{2\sqrt{x}}$

2. Integriere Ergebnis in Wurzelschreibweise

   a) $\int \sqrt[3]{x}\; dx$ $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$

   b) $\int x \cdot \sqrt{x}\; dx$ Tipp: Vor dem Integrieren ist manchmal eine Umformung nützlich. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

3. Der Graph der Funktion $f(x) = (6-x) \cdot \sqrt{x}$ erzeugt bei Rotation um die x-Achse zwischen den Nullstellen einen „Tropfen“. Berechne

   a) das Volumen des Tropfens (algebraisch), $108\,\pi$

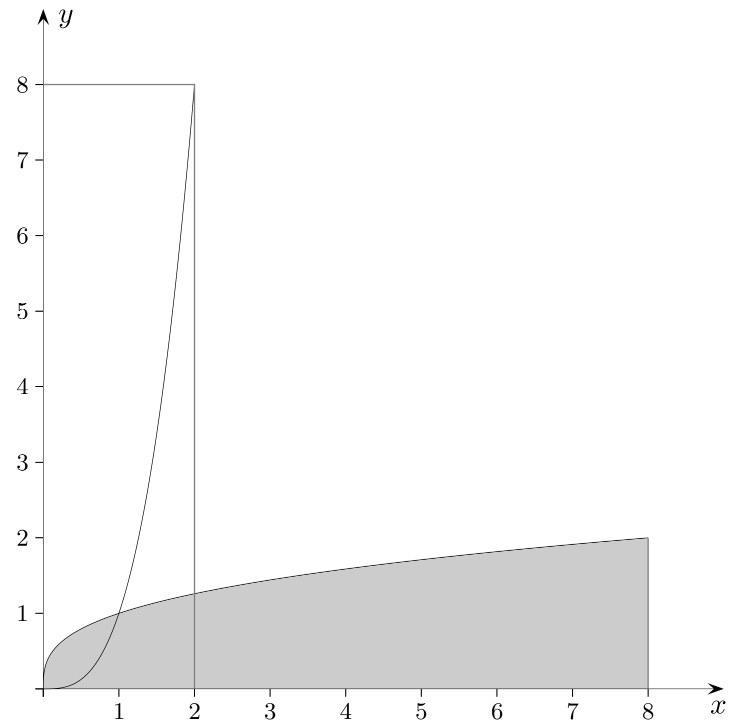
   b) Schnittfläche des Tropfens, in der die x-Achse liegt (GTR), 47,03

   c) die größte ebene Schnittfläche des Tropfens rechtwinklig zur Drehachse (GTR). $32\,\pi$

4. Ermittle (GTR) den Punkt P auf dem Graphen der Funktion $f(x) = 2\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$, der vom Punkt $A(5 \mid 0)$ den kleinsten Abstand hat. $P\left(3 \mid 2\sqrt{3}\right)$

5. Bestimme $\int_0^a \sqrt[n]{x}\; dx$

   mit einer Umkehrfunktion.



$$\int_0^a \sqrt[n]{x}\; dx = a\sqrt[n]{a} - \int_0^{\sqrt[n]{a}} x^n\; dx = \ldots = a\sqrt[n]{a} - \frac{a\sqrt[n]{a}}{n+1} = \frac{n\,a\sqrt[n]{a}}{n+1}$$

Aufgaben

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{x}{2}\sqrt{x+6}\,$, C sei der Graph von f.

   a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich von f, die Nullstellen und das Extremum.

   b) $P(u \mid v)$ sei ein Punkt von C mit $u < 0$. Die Parallele zur y-Achse durch P schneidet die x-Achse in Q. Das Dreieck OPQ hat den Flächeninhalt $A(u)$. Für welches u nimmt die Flächeninhaltsfunktion einen Extremwert an und wie groß ist er?

   c) Durch Rotation dieses Dreiecks um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechne dessen Volumen $V(u)$. Für welches u nimmt dieses Volumen einen Extremwert an und wie groß ist er?

Lösungen:

6. a) $\mathbb{D} = [-6; \infty[$
   Nullstellen: $x_1 = -6, \quad x_2 = 0,$
   $f'(x) = -\frac{3(x+4)}{4\sqrt{x+6}} \qquad Max(-4 \mid 2\sqrt{2})$

   b) $u_{\max} = -4{,}8 \qquad A_{\max} = 6{,}31$

   c) $u_{\max} = -4{,}5 \qquad V_{\max} = 35{,}78$

7. Für jedes k $(k > 0)$ ist die Funktion $f_k(x) = x\sqrt{k-2x}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_k und wählen Sie das k so, dass an der Stelle $x = 3$ ein Extremum vorliegt (notwendige Bedingung genügt).

$$\text{(\textit{Zwischenergebnis:} } f_k'(x) = \frac{k-3x}{\sqrt{k-2x}} \text{)}$$

Skizzieren Sie den Graphen von f_9.

b) Ermitteln Sie die Ortskurve der Extrema.

c) Für welches k verläuft der Graph von f_k durch den Punkt $R(4 \mid 8)$? Untersuchen Sie, ob durch jeden Punkt $S(x_0 \mid y_0)$ mit $x_0 > 0$ und $y_0 > 0$ ein Graph der Schar f_k verläuft.

d) $P(u \mid v)$ mit $u > 0$ sei ein Punkt auf dem Graphen von f_9. Die Parallele zur y-Achse durch P schneidet die x-Achse in Q. Dreht man das Dreieck OPQ um die y-Achse entsteht ein Körper mit einer kegelförmigen Mulde. Berechnen Sie das Volumen des Körpers. Für welches u nimmt das Körpervolumen einen Extremwert an? Wie groß und von welcher Art ist er?

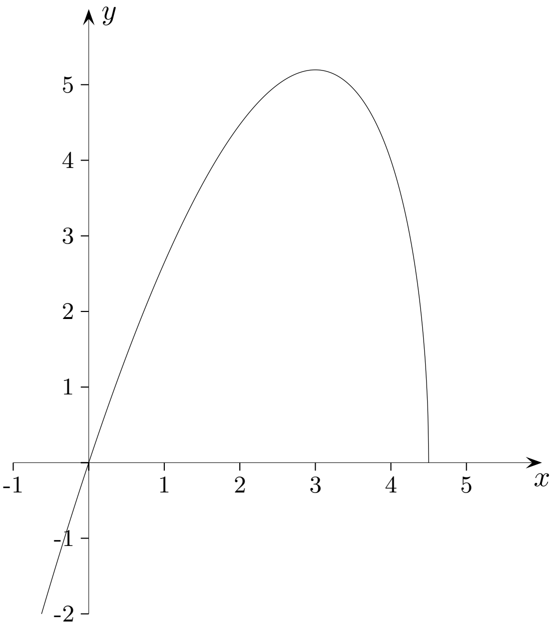
Der Körper K entsteht durch Rotation um die x-Achse des Graphen von f_9 im Definitionsbereich, für den $x \geq 0$ gilt.

e) Geben Sie die Höhe und den Grundkreisradius eines kleinen Kegels mit möglichst geringer Höhe an, aus dem K gefräst werden kann.

f) K soll von einer zur xy-Ebene parallelen Ebene $z = 1$ geschnitten werden. Skizzieren Sie die Schnittkurve und berechnen Sie ihre beiden orthogonalen Durchmesser (parallel zu den Achsen).

7. a) max. Def.-Bereich: $x \leq \frac{k}{2}$, $\quad f_k'(3) = 0 \implies k = 9$

$N_1(0 \mid 0)$, $\quad N_2\left(\frac{k}{2} \mid 0\right)$



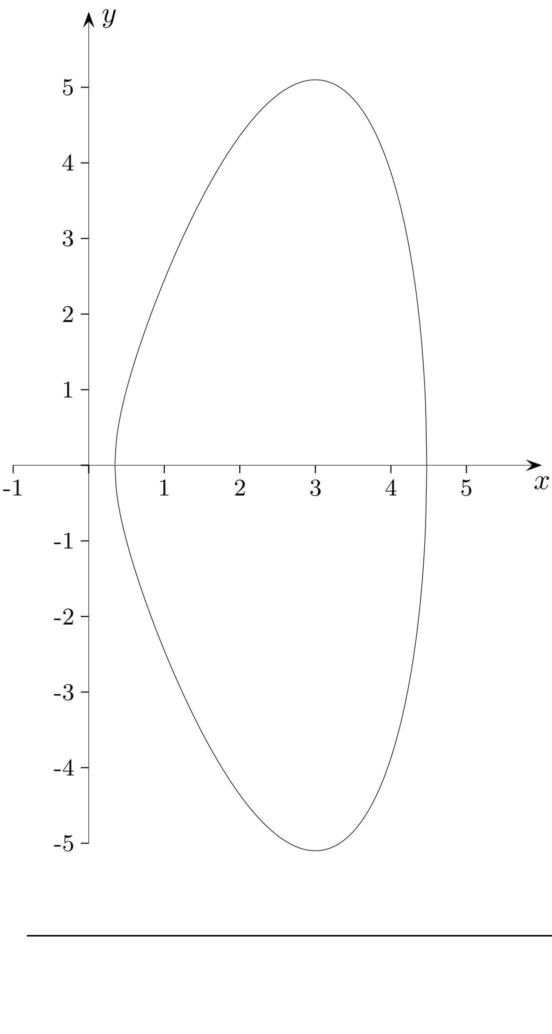
b) $Max\left(\frac{k}{3} \mid \frac{k}{3}\sqrt{k - \frac{2k}{3}}\right) = Max\left(\frac{k}{3} \mid \frac{1}{9}\,k\sqrt{9k - 6k}\right) \implies y = x\sqrt{x}$

c) $f_k(4) = 12 \implies k = 12$
Damit ein Graph durch $P(x_0 \mid y_0)$ verläuft, muss es ein positives k geben, so dass $y_0 = x_0\sqrt{k - 2x_0}$ gilt. $k = 2x_0 + (\frac{y_0}{x_0})^2$ erfüllt das Verlangte.

d) $V(u) = \frac{2}{3}\pi u^2 \cdot f_9(u) \implies u_{\max} = 3{,}86$

e) $f_9'(0) = 3$, $\quad h = 4{,}5 \implies r = 13{,}5$

f) Die Schnittkurve ist ein Oval.



$f_9(x) = 1 \implies x_1 = 0{,}347$ und $x_2 = 4{,}475$
$(x \geq 0) \qquad d_1 = 4{,}128$

$d_2 = 2 \cdot \sqrt{(f(3))^2 - 1} = 2\sqrt{26}$ (Pythagoras)