GM1 Infinitesimalrechnung

BE

Aufgabengruppe I

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto (e^x - 2)^2$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

3 1. a) Geben Sie die Nullstelle von f an und untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.

8 b) Ermitteln Sie Art und Lage des Extrempunkts, das Krümmungsverhalten und die Lage des Wendepunkts von G_f.

[zur Kontrolle: $f''(x) = 4e^x \cdot (e^x - 1)$]

4 c) Zeigen Sie, dass G_f und die durch die Gleichung $y = 4$ gegebene Gerade g genau einen Schnittpunkt $S(x_S \mid y_S)$ besitzen, und bestimmen Sie dessen Koordinaten. [Teilergebnis: $x_S = 2\ln 2$]

6 d) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente von G_f. Berechnen Sie $f(-2)$ und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-4 \le x \le 1{,}5$. Tragen Sie auch die Wendetangente und die Gerade g ein.

4 e) Betrachtet wird die Tangente an G_f in einem Punkt P, der G_f durchläuft. Geben Sie jeweils alle Werte an, die

α) die Steigung der Tangente

β) der y-Achsenabschnitt der Tangente

dabei annimmt.

2. Gegeben ist nun die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $I: x \mapsto \int_{\ln 2}^{x} f(t)\,dt$.

4 a) Bestimmen Sie ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung von I das Monotonieverhalten von I. Zeigen Sie, dass der Graph von I einen Terrassenpunkt besitzt und geben Sie dessen Koordinaten an.

2 b) Geben Sie ohne weitere Rechnung das Verhalten von I für $x \to -\infty$ an.

2 3. a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto 0{,}5e^{2x} - 4e^x + 4x$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.

7 b) Der Graph G_f schließt mit den durch die Gleichungen $y = 4$ bzw. $x = u$ $(u < 0)$ bestimmten Geraden im I. und II. Quadranten ein Flächenstück mit dem Inhalt A(u) ein. Bestimmen Sie A(u). Ermitteln Sie $\lim\limits_{u \to -\infty} A(u)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

40

BE

Aufgabengruppe II

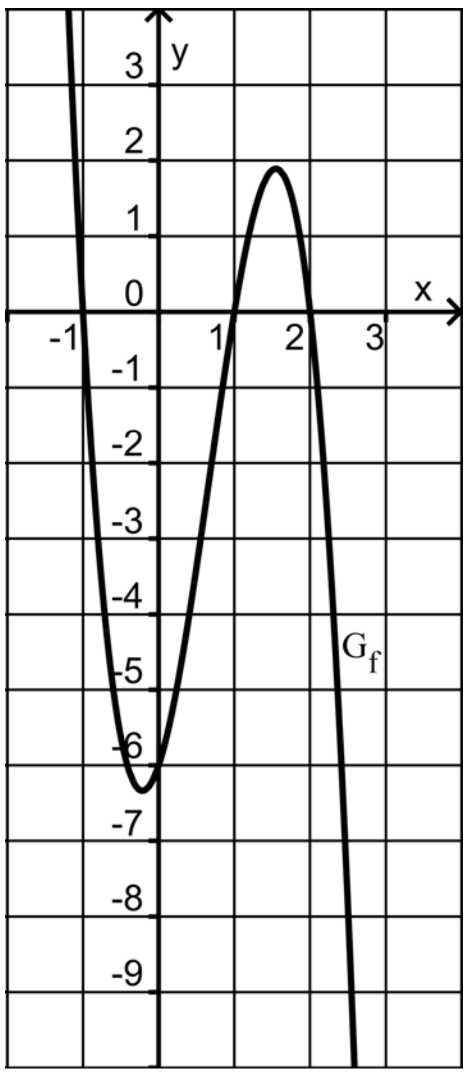
1. Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \ln(4 - x^2)$ mit maximalem Definitionsbereich D_g. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

7 a) Zeigen Sie, dass $D_g =]-2;2[$ gilt, und geben Sie das Symmetrieverhalten von G_g an. Bestimmen Sie die Nullstellen von g sowie das Verhalten von g an den Rändern von D_g.

5 b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von g und bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_g.

2 c) Skizzieren Sie G_g unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in einem Koordinatensystem.

2. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto -3x^3 + 6x^2 + 3x - 6$, die die Nullstellen 1, –1 und 2 besitzt. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
5	a) Die Tangente t an G_f im Punkt $(1\,|\,0)$ legt mit den Koordinatenachsen im IV. Quadranten ein Dreieck fest. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt A. [Ergebnis: $A = 3$]
7	b) Berechnen Sie die Inhalte der beiden Flächenstücke, die G_f mit der x-Achse einschließt. [Ergebnis: Flächeninhalte: 8 und 1,25]
	Betrachtet wird nun die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F: x \mapsto \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$. Der Graph von F wird mit G_F bezeichnet.
4	c) Begründen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung von F, dass F genau eine Nullstelle hat.
5	d) Welche Funktionswerte von F lassen sich aus den in Teilaufgabe 2b berechneten Flächeninhalten ermitteln? Geben Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_F an.
5	e) Ermitteln Sie unter Verwendung des in Teilaufgabe 2a berechneten Flächeninhalts A einen Näherungswert für F(0). Skizzieren Sie G_F in der Abbildung zu Aufgabe 2 unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.
40	

GM2 Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik

BE

Aufgabengruppe III

An einem Musikwettbewerb, der aus einer Messehalle bundesweit live im Fernsehen übertragen wird, nehmen zwölf Nachwuchsbands aus ganz Deutschland teil. Genau zwei davon, München Motel und Bavarian King, stammen aus Bayern. Die eine Hälfte der Bands singt ausschließlich Lieder mit englischen Texten, die andere ausschließlich Lieder mit deutschen Texten.

1. In der ersten Runde des Wettbewerbs treten die zwölf Bands nacheinander mit jeweils einem Lied auf; die Reihenfolge der Auftritte wird ausgelost. Nach den ersten sechs Auftritten findet eine Pause statt.

2 a) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der Auftritte?

2 b) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der Auftritte, wenn nur danach unterschieden wird, ob eine Band aus Bayern stammt oder nicht?

9 c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

A: „Die beiden bayerischen Bands treten vor der Pause auf."

B: „Die beiden bayerischen Bands treten vor der Pause direkt nacheinander auf."

C: „Deutsch und englisch singende Bands treten abwechselnd auf."

2. Die Bewertung der Auftritte der ersten Runde erfolgt mithilfe einer Zuschauerabstimmung im Internet. Jeder Zuschauer kann höchstens einmal abstimmen und muss zur Abgabe seines Votums genau drei von ihm favorisierte Bands auswählen. Bei 41% der zahlreich abgegebenen Voten wird mindestens eine bayerische Band ausgewählt, München Motel bei 31% und Bavarian King bei 22% der Voten.

4 a) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse „Bei einem zufällig betrachteten Votum wurde München Motel ausgewählt." und „Bei einem zufällig betrachteten Votum wurde Bavarian King ausgewählt." stochastisch unabhängig sind.

6 b) Unter allen Zuschauern, die ein Votum abgaben, werden 20 Freikarten für ein Konzert der späteren Siegerband verlost. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens drei der 20 ausgelosten Zuschauer Bavarian King auswählten.

(Fortsetzung nächste Seite)

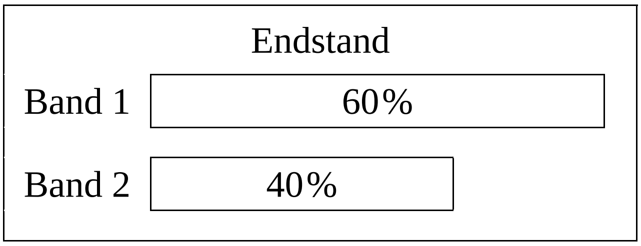
BE

3. Die Auftritte der zweiten Runde bewerten die Zuschauer durch eine telefonische Abstimmung. Dabei können bei jedem Anruf 1000 Euro gewonnen werden; die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt jeweils 0,02%.

4 a) Die bei jedem Anruf anstehende Entscheidung, ob ein Gewinn erzielt wird oder nicht, soll für 800 nacheinander ankommende Anrufe simuliert werden. Beschreiben Sie ein dafür geeignetes Urnenexperiment.

6 b) Ein Zuschauer möchte durch mehrfaches Anrufen seine Chance auf einen Gewinn vergrößern. Welchen Betrag müsste er wenigstens investieren, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einmal zu gewinnen, wenn jeder Anruf 50 Cent kostet?

4. Für das Finale der beiden bisher am besten bewerteten Bands haben sich München Motel und Bavarian King qualifiziert. Nach deren Finalauftritten entscheiden die Zuschauer im Rahmen einer erneuten telefonischen Abstimmung über den Sieger des Wettbewerbs; bei jedem Anruf ist nur der favorisierte Finalist zu nennen. Bevor die bereits feststehende Entscheidung bekannt gegeben wird, wird die Sendung ein letztes Mal für einen längeren Werbeblock unterbrochen. Für die Hallen- und Fernsehzuschauer wird unmittelbar vor dieser Werbeunterbrechung folgende Graphik eingeblendet (die zu den Anteilen gehörenden Bandnamen werden bewusst noch nicht angezeigt).



Ein Fan von München Motel vermutet, dass seine Band schließlich als Sieger ausgezeichnet wird. Da er sich nicht bis zur Bekanntgabe der Entscheidung gedulden will, nutzt er die Unterbrechung, um seine Vermutung zu testen. Dazu befragt er 25 der zahlreichen Hallenzuschauer und lässt sich von diesen den jeweils favorisierten Finalisten nennen.

2 a) Geben Sie zwei mögliche Gründe dafür an, dass diese Befragung nicht geeignet sein könnte, die Vermutung des Fans zu testen.

5 b) Da der Fan möglichst vermeiden will, sich aufgrund seines Testergebnisses irrtümlich über einen Erfolg von München Motel zu freuen, soll die Wahrscheinlichkeit dafür höchstens 10% betragen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel unter der Annahme, dass die Befragung geeignet ist, die Vermutung des Fans zu testen. Die Wahrscheinlichkeit, irrtümlich Bavarian King als Sieger vorherzusagen, soll möglichst klein sein.

40

BE	**Aufgabengruppe IV**
	1. In einer bayerischen Großstadt findet das jährliche Volksfest statt. Die Attraktion ist die Achterbahn mit ihren zwölf Wagen, von denen fünf gelb, vier rot und drei blau sind. Beim Aufbau der Achterbahn werden die zwölf Wagen hintereinander auf die Schienen gestellt und aneinandergehängt.
6	a) Wie viele Anordnungen der Wagen sind möglich, wenn diese
	α) nur nach der Farbe unterschieden werden?
	β) nur nach der Farbe unterschieden werden und die drei blauen Wagen direkt hintereinander fahren sollen?
5	b) Die Fahrgäste werden den einzelnen Wagen vor jeder Fahrt zufällig zugewiesen. Wie oft muss ein Besucher des Volksfests mindestens mit der Achterbahn fahren, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% wenigstens einmal in einem roten Wagen zu sitzen?
	2. Von den zahlreichen Personen, die am Abend Riesenrad fahren, sind erfahrungsgemäß 40% Minderjährige und 60% Erwachsene. Am ersten Abend wird an 15 zufällig ausgewählte Fahrgäste jeweils ein Freifahrschein vergeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 15 Freifahrscheinen
3	a) genau drei an Minderjährige gehen?
3	b) die letzten drei an Minderjährige gehen?
4	c) mehr als die Hälfte an Erwachsene gehen?
	3. Von den Besuchern des Festzelts sind 20% mit der Sauberkeit im Zelt unzufrieden. 30% der Festzeltbesucher sind zwar mit der Sauberkeit im Zelt, jedoch nicht mit der Freundlichkeit der Bedienungen zufrieden. Es werden die beiden folgenden Ereignisse betrachtet.
	F: „Ein zufällig ausgewählter Besucher des Festzelts ist mit der Freundlichkeit der Bedienungen zufrieden.“
	S: „Ein zufällig ausgewählter Besucher des Festzelts ist mit der Sauberkeit im Zelt zufrieden.“

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

5 a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von F. Gehen Sie dazu von der Unabhängigkeit der Ereignisse F und S aus.

3 b) Welche der folgenden Mengen beschreiben das Ereignis „Höchstens eines der beiden Ereignisse F und S tritt ein.“? Kreuzen Sie an.

- ☐ $F \cup S$
- ☐ $F \cap S$
- ☐ $\overline{F \cap S}$
- ☐ $(F \cap \overline{S}) \cup (\overline{F} \cap S) \cup (\overline{F} \cap \overline{S})$
- ☐ $(F \cap \overline{S}) \cup (\overline{F} \cap S)$
- ☐ $\overline{F} \cup \overline{S}$

(Hinweis: Für jedes falsch gesetzte oder fehlende Kreuz wird eine der erreichbaren Bewertungseinheiten abgezogen.)

4. An einem Tombolastand schwimmen in einem Becken 20 Kunststoffenten, die sich nur dadurch unterscheiden, dass sie auf ihren Unterseiten von 1 bis 20 durchnummeriert sind. Ein Spiel besteht darin, zwei Enten ohne Zurücklegen zu angeln und die beiden vorher nicht sichtbaren, auf ihren Unterseiten befindlichen Zahlen zu addieren.

3 a) Wie viele verschiedene Summenwerte sind bei dem Spiel möglich?

3 b) Begründen Sie, dass nicht alle Summenwerte gleichwahrscheinlich sind.

5 c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man den Summenwert 10?

40

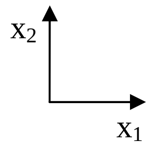
GM3 Analytische Geometrie

BE

Aufgabengruppe V

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(3|0|0)$, $B(0|3|0)$, $C(-3|-3|0)$ und $S(0|0|6)$ gegeben.

7 1. a) Das Dreieck ABC liegt in der x_1x_2-Ebene. Zeichnen Sie das Dreieck in ein zweidimensionales Koordinatensystem (vgl. Abbildung) ein. Weisen Sie nach, dass das Dreieck gleichschenklig ist, und bestimmen Sie seinen Flächeninhalt.



[Teilergebnis: Flächeninhalt: 13,5]

5 b) Die Punkte A, B und S legen die Ebene E fest. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0$]

3 c) Berechnen Sie den Abstand d des Punkts C von der Ebene E.

[Ergebnis: $d = 6$]

Die Punkte A, B, C und S sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.

2. In einem Geländemodell stellt die Pyramide einen Berg mit Gipfel S dar; das Dreieck CAS bildet die Südseite, der Rand des Dreiecks ABC den Fuß des Bergs. Der Berg soll, ausgehend von seinem Fuß, auf einer geraden Linie bestiegen werden.

4 a) Wo muss gestartet werden, damit der Weg zum Gipfel im Geländemodell einen möglichst kleinen Neigungswinkel gegen die x_1x_2-Ebene hat? Begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie die Länge des zugehörigen Wegs im Modell.

8 b) An welchem Punkt muss gestartet werden, wenn der geradlinige Weg zum Gipfel auf der Südseite verlaufen und möglichst kurz sein soll? Bestimmen Sie im Geländemodell die Koordinaten dieses Punkts sowie den Neigungswinkel φ des zugehörigen Wegs gegen die x_1x_2-Ebene.

2 3. a) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCS.

3 b) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und ABS gleich groß sind.

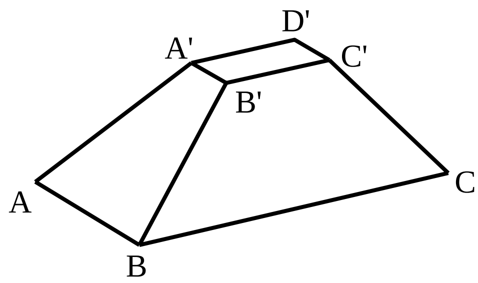
4 c) Die Ebene F enthält den Mittelpunkt der Strecke [AS] und ist parallel zur x_1x_2-Ebene. Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks, in dem sich die Pyramide und die Ebene F schneiden; begründen Sie Ihr Vorgehen.

4 d) Ermitteln Sie die Gleichung einer Geraden, die parallel zur Ebene E verläuft und von dieser den Abstand 3 hat.

40

BE

Aufgabengruppe VI



Auf dem Boden des Mittelmeeres wurde ein antiker Marmorkörper entdeckt, der ersten Unterwasseraufnahmen zufolge die Form eines Pyramidenstumpfs besitzen könnte. Mithilfe eines Peilungssystems konnte die Lage von sieben der acht Eckpunkte ermittelt und zur weiteren Analyse des Körpers in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft dargestellt werden: $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(-6\,|\,-12\,|\,12)$ und $C(18\,|\,-36\,|\,0)$ sind Eckpunkte der Grundfläche, $A'(14\,|\,-8\,|\,8)$, $B'(12\,|\,-12\,|\,12)$, $C'(20\,|\,-20\,|\,8)$ und $D'(22\,|\,-16\,|\,4)$ die Eckpunkte der Deckfläche (vgl. Abbildung).

5 a) Zeigen Sie, dass die Deckfläche $A'B'C'D'$ ein Rechteck ist und den Inhalt 72 besitzt.

3 b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC bei B rechtwinklig ist, und bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts D, der gemeinsam mit A, B und C die Eckpunkte eines Rechtecks bildet.

Exakte Messungen am Marmorkörper zeigen, dass der Punkt D im Modell die Lage des vierten Eckpunkts der Grundfläche beschreibt.

8 c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, die die Grundfläche ABCD enthält, in Normalenform. Weisen Sie nach, dass die Deckfläche parallel zur Grundfläche ist und von dieser den Abstand 12 hat.

[mögliches Teilergebnis: $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$]

Durch Berechnungen wird bestätigt, dass der Marmorkörper die Form eines Pyramidenstumpfs hat. Im Modell wird für weitere Überlegungen auch die zum Stumpf gehörige Pyramide mit Grundfläche ABCD betrachtet.

6 d) Berechnen Sie die Höhe h dieser Pyramide.

[Ergebnis: $h = 18$]

5 e) Bestimmen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfs.

8 f) Auf besonderes Interesse stößt die Seitenfläche des Marmorkörpers, die im Modell mit $BCC'B'$ bezeichnet wurde. Zeigen Sie, dass die Geraden BC und $B'C'$ den Abstand $6\sqrt{5}$ besitzen und berechnen Sie den Inhalt dieser Seitenfläche im Modell.

5 g) Um Informationen über den inneren Aufbau des Marmorkörpers zu erhalten, wird er geradlinig durchbohrt – im Modell betrachtet parallel zur x_3-Achse, ausgehend vom Mittelpunkt der Kante [BB']. Berechnen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem die Bohrung aus der Grundfläche austritt.

40