Aufgabe 1.1: See

Gegeben sind die Funktionen *f* und *g* durch die Gleichung $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ und den Graphen von *g* in der Anlage.

Die Graphen von *f* und *g* begrenzen für $1 \le x \le 3$ einen See. Der Graph von *f* bildet modellhaft die nördliche und die zu *g* gehörende quadratische Parabel die südliche Uferbegrenzungslinie.
Die *x*-Achse verläuft in West-Ost-Richtung. Die Längeneinheit ist 1 km.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von *g*.
[Zur Kontrolle: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$.]

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $S_x(1\,|\,0)$ ein gemeinsamer Punkt der Graphen von *f* und *g* ist. Der Graph der Funktion *f* schneidet die *x*-Achse in zwei weiteren Punkten. Ermitteln Sie deren Koordinaten.

c) Bestimmen Sie für den Graphen von *f* die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und deren Art. Für die Koordinaten der Extrempunkte genügen Näherungswerte.
Zeichnen Sie auf der Grundlage Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen von *f* in der Anlage ein.

d) Berechnen Sie die Länge des Sees zwischen seinem nördlichsten und seinem südlichsten Punkt in Metern.

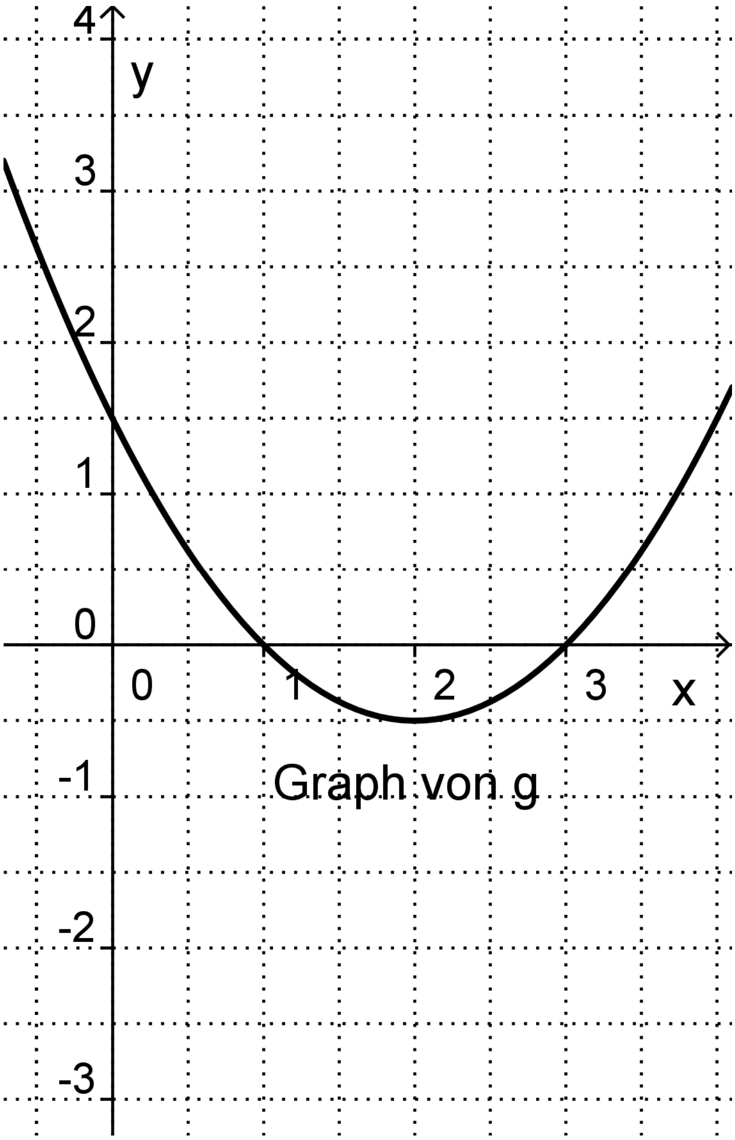
e) Berechnen Sie die Größe der Seefläche.

f) Im Punkt $P(3\,|\,0)$ befinden sich Start und Ziel einer Schwimmveranstaltung. Für die Schwimmveranstaltung soll durch zwei Bojen im See ein 5 km langer Kurs in Form eines gleichseitigen Dreiecks abgesteckt werden, wobei eine der drei Schwimmbahnen in West-Ost-Richtung verläuft.
Berechnen Sie für den beschriebenen Schwimmkurs die exakten Koordinaten der Bojen.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile							
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	4	7	15	4	6	4	40

Anlage

Anlage zu Aufgabe 1.1: See



Aufgabe 1.2 : Lenkdrachen

Gegeben sind die Funktionen *f* und *g* mit den Gleichungen $f(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{x+1}$; $x \in I\!R$

und $g(x) = -\frac{1}{2}x \cdot (e^{x+1} - x)$; $x \in I\!R$.

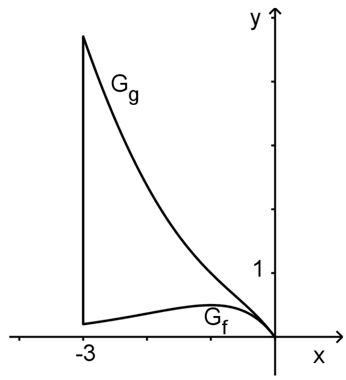
Der Graph der Funktion *f* sei G_f , der Graph der Funktion *g* sei G_g .

a) Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von *f* für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art des lokalen Extrempunktes von G_f .
Der Graph G_f besitzt genau einen Wendepunkt W . Zeigen Sie, dass die Tangente in W parallel zur Geraden h mit der Gleichung $y = \frac{1}{2e}x$ verläuft.

c) Weisen Sie nach, dass der Koordinatenursprung *O* einziger gemeinsamer Punkt der Graphen G_f und G_g ist.
Zeigen Sie, dass G_f und G_g in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente besitzen.

d) Ein Spielzeughersteller möchte die Fläche, die die Graphen G_g und G_f mit der Geraden $x = -3$ einschließen, als Vorlage für den Bau von Lenkdrachen nutzen. Der Drachen ist symmetrisch, seine Symmetrieachse liegt auf der Geraden $x = -3$.
Berechnen Sie den Flächeninhalt eines solchen Drachens unter der Bedingung, dass ein Meter in der Realität drei Längeneinheiten in der rechts stehenden Skizze entspricht.
[Zur Kontrolle: $g(x) - f(x) = \frac{1}{2}x^2$]

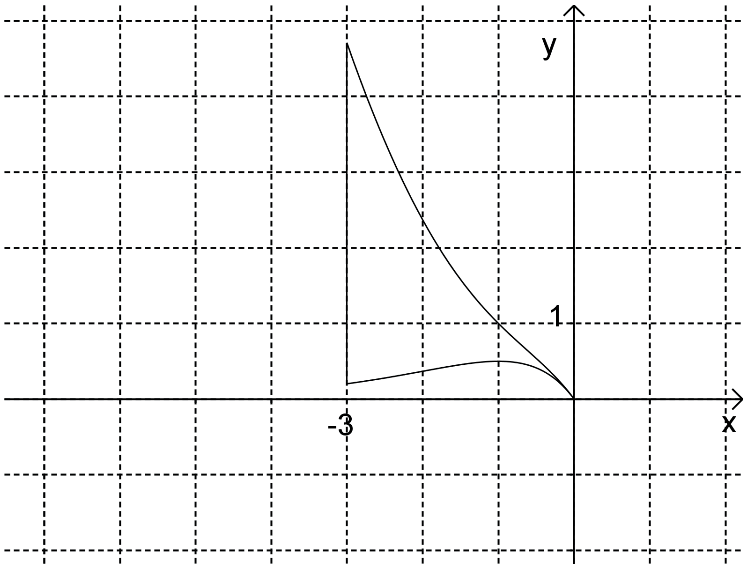


e) Für eine in der Herstellung billigere Variante des Lenkdrachens soll ein Dreieck genutzt werden, das durch Spiegelung an der Geraden $x = -3$ die neue Drachenform ergibt. Eckpunkte dieses Dreiecks sind der Koordinatenursprung *O*, der Schnittpunkt des Graphen G_g mit der Geraden $x = -3$ sowie ein auf dieser Geraden liegender Punkt $Q(-3 \mid y_Q)$ mit $0 < y_Q < 2$.
Zeichnen Sie in der Anlage eine mögliche vollständige neue Drachenform ein.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes *Q* unter der Bedingung, dass der Flächeninhalt des neuen Lenkdrachens $1\,\text{m}^2$ beträgt $(1\,\text{m} = 3\,\text{LE})$.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	2	15	7	7	9	40

Anlage

Anlage zu Aufgabe 1.2: Lenkdrachen



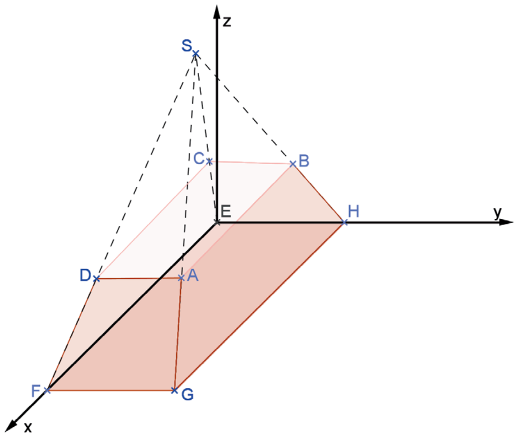
Aufgabe 2.1: Pavillon

Gegeben sind die Punkte $A(13{,}5|9|6)$, $B(4{,}5|9|6)$ und $S(9|6|12)$ und die Ebene E_1 durch $E_1: 4x + 3z = 72$.

a) Ermitteln Sie für die Ebene E_2, die durch die Punkte A, B und S festgelegt ist, eine Gleichung in Parameter- und eine in Koordinatenform und geben Sie einen Normalenvektor für E_2 an. [Zur Kontrolle: $E_2: 2y + z = 24$]

b) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 13{,}5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $s \in I\!R$ die Schnittgerade von E_1 und E_2 ist. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes G, in dem die Gerade g die x-y-Ebene durchstößt.

Auf dem Ausstellungsgelände einer Gartenschau soll ein Informationspavillon in Form eines Pyramidenstumpfes gebaut werden (siehe Abbildung). Die rechteckige Grundfläche des Pavillons ist durch die Punkte $E(0|0|0)$, $F(18|0|0)$, $G(18|12|0)$ und $H(0|12|0)$ gegeben.
In den Ebenen E_1 bzw. E_2 liegt je eine Seitenfläche des Pavillons (1 LE = 1 m).



c) Die Dachfläche mit den Eckpunkten $A(13{,}5|9|6)$, $B(4{,}5|9|6)$, $C(4{,}5|3|6)$ und $D(13{,}5|3|6)$ soll als Aussichtsplattform genutzt werden. Der Architekt plant eine Außentreppe auf der in E_1 liegenden Seitenfläche *FGAD*. Aus Sicherheitsgründen darf der Neigungswinkel der Treppe, der durch die Neigung der Ebene E_1 gegenüber der Grundfläche gegeben ist, nicht größer als 30° sein.
Untersuchen Sie, ob diese Treppe gebaut werden darf.

d) Abends soll der Pavillon von außen mit Scheinwerfern beleuchtet werden. Für die Beleuchtung der Seitenfläche *GHBA* wird im Punkt $P(9|25|0)$ ein senkrechter Mast errichtet, an dem der Scheinwerfer angebracht wird. Das Licht der als punktförmig angenommenen Lichtquelle soll senkrecht im Punkt $M(9|10|4)$ auf die Seitenfläche *GHBA* auftreffen, damit die Seitenfläche möglichst gut ausgeleuchtet wird.
Berechnen Sie, in welcher Höhe der Scheinwerfer am Mast befestigt werden muss.

e) Zwischen Pavillon und Lichtmast soll im Punkt $Q(9|y|0)$ eine 9 m hohe Fahnenstange so aufgestellt werden, dass der vom Scheinwerfer ausgehende und zu *GHBA* senkrechte Lichtstrahl noch ungehindert auf den Punkt M trifft.
Bestimmen Sie das Intervall für die Werte der y-Koordinate von Q.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	8	5	7	4	30

Aufgabe 2.2: Flugbahnen

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $r \in I\!R$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $s \in I\!R$ sowie die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $k, l \in I\!R$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden *g* mit der *x*-*y*-Ebene und geben Sie dessen Abstand zum Koordinatenursprung an.
Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden *g* mit der *x*-*y*-Ebene.

b) Beschreiben Sie die Lage der Ebene *E* im Koordinatensystem und ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von *E* und der *x*-*y*-Ebene.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene *E* in Koordinatenform.
Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden *h* zur Ebene *E*.
Bestimmen Sie gegebenenfalls den Durchstoßpunkt der Geraden *h* durch die Ebene *E*.

c) Die Flugbahn eines Airbus lässt sich mit der Gleichung der Geraden *h* und die einer Boeing mit der Gleichung der Geraden *g* beschreiben.
Entscheiden Sie, ob die beiden Flugzeuge kollidieren könnten.

d) Bei der Flugsicherung auf Flughäfen wird ständig dafür gesorgt, dass die Flugzeuge jederzeit einen Mindestabstand zueinander einhalten.
Die Boeing befindet sich im Punkt $P(-4\,|\,3\,|\,2)$.
Bestimmen Sie den Abstand zur Flugbahn *h* des Airbus (1 LE = 1 km).

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile					
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	9	12	5	4	30

Aufgabe 3.1 Umfrage über Discobesuche

Bei einer repräsentativen Umfrage unter 1200 Discobesuchern wird nach den beiden Merkmalen

- männlich (M) / weiblich (W) und
- intensiver Discobesucher (I) / gelegentlicher Discobesucher (G)

unterschieden.

Das Ergebnis der Umfrage ist (unvollständig) in der nebenstehenden Vierfeldertafel angegeben.

	I	G	Σ
M	60		
W		520	
Summe	200		

a) Übertragen Sie die Vierfeldertafel auf Ihr Arbeitspapier und ergänzen Sie alle fehlenden Werte.
Bestimmen Sie den Anteil der intensiven Discobesucher unter den weiblichen Discobesuchern.
Ermitteln Sie den Anteil der männlichen gelegentlichen Discobesucher unter allen Discobesuchern.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man unter 100 befragten Discobesuchern mehr als 10 intensive Discobesucher findet.
Ermitteln Sie, wie viele Discobesucher mindestens befragt werden müssen, um mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens einen intensiven Discobesucher zu finden.

c) 12 Schüler eines Mathematik-Grundkurses nehmen am schriftlichen Mathematikabitur teil. Drei dieser 12 Schüler sind intensive Discobesucher, die anderen sind gelegentliche Discobesucher.
Drei der Schüler des Kurses im Mathematikabitur werden nacheinander beliebig ausgewählt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.
Unter den drei ausgewählten Schülern sind

A: „nur der erste und der dritte Schüler gelegentliche Discobesucher“,

B: „genau zwei intensive Discobesucher“.

d) In der Region, in der die Umfrage stattfand, soll durch die Verpflichtung eines bekannten Discjockeys erreicht werden, dass der Anteil p der intensiven Discobesucher steigt. Die Wahrscheinlichkeit, dass unter 6 Discobesuchern mindestens 2 intensive Discobesucher zu finden sind, soll mindestens 60 % betragen.
Prüfen Sie, ob durch einen Anstieg der intensiven Discobesucher auf p = 30 % diese Vorgabe erfüllt wird.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile					
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	9	10	7	4	30

Anlage

N	k \ p	0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	0,40	0,45	0,50	K
	0	0059										99
	1	0371	0003									98
	2	1183	0019									97
	3	2578	0078									96
	4	4360	0237	0001								95
	5	6160	0576	0004								94
	6	7660	1172	0013	0001							93
	7	8720	2061	0038	0003							92
	8	9369	3209	0095	0009							91
	9	9718	4513	0231	0023							90
	10	9885	5832	0427	0057	0001						89
	11	9957	7030	0777	0126	0004						88
	12	9985	8018	1297	0253	0010						87
	13	9995	8761	2000	0469	0025	0001					86
	14	9999	9274	2874	0804	0054	0002					85
	15		9601	3877	1285	0111	0004					84
	16		9794	4942	1923	0211	0010	0001				83
	17		9900	5994	2712	0376	0022	0002				82
	18		9954	6965	3621	0630	0045	0005				81
	19		9980	7803	4602	0995	0089	0011				80
	20		9992	8481	5595	1488	0165	0024				79
	21		9997	8998	6540	2114	0288	0048				78
	22		9999	9370	7389	2864	0479	0091	0001			77
	23			9621	8109	3711	0755	0164	0003			76
	24			9783	8686	4617	1136	0281	0006			75
	25			9881	9125	5535	1631	0458	0012			74
	26			9938	9442	6417	2244	0715	0024	0001		73
	27			9969	9658	7224	2964	1066	0046	0002		72
	28			9985	9800	7925	3768	1524	0084	0004		71
	29			9993	9888	8505	4623	2093	0148	0008		70
	30			9997	9939	8962	5491	2766	0248	0015		69
	31			9999	9969	9307	6331	3525	0398	0030	0001	68
	32				9985	9554	7107	4344	0615	0055	0002	67
	33				9993	9723	7793	5188	0913	0098	0004	66
	34				9997	9836	8371	6019	1303	0166	0009	65
	35				9999	9906	8839	6803	1795	0272	0018	64
100	36				9999	9948	9201	7511	2386	0429	0033	63
	37					9973	9470	8123	3068	0651	0060	62
	38					9986	9660	8630	3822	0951	0105	61
	39					9993	9790	9034	4621	1343	0176	60
	40					9997	9875	9341	5433	1831	0284	59
	41					9999	9928	9566	6225	2415	0443	58
	42					9999	9960	9724	6967	3087	0666	57
	43						9979	9831	7635	3828	0967	56
	44						9989	9900	8211	4613	1356	55
	45						9995	9943	8689	5413	1841	54
	46						9997	9969	9070	6196	2421	53
	47						9999	9983	9362	6931	3087	52
	48						9999	9991	9577	7596	3822	51
	49							9996	9729	8173	4602	50
	50							9998	9832	8654	5398	49
	51							9999	9900	9040	6178	48
	52								9942	9338	6914	47
	53								9968	9559	7579	46
	54								9983	9716	8159	45
	55								9991	9824	8644	44
	56								9996	9894	9033	43
	57								9998	9939	9334	42
	58								9999	9966	9557	41
	59									9982	9716	40
	60									9991	9824	39
	61									9995	9895	38
	62									9998	9940	37
	63									9999	9967	36
	64										9982	35
	65										9991	34
	66										9996	33
	67										9998	32
	68										9999	31
n	k	0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	0,60	0,55	0,50	p \ k

Anlage zu Aufgabe 3.1: Umfrage über Discobesuche

Summierte Binomialverteilungen

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“, alle freien Plätze bzw. weggelassenen k-Werte links unten enthalten 1,0000, rechts oben 0,0000.

Wenn die Tabelle „von unten“ gelesen wird (p > 0,5), dann ist der richtige Wert 1 – (abgelesener Wert).

Aufgabe 3.2: Geschwindigkeitskontrollen

Auf dem Berliner Ring werden Geschwindigkeitskontrollen durchgeführt. Dabei wurde durch statistische Erhebungen festgestellt, dass 4 % der PKW-Fahrer und 3 % der LKW-Fahrer die zulässige Höchstgeschwindigkeit überschreiten. Diese werden im Weiteren Raser genannt. Beide Verkehrsmittel werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 kontrolliert.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse
A: Unter 65 kontrollierten LKW-Fahrern befindet sich kein Raser.
B: Unter 50 kontrollierten PKW-Fahrern befindet sich mindestens ein Raser.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse gegebenenfalls mit Hilfe geeigneter Baumdiagramme:
C: Von vier aufeinander folgenden Fahrzeugen wird nur das vierte kontrolliert.
D: Von fünf aufeinander folgenden Fahrzeugen werden genau zwei kontrolliert, die direkt hintereinander fahren.

c) Berechnen Sie, wie viele PKW mindestens kontrolliert werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einen Raser zu „erwischen“.

d) Bei der Auswertung von Raserfotos wird festgestellt, dass 32,2 % der Fahrer allein unterwegs waren.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis.
E: Unter drei zufällig ausgewählten Fotos befindet sich höchstens eines, auf dem ein Fahrzeug abgelichtet wurde, welches mit genau einer Person besetzt ist.

e) Der Anteil der PKW-Fahrer, die angeschnallt fahren, sei p mit $0 < p < 1$.
Berechnen Sie p für den Fall, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, unter 10 zufällig ausgewählten PKW-Fahrern genau 8 angeschnallte Fahrer zu finden, maximal ist.
Auf den Nachweis des Maximums wird verzichtet.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	5	9	7	5	4	30