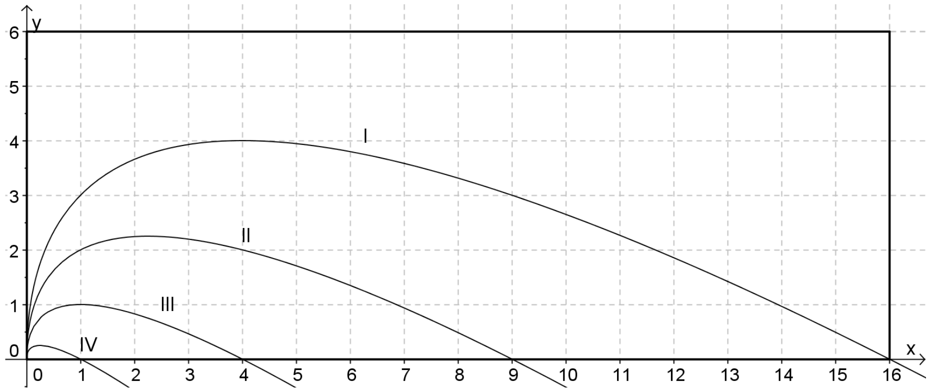
Aufgabe 1.1 CAS: IGA 2017

Die Vorbereitungen der internationalen Gartenbauausstellung 2017 in Berlin sind in vollem Gange.
Eine Gärtnerei hat sich um ein 6 m × 16 m großes rechteckiges Blumenbeet beworben, auf dem sie ihre Neuzüchtungen präsentieren wird.



Die Unterteilung des Blumenbeetes erfolgt durch Funktionsgraphen der Schar
$f_a(x) = 2a\sqrt{x} - x;\ a > 0$.

a) Geben Sie für die Funktion f_2 die Funktionsgleichung und den Definitionsbereich an.

Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f_2'.

Ermitteln Sie den Definitionsbereich der Ableitungsfunktion f_2'.

Untersuchen Sie das Verhalten der Ableitungsfunktion f_2' für $x \to 0$ und interpretieren Sie das Ergebnis anschaulich.

b) Berechnen Sie die Nullstellen von f_a und bestimmen Sie die Lage der Hochpunkte in Abhängigkeit vom Scharparameter *a*. Auf die Untersuchung einer hinreichenden Bedingung kann verzichtet werden.

Weisen Sie nach, dass keiner der Schargraphen einen Wendepunkt hat.

c) Bestimmen Sie die Werte des Parameters *a* für die in der Abbildung dargestellten Scharkurven III und IV und geben Sie die zugehörigen Funktionsgleichungen an.

d) Für die Besucher soll ein Weg durch das Blumenbeet angelegt werden. Es ist geplant, den Weg durch die Hochpunkte der Funktionsgraphen zu legen.

Ermitteln Sie die Gleichung einer Funktion *w*, deren Graph diesen Weg darstellt.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion *w* in die obere Graphik ein.

e) Schargraph I hat den Parameterwert $a = 2$, Schargraph II den Parameterwert $a = 1{,}5$. Auf der Fläche, die von diesen beiden Graphen sowie der *x*-Achse begrenzt wird, soll roter Phlox (Flammenblume) gepflanzt werden. Auf je einen Quadratmeter pflanzt man 6 Pflanzen. Es gilt: $1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$.

Berechnen Sie, wie viele Pflanzen für diesen Teil des Beetes bereitgestellt werden müssen.

f) *P* ist ein Punkt auf dem Graphen von f_2. Die diagonal liegenden Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks sind $P(x \mid f_2(x))$ und $R(16 \mid 6)$.
Ermitteln Sie die Koordinaten von *P* mit $x > 4$ so, dass das Rechteck zum Quadrat wird.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	8	10	5	3	8	6	40

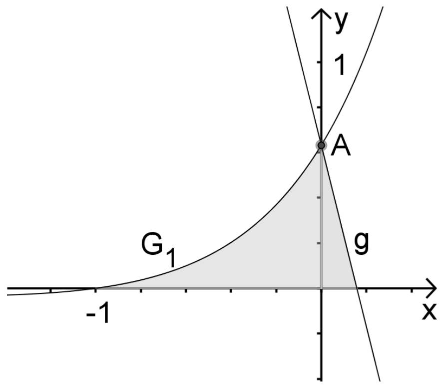
Aufgabe 1.2 CAS: Bremsschuh

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = -e^{x-a} + e^{2x}$; $a \in IR$.
Die Graphen der Schar f_a sind G_a.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_a mit den beiden Koordinatenachsen in Abhängigkeit von a.
Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.

b) Weisen Sie nach, dass jeder Graph G_a im Punkt $E_a\left(-a - \ln 2 \mid f_a(-a - \ln 2)\right)$ eine zur x-Achse parallele Tangente besitzt.
Zeigen Sie, dass E_0 ein lokaler Extrempunkt von G_0 ist.
Bestimmen Sie dessen Koordinaten sowie die Art des Extremums.

c) Genau ein Graph G_a hat einen Wendepunkt an der Stelle $x = -1$.
Berechnen Sie den Abstand dieses Wendepunktes zum Koordinatenursprung O.



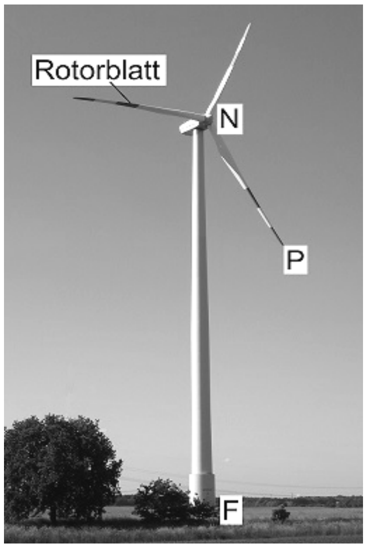
d) Der Graph G_1 und die Gerade g mit der Gleichung $y = -4x + 1 - \frac{1}{e}$ begrenzen gemeinsam mit der x-Achse eine Fläche, die dem Querschnitt eines Bremsschuhs entspricht, der das Wegrollen von Fahrzeugen verhindert ($1\,\text{LE} = 25\,\text{cm}$).
Die „Tiefe" des Bremsschuhs beträgt 20 cm.
Zeigen Sie, dass sich G_1 und g auf der y-Achse schneiden.
Berechnen Sie das Volumen eines solchen Bremsschuhs.

e) Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den G_1 und g im Punkt $A\left(0 \mid 1 - \frac{1}{e}\right)$ einschließen.

f) Der Produzent der Bremsschuhe möchte auf der Querschnittsfläche des Bremsschuhs sein rechteckiges Firmenlogo mit den Seitenlängen 5 cm und 15 cm so einstanzen lassen, dass die längere der beiden Seiten parallel zur x-Achse verläuft.
Untersuchen Sie, ob das möglich ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	5	8	5	12	5	5	40

Aufgabe 2.1 CAS: Windrad



Bei einer Windkraftanlage ist auf einem hohen Turm die Gondel mit dem Rotor angebracht. Die drei Rotorblätter laufen im Punkt $N(2\,|\,2\,|\,140)$ zusammen. Die Spitzen der Rotorblätter bewegen sich bei der Drehung durch den Punkt $P(34\,|\,-22\,|\,110)$.
Der Punkt $F(2\,|\,2\,|\,0)$ liegt in der *x*-*y*-Ebene (siehe Bild).
$1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$.

a) Berechnen Sie die Länge eines Rotorblattes.
   Berechnen Sie die Gesamthöhe des Windrades vom Punkt *F* bis zum höchsten Punkt *H*, den die Spitzen der Rotorblätter bei ihrer Drehung durchlaufen.
   Die Rotorblätter drehen sich in der Ebene *E*, welche die Punkte *F*, *N* und *P* enthält.
   Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene *E* in Koordinatenform.
   [Zur Kontrolle: $E:\quad 3x + 4y = 14$]

b) Ein Vogel fliegt entlang der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 127 \\ 230 \\ 150 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in IR$.
   Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Flugbahn mit der Ebene *E*.
   Untersuchen Sie, ob der Vogel durch die sich drehenden Rotorblätter gefährdet ist.

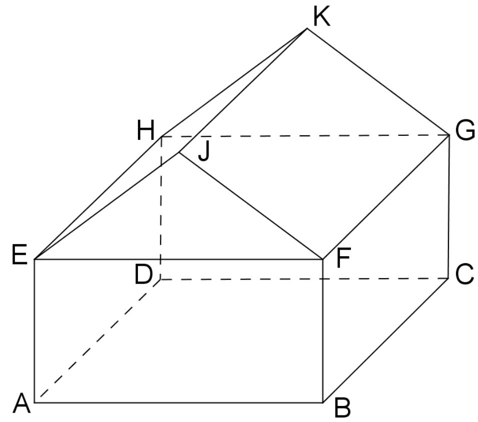
c) Zur optimalen Nutzung der Windenergie sollte der Wind senkrecht auf die Ebene treffen, in der sich die Rotorblätter drehen.
   Der Wind weht in Richtung $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Begründen Sie, dass der Wind nicht senkrecht auf die Ebene *E* trifft.
   Berechnen Sie, um welchen Winkel die Gondel gedreht werden muss, damit der Wind senkrecht auf die Ebene trifft, in der sich die Rotorblätter drehen.

d) Die Einwohner der benachbarten Ortschaft befürchten Einschränkungen ihrer Lebensqualität durch den Betrieb der beschriebenen Windkraftanlage. Der Punkt $R(420\,|\,850\,|\,0)$ liegt am Rand der Ortschaft. Berechnen Sie den Abstand des Punktes *R* von der Ebene *E*.

e) Bei Sonnenlicht erzeugen die sich drehenden Rotorblätter einen sich bewegenden Schatten in der *x*-*y*-Ebene. Zu einer bestimmten Tageszeit wird vom Punkt $N(2\,|\,2\,|\,140)$ der Schattenpunkt $S_N(-54\,|\,-82\,|\,0)$ erzeugt. Gleichzeitig entsteht von der Spitze $P(34\,|\,-22\,|\,110)$ eines Rotorblattes der Schattenpunkt S_P.
   Berechnen Sie die Koordinaten von S_P. [Zur Kontrolle: $S_P(-10\,|\,-88\,|\,0)$]
   Untersuchen Sie, ob alle möglichen Schattenpunkte der Rotorspitzen auf einem Kreis um S_N liegen.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	7	5	6	3	9	30

Aufgabe 2.2 CAS: Haus



Die Abbildung zeigt ein Haus. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass sich die rechteckige Grundfläche des Hauses achsenparallel in der *x*-*y*-Ebene befindet. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte $D(0\,|\,0\,|\,0)$, $F(10\,|\,8\,|\,4)$, $G(0\,|\,8\,|\,4)$ und $J(10\,|\,4\,|\,7)$. Es gilt: $1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte *K* und *E* an.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene *E**, in der die Dachfläche *FGKJ* liegt, in Koordinatenform.
[Kontrollergebnis: $E^*: 3y + 4z = 40$]
Berechnen Sie den Neigungswinkel der Dachfläche *FGKJ* gegenüber der horizontalen Ebene.

b) Paralleles Licht fällt in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\sqrt{39} \\ y \\ -5 \end{pmatrix}$ auf das Hausdach.

Bestimmen Sie einen möglichen Wert für *y* so, dass der Winkel zwischen der Richtung der Lichtstrahlen und der Dachfläche *FGKJ* 30° beträgt.

c) Ein Drittel der Dachfläche *FGKJ* wird mit Solarzellen bestückt.
Ermitteln Sie die Größe dieser Fläche.
Die Solarzellen können sowohl in der Dachfläche montiert werden als auch in Ebenen F_a, die parallel zur Dachfläche liegen. Dabei darf der Abstand der Ebenen F_a zur Dachfläche maximal 20 cm betragen.
Entwickeln Sie unter Verwendung des Parameters *a* eine Gleichung für die Ebenen F_a und geben Sie ein Intervall für die Einschränkung des Parameters *a* an.

d) Im Innern des Hauses ist auf dem Fußboden *EFGH* des Dachraumes im Punkt $P(1\,|\,5\,|\,4)$ ein 4 m langer, senkrecht stehender Mast für eine Satellitenantenne montiert. Dieser Mast ragt durch das Dach ins Freie.
Ermitteln Sie die Länge des Teiles dieses Mastes, der sich außerhalb des Hauses befindet sowie den Abstand der Mastspitze zur Ebene *E**.

e) Durch Teile der Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 5 \\ 6{,}25 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$ können zwei Dachbalken modelliert werden, die in der Ebene *E** liegen. Begründen Sie, dass g_1 und g_2 parallel zueinander verlaufen und berechnen Sie den Abstand der beiden Dachbalken.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	9	3	7	6	5	30

Aufgabe 3.1 CAS: Straßenverkehr

In einer Stadt werden 25 % des täglichen Straßenverkehrs als Berufsverkehr eingestuft.

Eine viel befahrene Straße wird saniert. Aus Erfahrung weiß man, dass beim Befahren dieser Straße während des Berufsverkehrs mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 ein Stau auftritt. Außerhalb dieser Verkehrszeit liegt die Stauwahrscheinlichkeit bei 0,2.

a) Stellen Sie die oben beschriebenen Zusammenhänge in einem Baumdiagramm dar.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fahrzeug im Stau steht.
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse Berufsverkehr und Stau stochastisch abhängig sind.

b) Ein Autofahrer aus dieser Stadt hat für sich ein bestimmtes Fahrverhalten festgelegt.
Während des Berufsverkehrs benutzt er immer die Umgehungsstraße.
Fährt er außerhalb des Berufsverkehrs, so benutzt er mit 50 %-iger Wahrscheinlichkeit die Umgehungsstraße.

Ereignis U: „Dieser Autofahrer benutzt die Umgehungsstraße."
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(U)$.

c) Der Anteil der Busse im Straßenverkehr macht durchschnittlich 4 % aus.
Es stehen 60 Fahrzeuge in einem Stau.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse B_1 und B_2.
B_1: „Es stehen genau drei Busse im Stau."
B_2: „Es stehen mindestens drei Busse im Stau."

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens k Busse im Stau stehen, soll zwischen 90 % und 95 % liegen. Bestimmen Sie k.

d) Es werden im Folgenden nur Fahrzeuge betrachtet, die in einem Stau stehen. Unter diesen Fahrzeugen liegt der PKW-Anteil bei 55 %. Von diesen PKW kommen 31 % aus der Stadt.
Insgesamt kommen aber nur 24 % der im Stau stehenden Fahrzeuge aus der Stadt.

Ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug im Stau ist kein PKW.
Bestimmen Sie unter dieser Bedingung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Fahrzeug aus der Stadt kommt.

e) Von f Fahrzeugen, die in einem Stau stehen, sind genau zehn PKW.
Von diesen f Fahrzeugen werden zwei zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter diesen zwei Fahrzeugen genau ein PKW befindet, beträgt 50 %.

Berechnen Sie, wie viele Fahrzeuge in diesem Stau stehen können.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	9	4	7	6	4	30

Aufgabe 3.2 CAS: Sportfan

Gemäß einer „Studie zur Gesundheit Erwachsener in Deutschland“ zeigt sich in Deutschland ein Trend zu mehr sportlicher Aktivität.
Ein Viertel der Erwachsenen treibt regelmäßig mindestens zwei Stunden Sport pro Woche (Sportfans), wobei der Anteil der Sportfans unter den Männern mit 29,3 % etwas höher ist als unter den Frauen.
Alle anderen Bundesbürger werden hier als „keine Sportfans" bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A : Nur der zweite und sechste von zehn zufällig ausgewählten Bundesbürgern sind Sportfans.

B : Unter 20 zufällig ausgewählten männlichen Bundesbürgern befinden sich genau drei Sportfans.

C : Unter zehn zufällig ausgewählten Bundesbürgern befindet sich höchstens ein Sportfan.

D : Von 100 zufällig ausgewählten Bundesbürgern gehören mindestens 70 und weniger als 79 Personen zu denjenigen, die keine Sportfans sind.

E : Unter 850 zufällig ausgewählten männlichen Bundesbürgern befinden sich genau 609 Personen, die keine Sportfans sind.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Bundesbürger, die mindestens befragt werden müssten, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,96 wenigstens einen zu entdecken, der Sportfan ist.

c) Unter allen Bundesbürgern liegt der Anteil der Männer bei 48,88 % (Zensus 2011).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Sportfan ein Mann ist.
Bestimmen Sie den Anteil der Sportfans unter den Frauen.

d) In einem Sportstudio trainieren 25 Bundesbürger, von denen genau acht zur Gruppe der Sportfans gehören. Es werden zufällig sieben Personen „ohne Zurücklegen“ ausgewählt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses F, dass sich unter den sieben ausgewählten Personen genau drei Sportfans befinden.

e) Eine Gruppe umfasst n zufällig ausgewählte Bundesbürger. Untersuchen Sie, für welche Gruppengröße n die Wahrscheinlichkeit, genau einen Sportfan in der Gruppe zu haben, am größten ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	12	3	8	3	4	30