Aufgabe 1.1 CAS: Medikament

Nach der Einnahme eines Medikaments geht der Wirkstoff des Medikaments in das Blut über, wobei sich die Konzentration des Wirkstoffs im Blut mit der Zeit verändert.

Die Konzentration wird für $0 \le t \le 6$ durch die Funktion f mit $f(t) = \frac{1}{4}t^3 - 3t^2 + 9t$ beschrieben (Graph siehe Anlage). Dabei ist t die Zeit in Stunden seit Beginn der Einnahme und $f(t)$ die Konzentration in µg pro Liter.

a) Geben Sie anhand des Graphen die Zeitintervalle an, in denen die Konzentration des Wirkstoffs im Blut zunimmt und in denen sie abnimmt.
Das Medikament ist nur wirksam, wenn die Konzentration des Wirkstoffs im Blut mindestens 4 µg pro Liter beträgt.

Berechnen Sie die Länge des Zeitintervalls, in dem das Medikament wirksam ist.

Bestimmen Sie die Nullstellen von *f*.

b) Geben Sie anhand des dargestellten Graphen die Koordinaten des Hochpunktes an.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Konzentration nach 6 Stunden ein Minimum erreicht.

c) Bestimmen Sie für den Zeitpunkt $t = 4$ h die momentane Änderungsrate der Konzentration des Wirkstoffs im Blut.

Berechnen Sie den Zeitpunkt, in dem die Konzentration des Wirkstoffs im Blut am stärksten abnimmt.

d) Ein Pharmakonzern hat ein anderes Medikament entwickelt, bei dem die Konzentration des Wirkstoffs im Blut im Intervall $[0;5]$ durch die Funktion *k* mit $k(t) = at^3 + bt^2 + ct$ bestimmt werden kann.
Bekannt ist, dass bei der vorgesehenen Einnahme
- die Konzentration nach einer Stunde den Wert 3,2 erreicht,
- die Konzentration nach 5 Stunden wieder den Wert null erreicht,
- bei $t = 5$ sich die Konzentration nicht ändert, d. h. die Änderungsrate auf null sinkt.

Ermitteln Sie aus diesen Angaben die Parameter der Funktion *k*.
[Zur Kontrolle: $a = 0{,}2$; $b = -2$; $c = 5$]

e) Untersuchen Sie, ob es einen Zeitpunkt $t > 0$ gibt, an dem die beiden Konzentrationen *f* und *k* gleich sind.

Die Änderungsraten der beiden Konzentrationen lassen sich anhand der Ableitungsfunktionen f' bzw. k' beschreiben.

Untersuchen Sie, ob es im Intervall $[0;5]$ einen Zeitpunkt gibt, in dem die Änderungsraten der beiden Konzentrationen gleich sind.

f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion *k* in das gegebene Koordinatensystem.

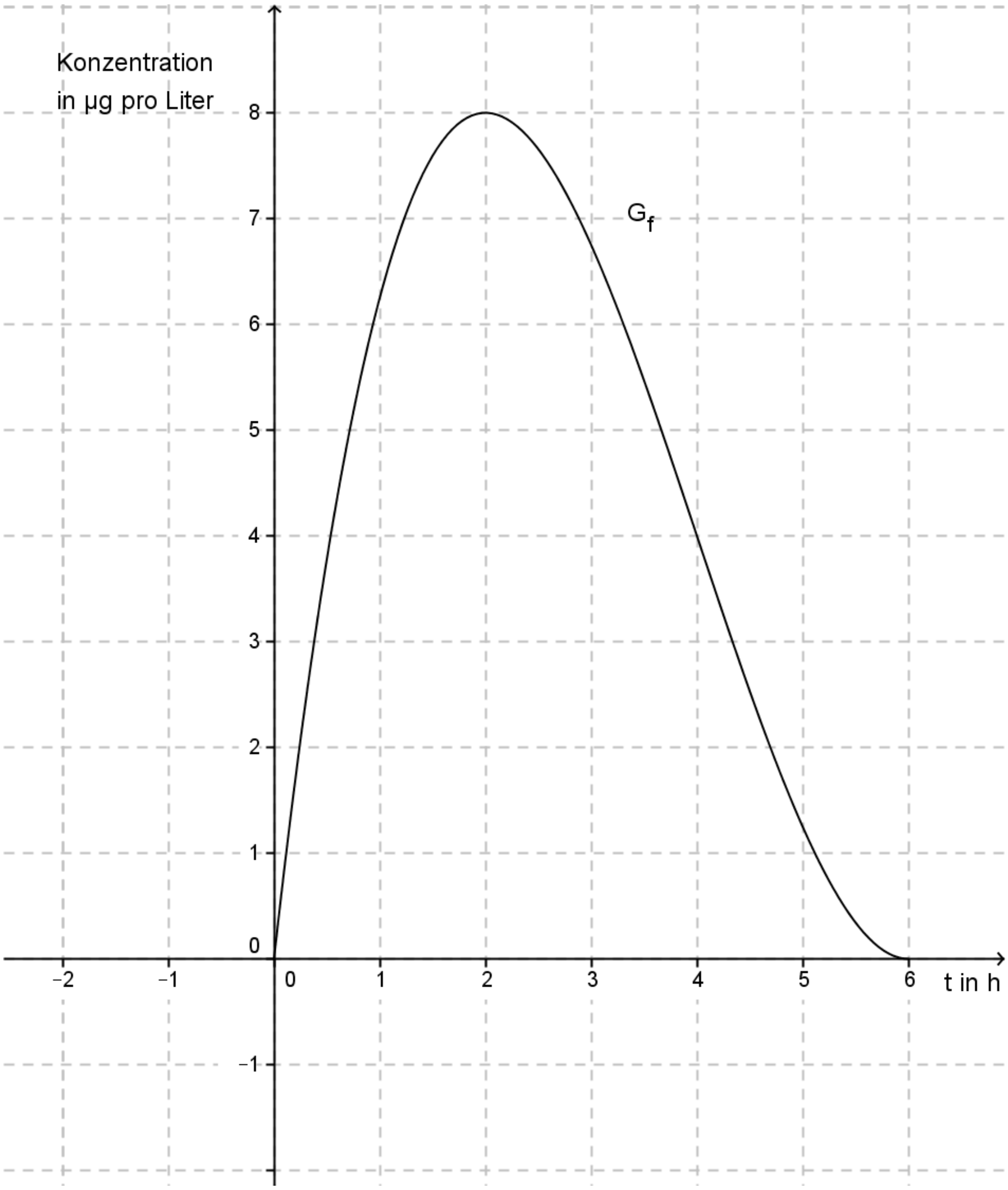
Beschreiben Sie anhand der Graphen von *f* und *k* drei Unterschiede in der zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Medikamente.

Der Pharmakonzern behauptet: „Vom Medikament *f* wird etwa doppelt so viel Wirkstoff aufgenommen wie vom Medikament *k*.“
Erläutern Sie, wie diese Behauptung überprüft werden könnte.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	7	5	5	6	8	9	40

Anlage

Anlage zu Aufgabe 1.1 CAS: Medikament



Aufgabe 1.2 CAS: Weidezelt

Weidezelte werden in der Landwirtschaft vielfältig genutzt. Sie bestehen aus einem Gerüst aus Stahlrohren, welches mit einer Plane bespannt ist, siehe Abbildung 1.


Abbildung 1

a) Hersteller A nutzt für die Konstruktion der bogenförmigen Rohre als Modell den Graphen G_f der Funktion $f(x) = -e^{0{,}3x^2} + 5$; $x \in IR$.
Dabei liegt die x-Achse in der Höhe des Erdbodens, die y-Achse verläuft durch den höchsten Punkt von G_f.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.
Geben Sie die Höhe und die Breite des Weidezeltes an, $1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$.
Berechnen Sie die Größe der in der Abbildung 2 schraffierten Frontfläche des Zeltes.

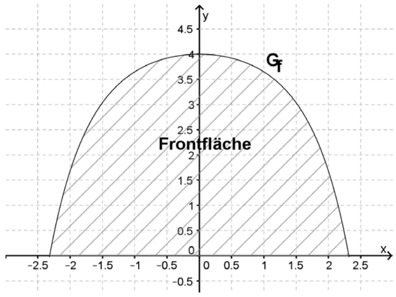


Abbildung 2

b) Stellen Sie dar, wie mithilfe der Ableitungsregeln die ersten beiden Ableitungen von f gebildet werden. Weisen Sie nach, dass G_f genau einen Hochpunkt hat.
Geben Sie die Koordinaten des Hochpunktes an.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass es keine Wendepunkte gibt.
Geben Sie beim Bilden der Ableitungen die verwendeten Ableitungsregeln an.

c) Für die Tierhaltung nutzt man häufig für die Frontflächen Planen mit eingearbeiteten, lichtdurchlässigen Windschutznetzen. In der Abbildung 3 ist ein solches rechteckiges Netz dargestellt. Seine untere Begrenzung befindet sich in 2 m Höhe. Der Flächeninhalt des Netzes soll möglichst groß sein. Stellen Sie eine Zielfunktion, also eine Funktion für den Flächeninhalt des Rechtecks, auf. Berechnen Sie Breite und Höhe des Netzes mit dem maximalen Flächeninhalt.

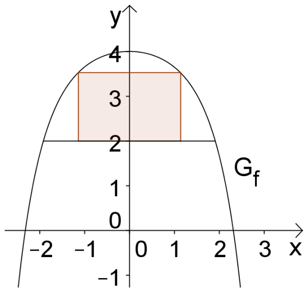


Abbildung 3

d) Hersteller B stellt das Gerüst der Frontfläche aus drei Stahlrohren her, siehe Abbildung 4. Das Teilstück III wird mit dem Graphen G_p der Funktion p mit $p(x) = ax^2 + b$ modelliert.
Entnehmen Sie der Abbildung die Koordinaten geeigneter Punkte und bestimmen Sie die Werte für a und b.
[Zur Kontrolle: $a = -0{,}5$; $b = 4$]

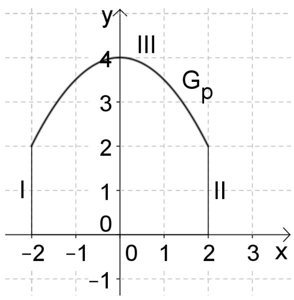


Abbildung 4

e) Weidezelte, die für Lagerzwecke genutzt werden, werden häufig mit Planen für die Frontflächen versehen. Berechnen Sie die Größe der Frontfläche für das Zelt von Hersteller B. Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die Frontfläche bei Hersteller B kleiner ist als bei Hersteller A.
Ein Bauer möchte im Weidezelt von Hersteller B 10 t Heu lagern. $1\,\text{m}^3$ Heu hat eine Masse von 100 kg. Berechnen Sie, wie lang das Weidezelt dafür sein müsste.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	10	12	4	5	9	40

Aufgabe 2.1 CAS: Ikarus

Ein Ballon mit Forschern schwebt in der Ebene $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\5\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix};\ r,s \in I\!R$.

Der fliegende Ikarus wird von ihnen um 12:00 Uhr in einer Höhe von 2 km im Punkt $A(\,10\,|\,6\,|\,2)$ gesichtet. Eine Minute später erreicht Ikarus bei seinem geradlinigen Flug den Punkt $B(\,10{,}6\,|\,6{,}36\,|\,2{,}02)$.

Es gilt: 1 LE = 1 km.

a) Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, auf der die Flugbahn von Ikarus liegt.

Berechnen Sie die Länge des Weges, den Ikarus in einer Minute zurücklegt.

Ermitteln Sie die Geschwindigkeit von Ikarus in der Einheit $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Ikarus ist in der *x*-*y*-Ebene gestartet. Berechnen Sie die Koordinaten des Startpunktes.

Geben Sie an, um welche Uhrzeit Ikarus gestartet ist. Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Bestimmen Sie für die Ebene *E*, in der der Ballon mit den Forschern schwebt, eine Gleichung in Normalenform.

[Ein Kontrollergebnis: Ein Normalenvektor für *E* ist z. B. $\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-8\end{pmatrix}$.]

Zu einem bestimmten Zeitpunkt war Ikarus im Punkt $Q(\,-5\,|\,-3\,|\,1{,}5)$.
Weisen Sie nach, dass Ikarus zu diesem Zeitpunkt mehr als 250 m von den Forschern entfernt war.

d) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem Ikarus die Ebene *E* des Ballons der Forscher erreicht.

Ikarus trifft in einem sehr kleinen Winkel auf die Ebene *E*.

Bestimmen Sie die Größe dieses Winkels.

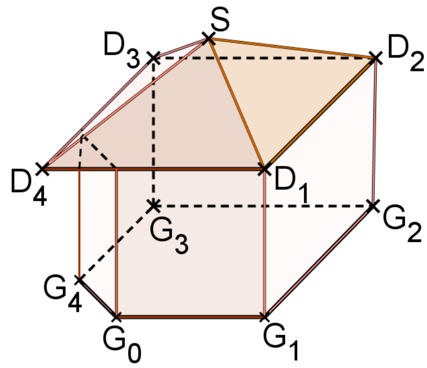
e) Die Forscher schweben mit ihrem Ballon in ihrer Ebene *E* längs einer Geraden.
Der Ballon erreicht die Flugbahn des Ikarus in einem Punkt *P*.

Geben Sie mit einer Begründung die Koordinaten von *P* an.

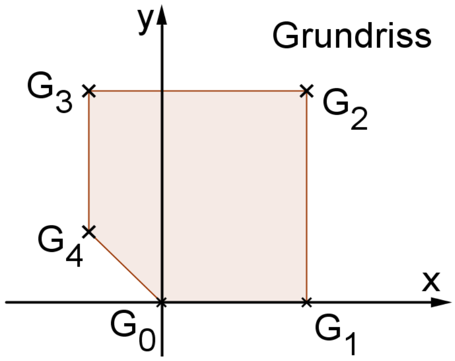
Ermitteln Sie, wie viele Minuten Ikarus nicht weiter als 100 m von der Ebene des Forscherballons entfernt ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	5	6	9	4	30

Aufgabe 2.2 CAS: Gartenhaus



Ein Gartenhaus hat als Grundfläche ein Fünfeck mit den Eckpunkten $G_0(0\,|\,0\,|\,0)$, G_1, $G_2(2\,|\,3\,|\,0)$, G_3 und $G_4(-1\,|\,1\,|\,0)$ (s. Abbildung). Das Dach des Gartenhauses ist eine quadratische Pyramide mit den Eckpunkten D_1, D_2 und D_3, die in 2 m Höhe genau senkrecht über G_1, G_2 und G_3 liegen. Der vierte Eckpunkt D_4 liegt nicht über einem Eckpunkt der Grundfläche.
Es gilt: $1\text{ LE} = 1\text{ m}$.



a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte G_1, G_3 und D_2 an.
Weisen Sie nach, dass $D_1(2\,|\,0\,|\,2)$ auf der Geraden
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -0{,}4 \end{pmatrix};\ r \in IR$ liegt.
Die Dachspitze hat die Koordinaten $S(0{,}5\,|\,1{,}5\,|\,h)$ und liegt auch auf der Geraden g.
Berechnen Sie die Höhe h des Gartenhauses.
[Zur Kontrolle: $S(0{,}5\,|\,1{,}5\,|\,2{,}6)$]

b) Die Firstkanten des Daches sind die vier Kanten der Pyramide, die sich im Punkt S treffen.
Berechnen Sie die Länge einer Firstkante und die Größe des Winkels, den zwei benachbarte Firstkanten an der Spitze S einschließen.

c) Das Dach soll mit Dachziegeln gedeckt werden. Ein Paket Dachziegel reicht für 3,1 m^2 Dachfläche.
Untersuchen Sie, ob drei Pakete ausreichend sind, um das gesamte Dach zu decken.

d) Zu einer bestimmten Tageszeit fällt das Sonnenlicht parallel zur Dachkante $\overline{D_1S}$ ein und erzeugt von D_1 und S einen gemeinsamen Schattenpunkt S_1 und von D_2 einen Schattenpunkt S_2 in der x-y-Ebene.
Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Schattenpunkte.
Weisen Sie nach, dass die Schattenlinie $\overline{S_1S_2}$ parallel zur Dachkante $\overline{D_1D_2}$ verläuft.

e) Wählen Sie zwei geeignete Eckpunkte des Daches so aus, dass deren Schattenlinie senkrecht zu $\overline{S_1S_2}$ verläuft. Begründen Sie Ihre Wahl.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	9	6	5	6	4	30

Aufgabe 3.1: Kartenspiel CAS

Hinweis: Die vereinfachte Bezeichnung „Spieler“ wird im Sinne von „Spielerin oder Spieler“ verwendet, dies gilt auch für „Spielpartner“ „Gewinner“ und „Zweiter“.

Nina und Tom treffen sich zu einem Spiel mit 32 Karten. 16 der 32 Karten zeigen auf einer Seite die Farbe Rot, die anderen 16 zeigen die Farbe Schwarz. Anhand ihrer Rückseiten sind die Karten nicht zu unterscheiden.

a) Zunächst mischt Nina und nimmt 3 Karten vom Stapel, in dem die 32 Karten verdeckt liegen.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die 3 Karten die gleiche Farbe haben.

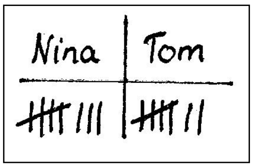
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens eine rote Karte unter den 3 gezogenen Karten ist.

Alle 32 Karten werden neu gemischt, das Spiel beginnt. Das Spiel besteht aus n Runden.
In jeder Runde zieht ein Spieler eine Karte, deckt sie auf und steckt sie wieder in den Stapel.
Zieht der Spielpartner danach die gleiche Farbe, hat er die erste Runde gewonnen.
Nach jeder Runde wird die Reihenfolge der Ziehenden gewechselt.

b) Begründen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
   E: „Wer zuerst zieht, gewinnt die Runde“ gilt: $P(E) = 0{,}5$.

c) Es werden 10 Runden gespielt.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
   A: Nina gewinnt die ersten 3 Runden.
   B: Nina gewinnt mindestens 5 der 10 Runden.
   C: Nina gewinnt die erste Runde und von den restlichen neun noch genau 5.

Nachdem Nina und Tom 15 Runden gespielt haben, sieht der Zettel mit den Ergebnissen wie abgebildet aus. Sie beschließen, noch genau 5 Runden zu machen. Wer dann mehr als die Hälfte der 20 Runden gewonnen hat, ist Gewinner des Spiels.



d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Tom noch genau 4 der 5 Runden gewinnt.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Nina das Spiel gewinnt.

e) Am nächsten Tag wird das Spiel verändert. Nun wird eine Karte gezogen und offen auf den Tisch gelegt. Wer als Zweiter zieht und eine Karte derselben Farbe gezogen hat, der hat die Runde gewonnen. Andernfalls hat gewonnen, wer die erste Karte gezogen hat.
   Das Spiel besteht aus m Runden.
   Untersuchen Sie anhand geeigneter Rechnung, für welche Anzahlen m der Runden diese Spielvariante fair ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	3	10	7	4	30

Aufgabe 3.2: Smartphones CAS

Smartphones sind mit unterschiedlichen Betriebssystemen ausgestattet.
In Deutschland nutzen von den Smartphone-Besitzern
70 % das Betriebssystem A,
20 % das Betriebssystem B,
10 % andere Betriebssysteme.
Im Folgenden werden entsprechend die Bezeichnungen A-Phone und B-Phone verwendet.

In einer Straßenbahn sitzen 20 Personen. Jede dieser Personen besitzt genau ein Smartphone.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

E_1: Genau 12 von ihnen besitzen ein A-Phone.

E_2: Weniger als 2 von ihnen besitzen ein B-Phone.

E_3: Jede der 20 Personen besitzt entweder ein A-Phone oder ein B-Phone.

Tatsächlich sitzen in der Straßenbahn genau 14 Personen, die ein A-Phone besitzen.
Vier der 20 Personen steigen aus.

b) Es gibt N Möglichkeiten dafür, welche 4 von den 20 Personen ausgestiegen sind.
Bestimmen Sie unabhängig von der Art der Smartphones diese Anzahl N.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

E_4: Die ersten beiden Aussteigenden besitzen ein A-Phone, der dritte nicht.

E_5: Der erste Aussteigende besitzt ein A-Phone und von den anderen 3 noch genau einer.

E_6: Von den 16 Personen, die in der Straßenbahn geblieben sind, besitzen genau 11 ein A-Phone.

In einem Kursprojekt sollen Schülerinnen und Schüler die Verbreitung unterschiedlicher Betriebssysteme in Deutschland untersuchen. Sie befragen Personen nach der Art des Betriebssystems, welches Sie in ihrem Smartphone nutzen.

d) Berechnen Sie, wie viele Personen mindestens befragt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens einen B-Phone-Nutzer zu finden.

e) An einer Haltestelle warten n Personen, die alle ein Smartphone besitzen.
Ein Schüler behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Wartenden ein A- oder ein B-Phone nutzen, mindestens 50 % beträgt.

Untersuchen Sie, für welche Anzahlen n diese Behauptung zutrifft.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	9	2	11	4	4	30