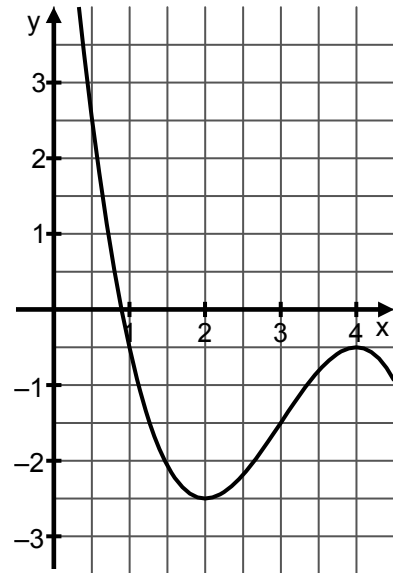


Aufgaben zur hilfsmittelfreien Bearbeitung

A Analysis

1. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen der Funktion f mit
 $f(x) = -0,5 \cdot x^3 + 4,5 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 7,5; (x \in \mathbb{R})$.

- a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Gleichung $0 = -0,5 \cdot x^3 + 4,5 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 7,5$ nur genau eine Lösung hat.
- b) Bestimmen Sie näherungsweise aus dem Graphen die Koordinaten des Wendepunktes von f .

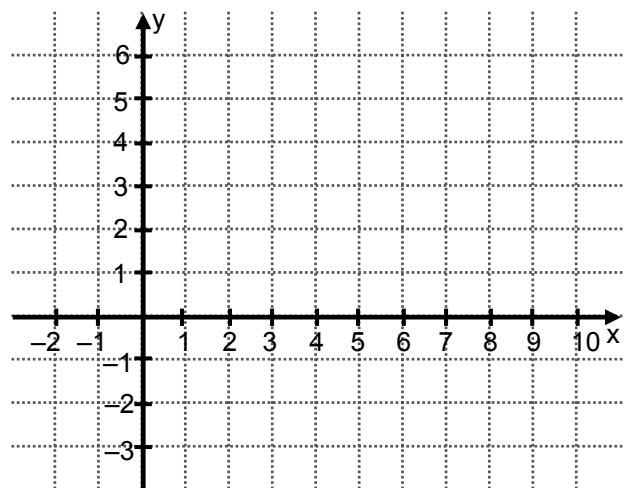


2. Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f , wobei folgende Eigenschaften deutlich werden sollen:

$$f(3) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2;$$

f ist an der Stelle $x = 2$ nicht definiert.



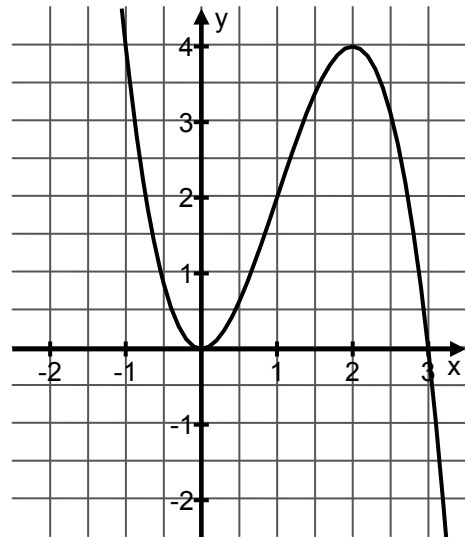
3. Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = e^{x^2}$; ($x \in \mathbb{R}$). Zeigen Sie, dass die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $P(1|f(1))$ durch die Gleichung $t(x) = 2 \cdot e \cdot x - e$ beschrieben werden kann.

4. Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = -(x - 2)^2 + 4$; ($x \in \mathbb{R}$).
Geben Sie die Anzahl der Nullstellen an und begründen Sie Ihre Entscheidung.

5. Die Funktion f mit dem Graphen G hat die Gleichung $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 10$; ($x \in \mathbb{R}$).
Berechnen Sie den Anstieg von G im Punkt $P(2|f(2))$.
Geben Sie die Gleichung der waagerechten Tangente an den Graphen G an.

6. Im Koordinatensystem ist der Graph der Funktion $f(x) = -x^3 + 5x - 1$ oder der Funktion $g(x) = -x^3 + 3x^2$ dargestellt.

- a) Geben Sie an, welche der beiden Funktionen dargestellt ist. Begründen Sie.
- b) Skizzieren Sie den Verlauf der Ableitungsfunktion zu der dargestellten Funktion in dasselbe Koordinatensystem.



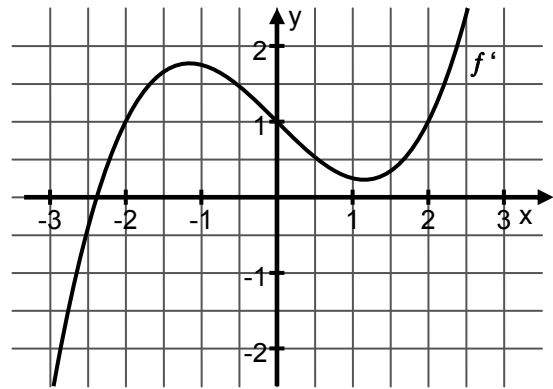
7. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2 + b \cdot x + c$ hat im Punkt $P(3|2)$ den Anstieg $m = 1$. Berechnen Sie die Werte für die Parameter b und c .

8. Begründen Sie, dass der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^4 + 5x^2$; ($x \in \mathbb{R}$) keinen Wendepunkt besitzt.

9. Dargestellt ist der Graph der 1. Ableitung einer Funktion f .

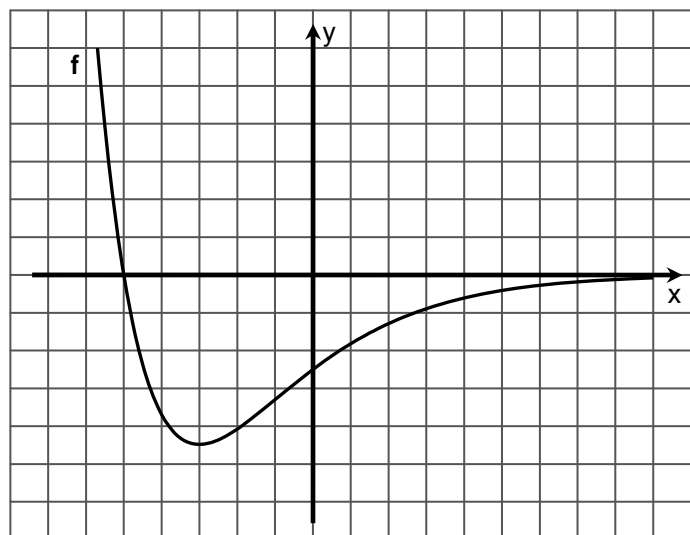
Welche Aussagen über die Funktion f treffen im dargestellten Intervall zu?

- Die Funktion f ist im dargestellten Intervall streng monoton steigend.
- Die Funktion f besitzt zwei Wendepunkte.
- Die Funktion f besitzt einen lokalen Hochpunkt.
- Die Funktion f besitzt einen lokalen Tiefpunkt.
- Die Funktion f besitzt genau zwei lokale Extrempunkte.



10. Skizzieren Sie zum vorgegebenen Graphen einer Funktion f in dasselbe Koordinatensystem den Graphen einer zugehörigen Stammfunktion F im dargestellten Intervall.

Begründen Sie Ihre Darstellung des Graphen von F mit einem charakteristischen Zusammenhang zwischen den Graphen von f und F .



11. In den nachfolgenden Aufgaben ist von den fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das entsprechende Feld jeweils an.

a) Eine Gerade besitzt den Anstieg $-\frac{5}{2}$. Jede Senkrechte zu dieser Geraden hat den Anstieg:

- | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\frac{1}{2}$ | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{5}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{5}$ |

b) Welcher der angegebenen Terme beschreibt die erste Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = e^{2x}$, ($x \in \mathbb{R}$)?

- | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $2 \cdot x \cdot e^{2x}$ | $2 \cdot e^{2x}$ | e^2 | $x \cdot e^{2x}$ | e^{2x} |

c) Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung $\frac{1}{2} \cdot x \cdot (x^2 - 1) = 0$; ($x \in \mathbb{R}$)?

- | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

d) Der Anstieg m der Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{2} \cdot e^{2x}$; ($x \in \mathbb{R}$), an der Stelle $x = 1$ beträgt:

- | | | | | |
|--------------------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $m = 3 \cdot e^2$ | $m = \frac{3}{2} \cdot e^2$ | $m = \frac{3}{4} \cdot e^2$ | $m = \frac{3}{2} \cdot e$ | $m = 3 \cdot e$ |

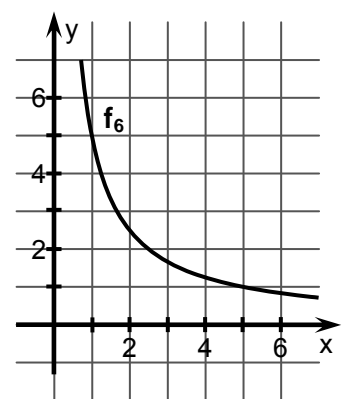
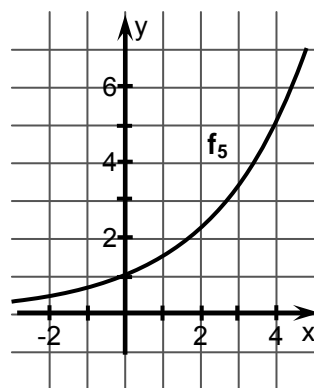
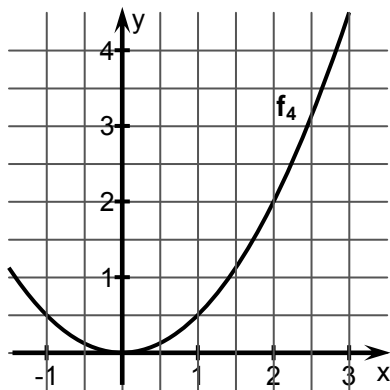
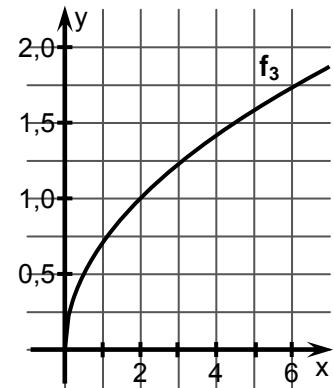
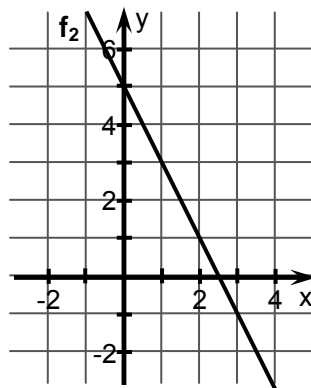
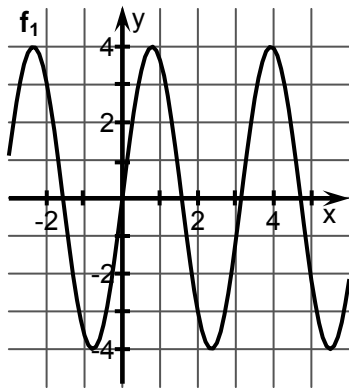
e) An den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{20}{3}x^3 + 65 \cdot x$; ($x \in \mathbb{R}$), existieren Tangenten mit dem Anstieg $m = 1$. Wie viele Tangenten sind das?

- | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

12. Ordnen Sie den nachstehend abgebildeten Graphen ($f_1 - f_6$) eine der folgenden Funktionsgleichungen (a – i) zu. Beachten Sie: Jedem Graphen lässt sich eine der Gleichungen zuordnen aber nicht zu jeder Funktionsgleichung ist ein Graph dargestellt.

a) $y = \frac{5}{x}$ b) $y = 0,5^x$ c) $y = 2 \cdot x + 5$ d) $y = 1,5^x$ e) $y = 5 - 2 \cdot x$

f) $y = 0,2 \cdot x^5$ g) $y = 0,5 \cdot x^2$ h) $y = \sqrt{0,5 \cdot x}$ i) $y = 4 \cdot \sin(2x)$



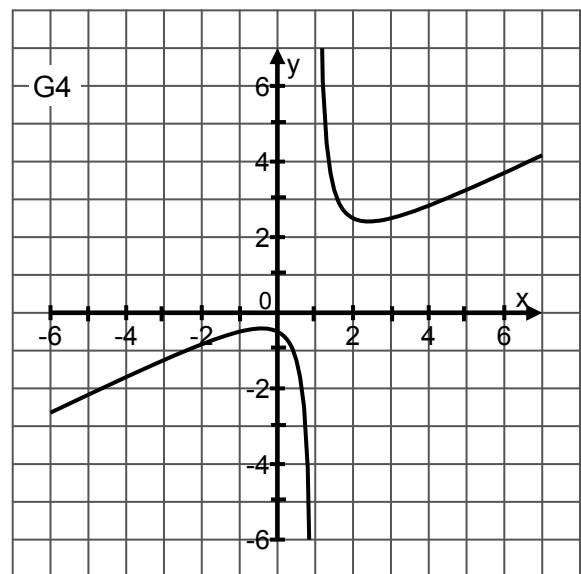
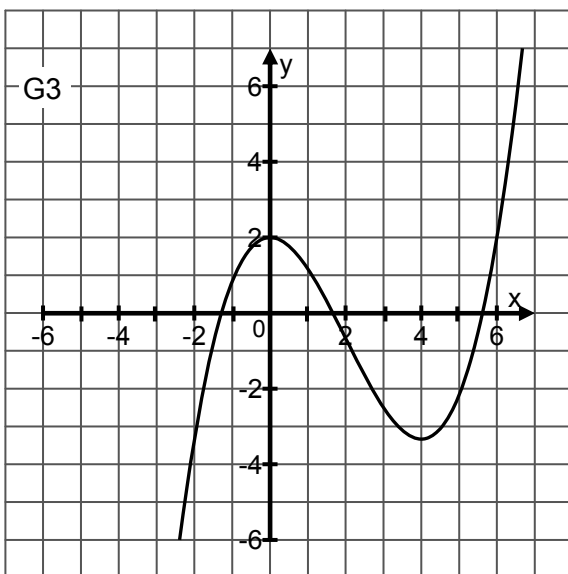
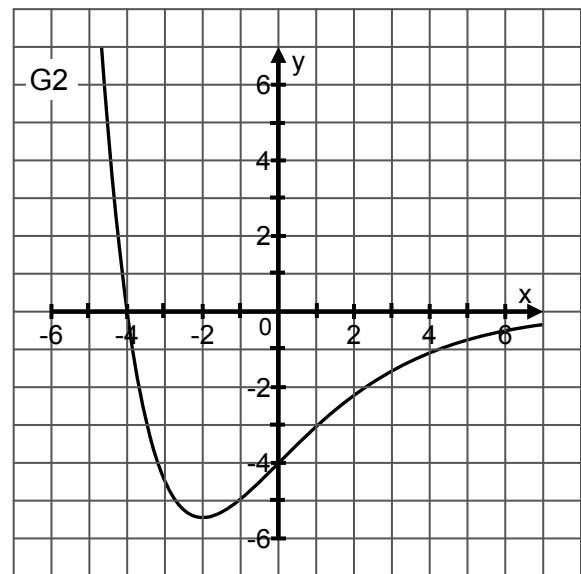
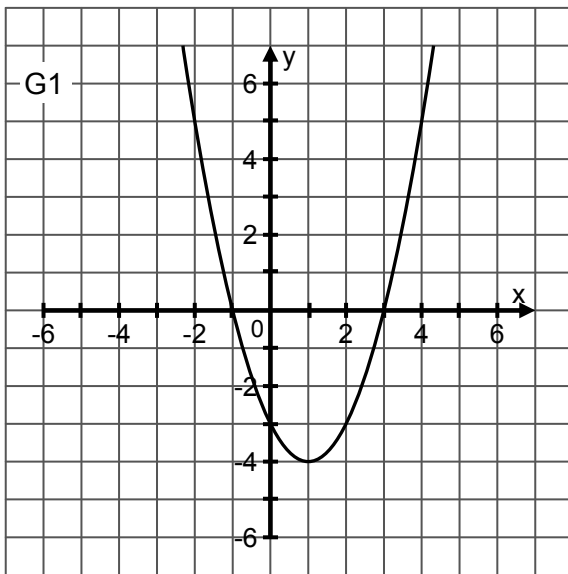
13.

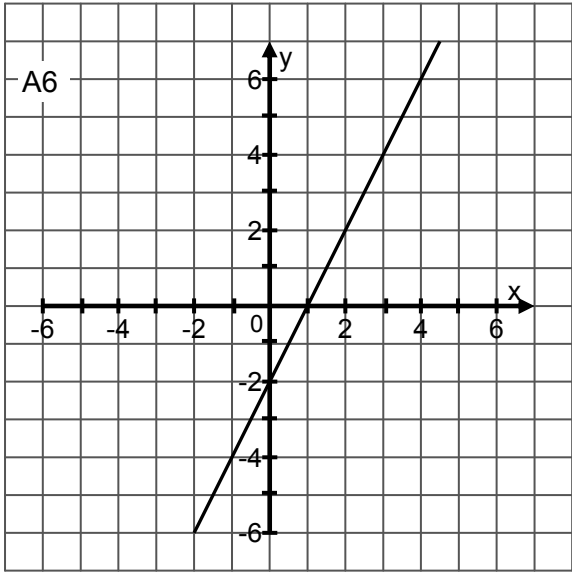
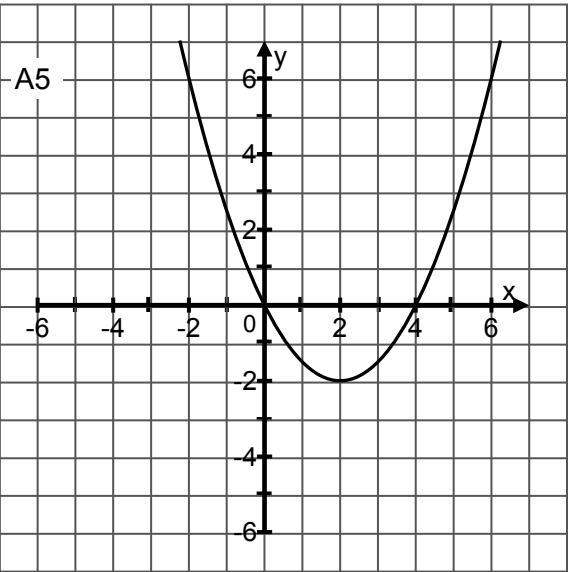
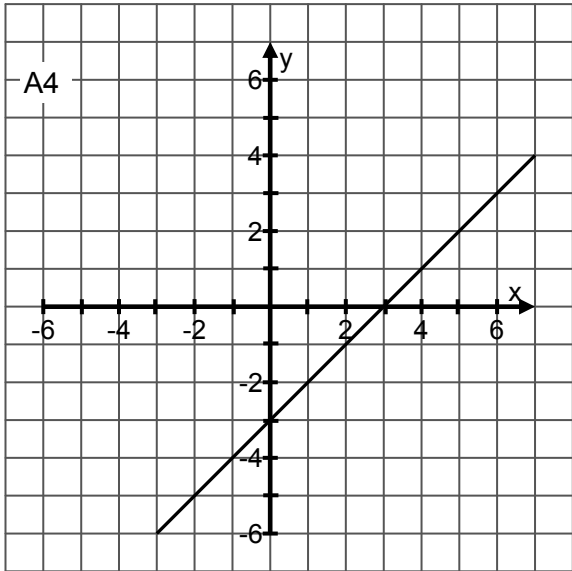
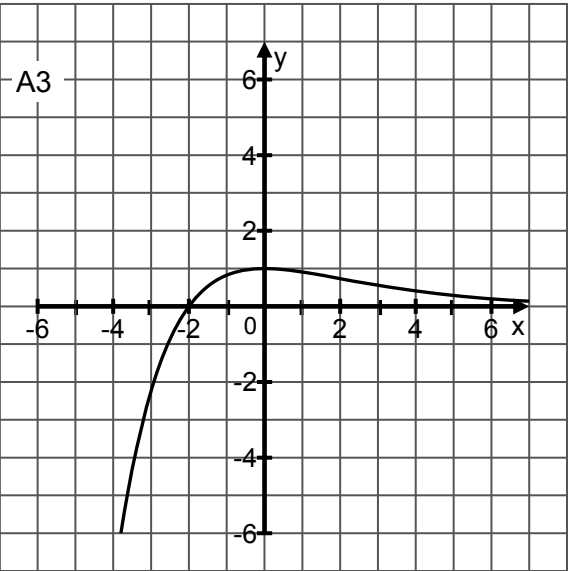
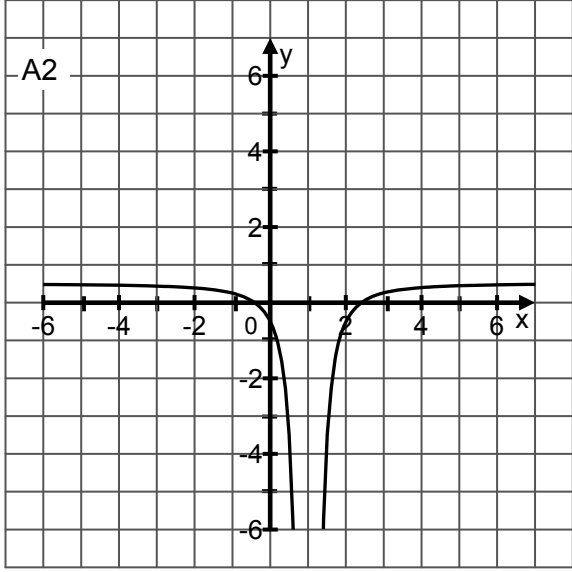
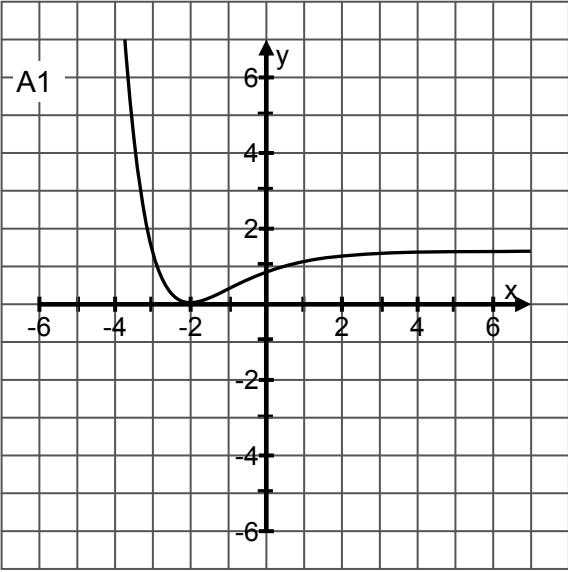
Aufgabe

In den Abbildungen G1 – G4 sind Graphen von Funktionen dargestellt.

In den Abbildungen A1 – A6 sind die Graphen möglicher zugehöriger Ableitungsfunktionen (1. Ableitung) dargestellt.

Ordnen Sie jedem Graphen aus {G1; G2; G3; G4} einen passenden Graphen aus {A1; A2; A3; A4; A5; A6} zu.

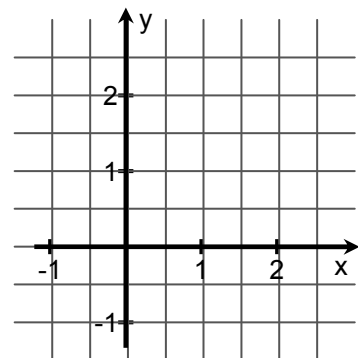




14. Berechnen Sie $\int_0^2 (x + 5) dx$.

15. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -2x^2 + 18$; ($x \in \mathbb{R}$), schließt mit der x -Achse eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

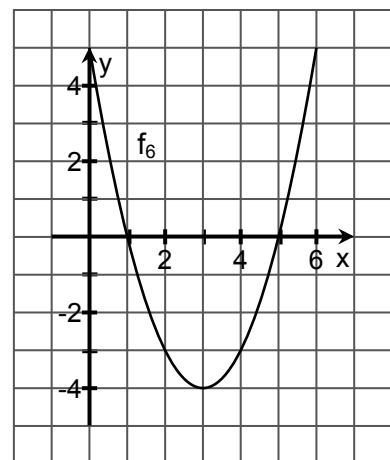
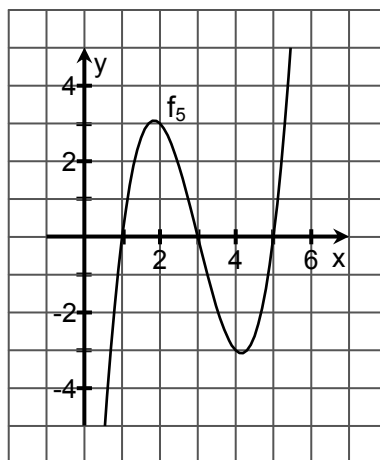
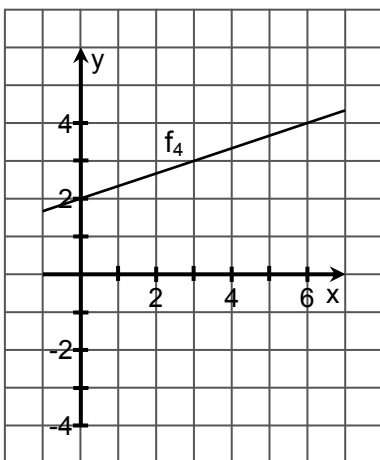
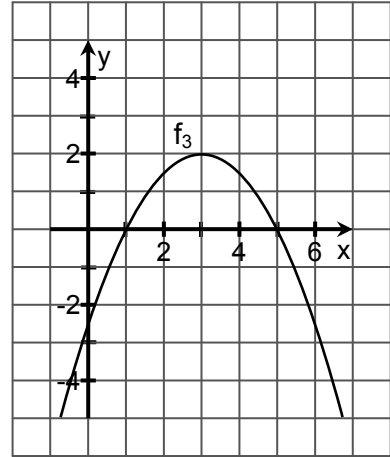
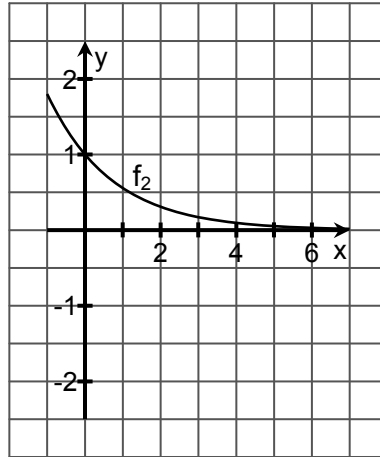
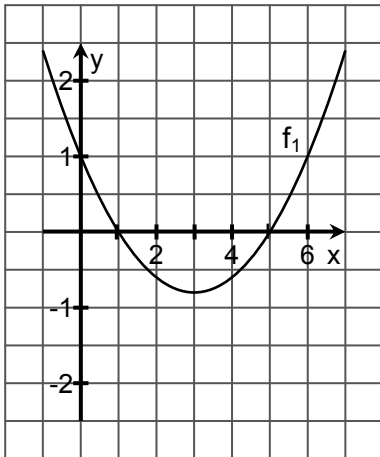
16. Das Quadrat ABCD mit $A(0|0)$, $B(2|0)$, $C(2|2)$ und $D(0|2)$ wird durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; ($x \in \mathbb{R}$), in zwei Teile zerlegt. Stellen Sie den Sachverhalt im Koordinatensystem dar. Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.



17. Ordnen Sie die dargestellten Funktionsgraphen $f_1 - f_6$ je einem der im Folgenden beschriebenen Integrale (A – H) zu. Zwei Integrale bleiben übrig.

A: $\int_1^5 f_i(x) dx = -\infty$; **B:** $\int_1^5 f_i(x) dx = -10,33$; **C:** $\int_1^5 f_i(x) dx = -2,13$; **D:** $\int_1^5 f_i(x) dx = 0$

E: $\int_1^5 f_i(x) dx = 0,86$; **F:** $\int_1^5 f_i(x) dx = 5,33$; **G:** $\int_1^5 f_i(x) dx = 12,0$; **H:** $\int_1^5 f_i(x) dx = \infty$



4. Geben Sie jeweils die Koordinaten der im Folgenden beschriebenen Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem an, die nicht im Koordinatenursprung liegen:

- a) ein Punkt in der y-z-Ebene,
- b) ein Punkt der z-Achse,
- c) ein Punkt, der von der x-z-Ebene den Abstand 2 LE hat.

5. Gegeben ist eine Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze S. In einem kartesischen Koordinatensystem haben deren Eckpunkte die Koordinaten $A(5|1|3)$, $B(9|4|3)$, $C(8|-3|3)$ und $S(1|5|-1)$.

- a) Weisen Sie nach, dass die Grundfläche ABC ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck ist.
- b) Geben Sie die spezielle Lage der Grundfläche ABC im Koordinatensystem sowie die Höhe h der Pyramide an.

6. Die Punkte $A(1|2|0)$, $B(1|1|0)$ und $C(5|1|0)$ sind Eckpunkte eines Rechtecks ABCD. Der Punkt S ist die Spitze einer geraden Pyramide mit dem Rechteck ABCD als Grundfläche und der Höhe $h = 7$.

Eine mögliche Spitze der Pyramide hat die Koordinaten:

- | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $S(3 -0,5 7)$ | $S(3 1,5 7)$ | $S(10 8,5 7)$ | $S(2 -0,5 0)$ | $S(2 -0,5 -7)$ |

7. In einem kartesischen Koordinatensystem wird ein Quader ABCDEFGH beschrieben durch $A(5|3|-3)$, $B(9|7|-1)$, $C(10|5|1)$, $D(6|1|-1)$, $E(3|4|-1)$, $F(7|8|1)$, $G(8|6|3)$.

Die Kanten werden durch die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ beschrieben.

- a) Stellen Sie den Quader in einem kartesischen Koordinatensystem dar und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes H.
- b) Weisen Sie die Rechtwinkligkeit von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} nach.
- c) M ist Mittelpunkt der Grundfläche ABCD.
Geben Sie \overrightarrow{AM} als Linearkombination aus \vec{a} und \vec{b} an.
Geben Sie die Koordinaten von M an.
- d) Z ist Mittelpunkt des Quaders ABCDEFGH.
Geben Sie \overrightarrow{DZ} als Linearkombination aus \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} an.
Bestimmen Sie die Koordinaten von Z.

8. Gegeben sind die Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie jeweils einen der Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} oder \vec{e} an, der:

- a) parallel zu \vec{x} ist,
- b) senkrecht zu \vec{x} ist,
- c) den gleichen Betrag wie \vec{x} hat.

9. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2k \\ k-7 \\ 8 \end{pmatrix}; (k \in \mathfrak{R})$.

- Gibt es Werte für k, so dass gilt: \vec{a} ist parallel zu \vec{b} ? Geben Sie diese Werte ggf. an.
- Gibt es Werte für k, so dass gilt: \vec{a} ist senkrecht zu \vec{b} ? Geben Sie diese Werte ggf. an.

10. Die Geraden g und h werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (s \in \mathfrak{R}) \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; (t \in \mathfrak{R}).$$

Welche der nachfolgenden Aussagen bezüglich der Lagebeziehung der beiden Geraden g und h ist wahr? Kreuzen Sie an.

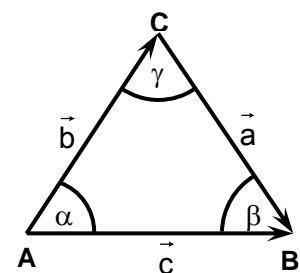
Die Geraden g und h

- | | | | | |
|--------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| verlaufen
parallel | schneiden sich
senkrecht | schneiden sich
nicht senkrecht | verlaufen
windschief | sind
identisch |

11. Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Eckpunkten A(6|2|-4), B

und C sowie mit den Vektoren $\vec{CB} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ z+4 \end{pmatrix}; z \in \mathfrak{R};$

$\vec{AC} = \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{AB} = \vec{c}$.



- a) Geben Sie den Wert für den Parameter z so an, dass $\gamma = 90^\circ$ ist.
- b) Prüfen Sie, ob Punkt P(6|5|2) auf der Seite \overline{AB} liegen kann.

12. Gegeben sind die Punkte $A(1|-1|0)$, $B(-5|5|6)$ und $C(-3|3|-4)$. Die Gerade g_{AB} verläuft durch die Punkte A und B.

a) Welche der folgenden Aussagen zur Lage des Punktes C ist richtig?

- C liegt auf der Strecke \overline{AB} . C liegt auf g_{AB} . C liegt nicht auf g_{AB} .

b) Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, die zu g_{AB} senkrecht verläuft.

c) Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, die g_{AB} enthält.

13. Gegeben sind die Ebene $E: x + y = 4$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; (t \in \mathbb{R})$.

a) Beschreiben Sie die besondere Lage von E im kartesischen Koordinatensystem.

b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

14. Gegeben sind die Ebene $E_1: 6 \cdot x - y - 4 \cdot z = 12$ und $E_2: -3 \cdot x + 5 \cdot y + 2 \cdot z = -6$.

a) Begründen Sie, dass die Ebenen E_1 und E_2 nicht identisch sind.

b) In der Gleichung von E_2 soll genau ein Koeffizient so geändert werden, dass anschließend E_1 und E_2 identisch sind.

Geben Sie diese Änderung an und begründen Sie Ihre Lösung.

c) Geben Sie eine Ebene E_3 an, die parallel zu E_1 durch den Koordinatenursprung verläuft.

15. Gegeben sind die Ebene $E: 2x + y - z = 0$ und der Punkt $P(7|4|0)$.

- a) Zeigen Sie, dass Punkt P nicht in der Ebene E liegt.
- b) Beschreiben Sie die besondere Lage von P im Koordinatensystem.
- c) P wird an der y - z -Koordinatenebene gespiegelt. Geben Sie die Koordinaten des so entstehenden Spiegelpunktes P' an.

d) Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist die Lotgerade von P auf E .

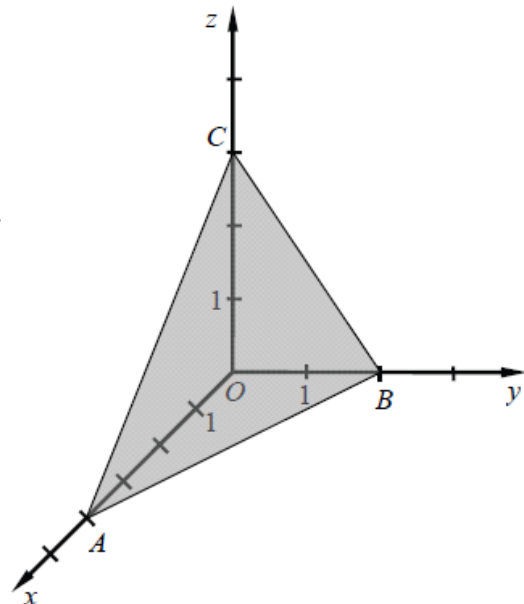
Bestimmen Sie den Lotfußpunkt F in der Ebene E .

e) Weisen Sie nach, dass der Punkt $Q(-5|-2|6)$ der Spiegelpunkt von P an der Ebene E ist.

16. In der Abbildung ist ein Teil der Ebene E , die durch die Punkte A , B und C eindeutig bestimmt ist, in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt.

Die Punkte A , B und C liegen auf den Koordinatenachsen und besitzen jeweils ganzzahlige Koordinaten.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E .



C Stochastik

1. Ein Kartenspiel hat folgende Karten (Motive): 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, As. Jedes Motiv ist jeweils in den Farben Rot (Herz und Karo) und auch in den Farben Schwarz (Kreuz und Pik) vorhanden. Es gibt somit 32 verschiedene Spielkarten.

Aus solch einem Kartenspiel wird nun eine Karte gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Karte:

- A) eine Dame oder ein König?
 - B) schwarz oder eine Zahl?
 - C) rot oder schwarz?
 - D) rot oder Karo?
 - E) keine rote Zahl?
 - F) ein roter Bube?
 - G) rot und schwarz?
 - H) ein Bild (Bube, Dame, König, Ass) oder Kreuz?
2. Bei einer Meinungsumfrage zur Rauchgewohnheit wurden die Daten von 55 Frauen und 45 Männern erfasst. Insgesamt sind 65 dieser befragten Personen Raucher, unter ihnen 35 Frauen.
- a) Wie viele der befragten Männer rauchen nicht?
 - b) Berechnen Sie den relativen Anteil der weiblichen Nichtraucher unter den beiden Geschlechtern.

3. Beim Handball treffen Max mit 40 % Wahrscheinlichkeit und Moritz mit 70 % Wahrscheinlichkeit ins Tor. Sie werfen nacheinander.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zusammen

- A) keinen Treffer, B) einen Treffer, C) zwei Treffer erzielen?

- 4.1) In einer Urne befinden sich 3 schwarze, 4 grüne und eine unbekannte Anzahl (n) weiße Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen beträgt 0,5.

Wie viele weiße Kugeln sind enthalten?

- 4.2) Hans zieht aus einer Urne mit 5 roten, 3 grünen und 2 blauen Kugeln ohne Zurücklegen zwei Kugeln.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er dabei nur rote Kugeln?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Hans bei seinem zweiten Zug eine blaue Kugel aus der Urne holt?

- 5.1) Susi hat die Geheimnummer ihres fünfstelligen Zahlenschlosses für ihr Fahrrad vergessen. Sie kann sich nur noch daran erinnern, dass jede Ziffer nur einmal vorkommt und jede größer als 4 ist.

Berechnen Sie, wie viele Zahlenkombinationen dieser Art es gibt.

- 5.2) Auf einem vierstelligen Zahlenschloss sind pro Stelle die Ziffern 0 – 9 wählbar.

Wie viele Zahlenkombinationen sind möglich, wenn keine weiteren Informationen vorliegen?

$4 \cdot 10$

10^4

4^{10}

$4!$

$10!$

6. Aus einer Gruppe von 5 Schülern, 4 Lehrerinnen und 5 Lehrern sollen zwei Schüler, eine Lehrerin und ein Lehrer für einen Ausschuss gewählt werden. Wie viele unterschiedliche Zusammensetzungen für diesen Ausschuss sind theoretisch möglich?
7. Peter spielt Monopoly. Dabei wird mit zwei Würfeln gewürfelt. Beim nächsten Wurf will Peter unbedingt eine Augenzahl von 8 oder mehr erzielen. Er schummelt etwas, so dass einer der Würfel mit Sicherheit eine 5 zeigt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peter mindestens die Augensumme 8 erzielen wird?
8. Eine Firma fertigt Radios in drei verschiedenen Städten. In der Stadt A werden 20 % ihrer Waren hergestellt, in der Stadt B 30 % und der Rest in der Stadt C. Leider passieren auch Produktionsfehler. So sind 10 % der Geräte aus A, 1 % der Geräte aus B und 5 % der Geräte aus C fehlerhaft.
- a) Ein Prüfer wählt aus der Gesamtproduktion zufällig ein Gerät aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es fehlerhaft?
- b) Der Firmenchef wählt aus der Gesamtproduktion ein offensichtlich fehlerhaftes Gerät aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es in der Stadt A hergestellt worden?
Beschreiben Sie den Lösungsansatz.
9. Eine Münze wird dreimal geworfen. Zeichnen Sie das Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
- A: Mehr als zweimal Wappen, B: Höchstens zweimal Wappen,
C: Mindestens einmal Zahl, D: Genau einmal Wappen.

- 10.** Ein Test besteht aus vier Fragen. Zu jeder der vier Fragen gibt es drei Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils nur eine richtig ist. Der Test gilt als bestanden, wenn mindestens drei der Fragen richtig beantwortet wurden.

Jemand absolviert diesen Test völlig unvorbereitet und kreuzt mit Hoffnung auf Glück an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er diesen Test besteht?

- 11.** Eine Reisegruppe von fünf Personen macht am letzten Tag ihres Urlaubs auf der Insel Usedom einen Abstecher in den polnischen Teil der Insel. Sie kaufen dort u. a. preiswert Zigaretten ein. Zwei der Reisenden haben dabei die erlaubte Höchstmenge überschritten und gelten somit als Schmuggler. Auf der Rückfahrt kontrollieren Zollbeamte die Reisegruppe. Sie wählen zwei der fünf Personen zwecks Durchsuchung aus.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ertappen die Beamten keinen Schmuggler?
 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mindestens einer der beiden Schmuggler ertappt?

- 12.1** In einer Studie wurde ein Medikament getestet. Die Ergebnisse sind in der Tabelle dargestellt. Dabei bedeuten:

M: Medikament genommen

\bar{M} : Placebo genommen

G: gesund geworden

\bar{G} : nicht gesund geworden

	G	\bar{G}	Summe
M	6 000	300	6 300
\bar{M}	400	3300	3 700
Summe	6 400	3 600	10 000

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zu gesunden, bei einer Person, von der man weiß, dass sie das Medikament genommen hat?
 b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nicht zu gesunden, bei einer Person, von der man weiß, dass sie das Placebo genommen hat?

- 12.2** In einer Gruppe von 900 Personen haben sich 600 prophylaktisch gegen Grippe impfen lassen. Nach einer bestimmten Zeit wurde jedes Gruppenmitglied danach befragt, wer an einer Grippe erkrankte.

Die Ergebnisse sind in einer Vierfeldertafel dargestellt.

Das Ereignis A sei „Person ist geimpft“ und das Ereignis B: „Person erkrankte“.

Gruppe	B	\bar{B}	Summe
A	60	540	600
\bar{A}	120	180	300
Summe	180	720	900

Berechnen Sie:

$$P(A), \quad P(B), \quad P(A \cap B), \quad P_A(B), \quad P_B(A), \quad P(\bar{A} \cap B), \quad P_{\bar{A}}(B)$$

- 13.** Bei welchen der folgenden Zufallsexperimente handelt es sich um BERNOULLI-Ketten? Geben Sie, wenn möglich, die Trefferwahrscheinlichkeiten p und die Längen n der BERNOULLI-Ketten an.
- A** - Ein Würfel wird dreimal geworfen und die Anzahl der Sechsen notiert.
 - B** - Ein Würfel wird dreimal geworfen und die Augensumme notiert.
 - C** - Aus einer Urne mit drei weißen und sieben roten Kugeln wird so lange ohne Zurücklegen gezogen, bis die erste rote Kugel erscheint.
 - D** - Aus einer Urne mit drei weißen und sieben roten Kugeln wird viermal, mit Zurücklegen, jeweils eine Kugel gezogen.
 - E** - Bei einem Glücksrad erscheint in 50 % aller Fälle eine „1“, in 25 % der Fälle eine „2“ und in 25 % der Fälle eine „3“. Das Rad wird viermal gedreht und die Ziffern als vierstellige Zahl notiert.
 - F** - Das Glücksrad aus **E** wird achtmal gedreht. Jedes Mal, wenn die „3“ erscheint, erhält man 10 Cent.
 - G** - Das Glücksrad aus **E** wird so oft gedreht, bis die „3“ erscheint, höchstens jedoch fünfmal.

14. Ein Glücksrad hat drei gleich große Sektoren mit den Symbolen *Kreis*, *Kreuz* und *Stern*. Es wird viermal gedreht und das Ergebnis registriert. Die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse sollen berechnet werden:

- A:** Es tritt dreimal Stern auf. **B:** Es tritt mindestens dreimal Stern auf.
C: Es tritt höchstens einmal Stern auf. **D:** Es tritt höchstens zweimal Stern auf.

Ordnen Sie den Ereignissen je einen der vorgeschlagenen Lösungswege zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten zu.

<input type="checkbox"/> ____ $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4$	<input type="checkbox"/> ____ $4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4$	<input type="checkbox"/> ____ $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^4$
<input type="checkbox"/> ____ $\binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1$	<input type="checkbox"/> ____ $\frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{4}{3}}$	<input type="checkbox"/> ____ $1 - \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \right)$

15. Eine Zufallsgröße X hat die in der Tabelle gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	0	4	8	12	16
$P(X=x_i)$	c	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	d

$c, d \in \mathbb{R}.$

Für welchen Wert für d beträgt der Erwartungswert dieser Zufallsgröße $E(X) = 7$

<input type="checkbox"/> $d = \frac{5}{8}$	<input type="checkbox"/> $d = \frac{1}{8}$	<input type="checkbox"/> $d = 0,1$	<input type="checkbox"/> $d = \frac{1}{8} + c$	<input type="checkbox"/> $d = c$
---	---	---------------------------------------	---	-------------------------------------

- 16.** Die Hälfte aller Studierenden einer Seminargruppe ist höchstens 1,75 m groß, davon sind 60 % Frauen. 60 % aller Studierenden dieser Seminargruppe sind Männer.

Ermitteln Sie den Anteil der Studierenden dieser Seminargruppe, die Männer und zugleich größer als 1,75 m sind

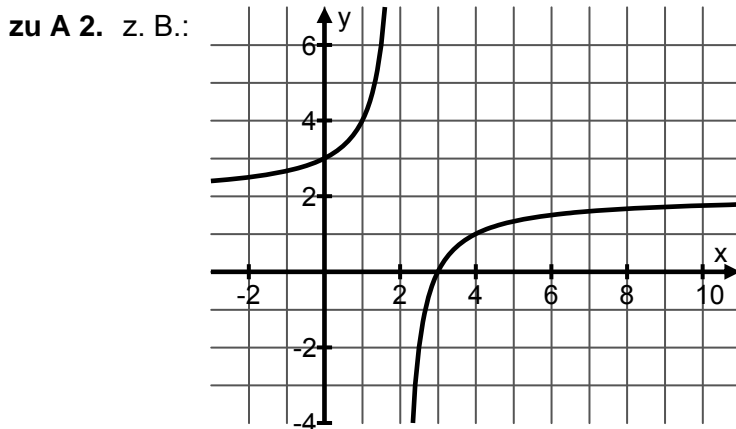
- 17.** Ein idealer Würfel wird genau zweimal geworfen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis: „Es werden zwei Primzahlen oder zwei gleiche Augenzahlen geworfen.“

Lösungen

Zu A – Analysis

zu A 1. $x_0 \approx 0,8$ ist ablesbar. $f(x)$ ist ganzrationale Funktion 3. Grades, demzufolge ist die erste Ableitung eine quadratische Funktion mit höchstens zwei Nullstellen. Daraus folgt, dass $f(x)$ höchstens zwei Extrempunkte haben kann. Beide Extrempunkte sind erkennbar und liegen unterhalb der x-Achse. Da $f(x)$ für $x > 4$ monoton fallend ist und als ganzrationale Funktion keine Unstetigkeit aufweist, kann sie im weiteren Verlauf die x-Achse nicht mehr schneiden.



Dargestellt ist der Graph von

$$f(x) = 2 - \frac{2}{x-2}.$$

zu A 3. $y_P = f(1) = e$, $m_t = f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$, $f'(1) = 2 \cdot e$

→ Die Tangente $y = m \cdot x + n$ hat im Punkt $P(1|e)$ den Anstieg $m = 2e$.

→ Das Einsetzen dieser Angaben in die Geradengleichung ergibt: $e = 2e \cdot 1 + n$.

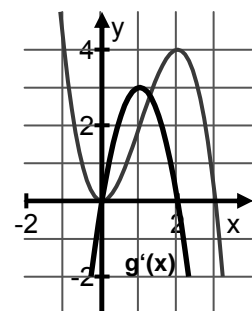
→ Also ist $n = -e$. Somit lautet die Tangentengleichung $y = 2e \cdot x - e$, w.z.b.w..

zu A 4. Die quadratische Funktion hat den Scheitelpunkt $S(2|4)$. Wegen des negativen Vorzeichens vor dem Term x^2 ist der Graph eine nach unten geöffnete Parabel, die wegen der Tatsache, dass der Scheitelpunkt oberhalb der x-Achse liegt, diese zweimal schneiden muss.

zu A 5. $f'(x) = 5 - x$, $m = f'(2) = 3$.

Eine waagerechte Tangente existiert nur an Extrempunkten, d.h. im Falle einer quadratischen Funktion am Scheitelpunkt. Dieser liegt bei $S(5|2,5)$, die konstante Funktion, deren Graph die fragliche waagerechte Tangente ist, hat dementsprechend folgende Gleichung: $y = 2,5$.

zu A 6. Es ist der Graph von $g(x) = -x^3 + 3x^2$ dargestellt, da nur für $g(x)$ gilt: $g(0) = 0$ und mit $g'(x) = -3x \cdot (x-2)$ lässt sich leicht erkennen, dass $g'(0) = g'(2) = 0$. Damit stimmt auch die mögliche Lage der Extrempunkte mit der Abbildung überein.



zu A 7. $y = f(x) = x^2 + bx + c$ $2 = 3^2 + b \cdot 3 + c$
 $m = f'(x) = 2x + b$ $1 = 2 \cdot 3 + b$

Daraus ergibt sich $b = -5$ und $c = 8$.

zu A 8. $f'(x) = 4x^3 + 10x$, $f''(x) = 12x^2 + 10$. Die notwendige Bedingung $f''(x_w) = 0$ ist nicht erfüllbar, da die Gleichung $12 \cdot x^2 + 10 = 0$ keine (reelle) Lösung besitzt.

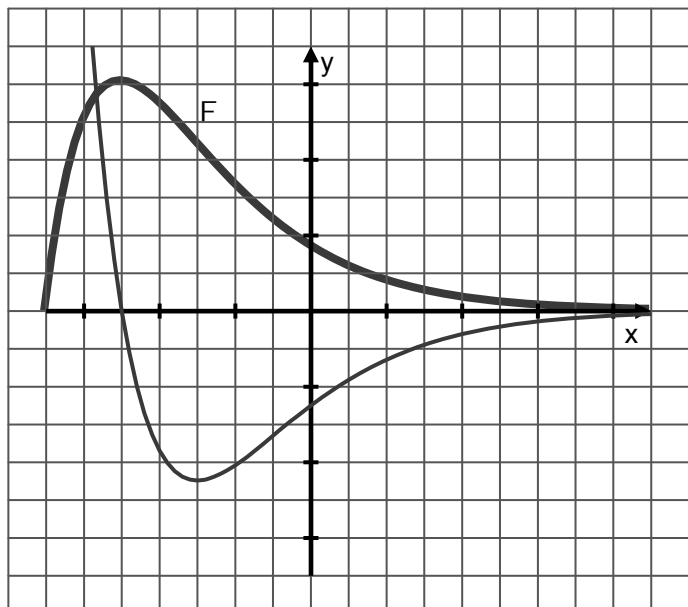
zu A 9. Da f' zwei Extrema besitzt, muss f'' zwei Nullstellen besitzen. Deshalb muss f zwei Wendepunkte besitzen.

Da f' eine Nullstelle x_0 besitzt (die nicht zugleich Extrempunkt von f' ist), muss f einen Extrempunkt haben. Da $f'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) > 0$ für $x > x_0$, muss die Monotonie von f von fallend zu steigend wechseln, es liegt also ein Tiefpunkt vor.

(Ein Beispiel für eine solche Funktion ist $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x$.)

zu A 10. f hat eine Nullstelle bei x_0 , deshalb muss F einen Extrempunkt bei $x = x_0$ besitzen. Der Vorzeichenwechsel für f erfolgt an dieser Stelle von positiv zu negativ, deshalb muss bei F ein Hochpunkt vorliegen. Für alle $x > x_0$ ist $f(x) < 0$, deshalb muss F monoton fallend sein. An der Stelle, an der f einen Tiefpunkt besitzt, muss F einen Wendepunkt besitzen.

(PS: Die Gleichung von f könnte z.B. sein:
 $y = -0,5 \cdot (x+2,5) \cdot e^{-x}$.)



zu A 11. a) $m = \frac{2}{5}$, b) $f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$, c) 3 Lösungen, d) $m = 3 \cdot e^2$, e) 4 Tangenten

zu A 12. $f_1 \rightarrow i)$, $f_2 \rightarrow e)$, $f_3 \rightarrow h)$, $f_4 \rightarrow g)$, $f_5 \rightarrow d)$, $f_6 \rightarrow a)$
 Den Gleichungen b), c) und f) kann keiner der Graphen zugeordnet werden.

zu A 13. $G1 \rightarrow A6$, $G2 \rightarrow A3$, $G3 \rightarrow A5$, $G4 \rightarrow A2$
 Den Ableitungsfunktionen A1 und A4 kann keiner der Funktionsgraphen zugeordnet werden.

zu A 14. $\int_0^2 (x+5)dx = (0,5 \cdot x^2 + 5 \cdot x) \Big|_0^2 = 12$

zu A 15. Die Nullstellen liegen bei $x_{01}=-3$ und $x_{02}=3$. $F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 18x$.

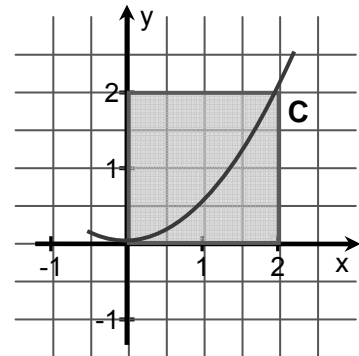
Das Integral von -3 bis 3 , über $f(x)$, nach dx beträgt 72 .

zu A 16. Das Quadrat hat den Flächeninhalt $A_Q = 4$ FE. Es wird durch den Graphen in zwei Teilflächen zerlegt, A_o (oberhalb des Graphen) und A_u (unterhalb des Graphen).

$$A_u = \int_0^2 0,5 \cdot x^2 dx = \frac{4}{3} \text{ FE.}$$

Da $A_o = 4 \text{ FE} - A_u$, ergibt sich: $A_o = \frac{8}{3} \text{ FE}$.

Das Verhältnis der Teilflächen $A_o : A_u = 2 : 1$.



zu A 17. Den Funktionsgraphen $f_1 - f_6$ können die gegebenen Integrale folgendermaßen zugeordnet werden:

$f_1 \rightarrow C, f_2 \rightarrow E, f_3 \rightarrow F, f_4 \rightarrow G, f_5 \rightarrow D, f_6 \rightarrow B$

Zu B – Analytische Geometrie

zu B 1. a) Wenn A, B, C auf einer Geraden liegen, dann sind \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{BC} kollinear.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}. \overrightarrow{AB} \neq r \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ nicht kollinear zu } \overrightarrow{BC}.$$

$\Rightarrow A, B, C$ liegen nicht auf einer Geraden.

b) $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ k^2 - 2 \\ k - 4 \end{pmatrix}$. \overrightarrow{AP} und \overrightarrow{AB} müssen kollinear sein, $\overrightarrow{AP} = r \cdot \overrightarrow{AB}$.

$$2 = r \cdot (-1) \quad \Rightarrow r = -2$$

$$k^2 - 2 = -2 \cdot (-1) \quad \Rightarrow k^2 = 4 \quad (k_1 = 2 \text{ oder } k_2 = -2)$$

$$k - 4 = -2 \cdot 1 \quad \Rightarrow k = 2$$

zu B 2. A, B, C bilden ein Dreieck, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen. Wenn A, B, C auf einer Geraden lägen, dann wären \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{BC} kollinear, $\overrightarrow{AB} = r \cdot \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}. \overrightarrow{AB} \neq r \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ nicht kollinear zu } \overrightarrow{BC}.$$

\Rightarrow A,B,C liegen nicht auf einer Geraden \Rightarrow A,B,C bilden ein Dreieck.

zu B 3. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{Parallelogramm oder Rechteck}$$

Rechteck liegt vor, wenn \overrightarrow{AB} rechtwinklig zu $\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -15 - 5 \neq 0 \quad \Rightarrow \text{nicht rechtwinklig}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad M(1|-2|2)$$

$$r = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = 3$$

$$\text{c) } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 16 + 24 - 16 = \underline{\underline{24}}$$

zu B 4. a) $P(0|a|b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

b) $(0|0|c)$ mit $c \in \mathbb{R}$

c) $(d|2|e)$ mit $d, e \in \mathbb{R}$

$$\text{zu B 5. a) } |\overrightarrow{AB}| = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 5 \quad \Rightarrow \text{gleichschenkelig}$$

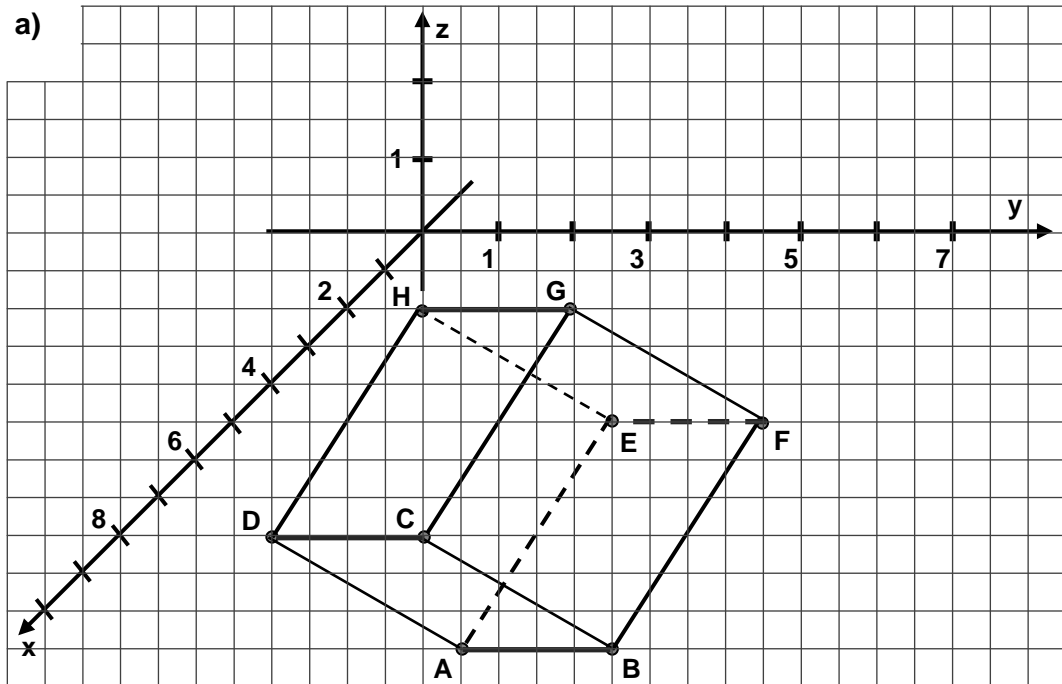
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 - 12 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \text{rechtwinklig}$$

b) Da die z-Komponenten von A, B und C identisch sind liegt die Grundfläche parallel zur x-y-Ebene. Höhe $h = 4$.

zu B 6. ABCD liegt in der x-y-Ebene, ein Punkt mit dem Abstand 7 hat Koordinate $z = 7$ oder $z = -7$. Mittelpunkt des Rechteckes ist $M(3|1,5|0)$.

Somit ist $S(3|1,5|7)$ (zweite Antwortmöglichkeit) die gesuchte Spitze.

zu B 7. a)



Der Punkt H hat die Koordinaten H(4|2|1).

$$\text{b) } \vec{a} = \overline{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overline{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \overline{AE} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 - 8 + 4 = 0; \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = -8 + 4 + 4 = 0; \quad \vec{c} \cdot \vec{b} = -2 - 2 + 4 = 0$$

Die Skalarprodukte der Vektoren sind Null, also sind sie paarweise rechtwinklig.

$$\text{c) } \overline{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}; \quad \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M(7,5 | 4 | -1)$$

$$\text{d) } \overline{DZ} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}; \quad \overline{OZ} = \overline{OD} + \overline{DZ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 \\ 3,5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z(6,5 | 4,5 | 0)$$

zu B 8. a) \vec{a} und \vec{d} sind parallel zu \vec{x} . b) \vec{e} ist senkrecht zu \vec{x} . c) $|\vec{c}| = |\vec{x}|$

$$\text{zu B 9. } r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot k \\ k - 7 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad r = 2 \Rightarrow -4 = k - 7 \Rightarrow k = 3; \quad \text{Probe (x-Koordinate): } 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3, \text{ w. A.}$$

→ Ja, es gibt genau ein k (k = 3), so dass gilt: \vec{a} parallel zu \vec{b} .

$$0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \cdot k \\ k - 7 \\ 8 \end{pmatrix} = 6k - 2k + 14 + 32, \quad 0 = 4k + 46, \dots$$

→ Ja, es gibt genau ein k (k = -11,5), so dass gilt: \vec{a} senkrecht zu \vec{b} .

zu B 10. Die Geraden schneiden sich nicht senkrecht. Begründung: Sie haben offensichtlich den gemeinsamen Punkt $P(5|7|2)$, sind nicht parallel, da ihre Richtungsvektoren nicht kollinear sind und sind nicht senkrecht, da das Skalarprodukt der Richtungsvektoren -8 beträgt und somit nicht Null ist.

zu B 11.a) $\gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ z+4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = -4 - 32 + 6z + 24$$

$$0 = 6z - 12$$

$$z = 2$$

b) $\vec{c} = \vec{AB} = \vec{b} + \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ z+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ z+10 \end{pmatrix}$

Wenn P auf \overline{AB} liegt, dann muss er auf der Geraden $\vec{x} = \overline{OA} + r \cdot \vec{c}$ liegen,

mit $0 \leq r \leq 1$. Prüfung: $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ z+10 \end{pmatrix}$

$$6 = 6$$

$$5 = 2 + 4 \cdot r \quad \Rightarrow r = 0,75$$

$$6 = -4 + 0,75 \cdot (z+10) \quad \Rightarrow z = -2$$

Für $z = -2$ liegt der Punkt P auf der Seite \overline{AB} .

zu B 12.a) Prüfe, ob C auf g_{AB} liegt: $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$,

in Zeile x ergäbe sich $r = \frac{1}{3}$, in Zeile z ergäbe sich $r < 0$. Das ist ein Widerspruch.

C liegt nicht auf g_{AB} .

b) g_{AB} ist zu einer Ebene senkrecht, deren Normalenvektor dem Richtungsvektor

von g_{AB} $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entspricht. Eine solche Ebene ist z. B. $E: -x + y + z = 0$.

c) Stelle Parametergleichung für E auf, die die Bestandteile von g_{AB} enthält, z. B.:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

zu B 13. $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- a) Ebene E ist parallel zur z-Achse und damit senkrecht zur x-y-Ebene.
 b) Da $\vec{n}_E \cdot \vec{r}_g = 0$, ist der Normalenvektor von E senkrecht zur Richtung von g. Damit ist g parallel zu E oder liegt ganz in E.
 Der Punkt (1|3|3) aus g liegt auch in E, da er die Gleichung $x + y = 4$ erfüllt.
 Somit liegt die Gerade g vollständig in E.

zu B 14. a) $\vec{n}_{E1} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{n}_{E2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{n}_{E1} \neq r \cdot \vec{n}_{E2}$

$\Rightarrow E_1$ ist nicht parallel zu E_2 und damit sind sie nicht identisch.

- b) E_2' : $-3 \cdot x + 0,5 \cdot y + 2 \cdot z = -6$, in diesem Fall ist die Gleichung von E_2 das -2 -fache der Gleichung von E_1 , so dass die Ebenen damit identisch sind.
 c) $O(0|0|0)$ muss die Gleichung erfüllen, der Normalenvektor muss gleich bleiben.
 $\Rightarrow E_3: 6 \cdot x - y - 4 \cdot z = 0$.

zu B 15. a) Koordinaten von P in die Gleichung von E einsetzen:

$$2 \cdot 7 + 4 - 0 = 0 \Rightarrow \text{Widerspruch, } 18 \neq 0, P \text{ liegt nicht in E.}$$

b) Für die z-Koordinate von P gilt: $z=0$. Deshalb muss P in der x-y-Ebene liegen.

c) $P'(-7 | 4 | 0)$.

d) Koordinatenweises Einsetzen der Gleichung für g in die Gleichung für E:

$$2 \cdot (7+2r) + (4+r) - (-r) = 0 \Rightarrow r = -3.$$

Einsetzen von $r = -3$ in die Gleichung für g liefert $F(1 | 1 | 3)$.

e) (Verschiedene Lösungsmöglichkeiten.) Wenn Q Spiegelpunkt von P an E ist, dann muss $\vec{PF} = \vec{FQ}$ gelten, da F der Durchstoßpunkt von g durch E ist und $g \perp E$.

$$\vec{PF} = \begin{pmatrix} 1-7 \\ 1-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{FQ} = \begin{pmatrix} -5-1 \\ -2-1 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{PF} = \vec{FQ} \Rightarrow Q \text{ ist Spiegelpunkt ...}$$

zu B 16. Aus den Punkten $A(4|0|0)$, $B(0|2|0)$ und $C(0|0|3)$ lässt sich die

Achsenabschnittsgleichung für E aufstellen: $E: \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1$.

Mit einem der Punkte A, B oder C und zwei der Richtungsvektoren \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{AC} lassen sich auch Parametergleichungen für E bilden.

Zu C – Stochastik

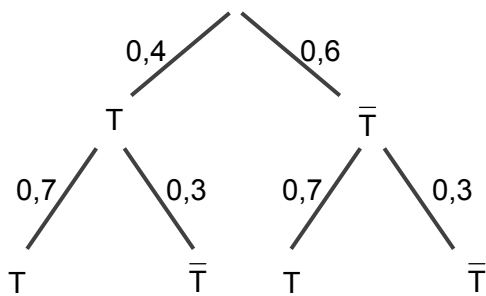
zu C 1. $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$, $P(C) = 1$, $P(D) = \frac{1}{2}$,
 $P(E) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$, $P(F) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$, $P(G) = 0$, $P(H) = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$

zu C 2. Vierfeld-Tafel zu den Vorgaben:
(M = Männer, F = Frauen,
R = Raucher, \bar{R} = Nichtraucher)

	M	F	
R	30	35	65
\bar{R}	15	20	35
	45	55	100

- a) 15 Männer rauchen nicht.
b) 20 % sind weibliche Nichtraucher.

zu C 3. Baumdiagramm:



Lösungen:

$$P(A) = 0,18$$

$$P(B) = 0,54$$

$$P(C) = 0,28$$

zu C 4.1) Es sind 7 weiße Kugeln enthalten.

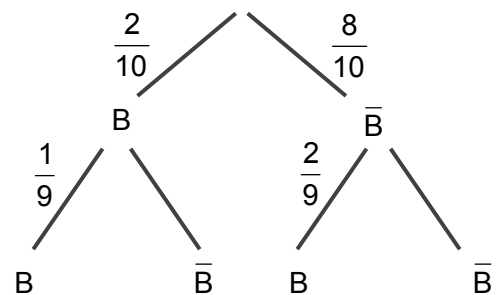
zu C 4.2a) $P(R,R) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$ ($\triangleq 22,2\%$)

zu C 4.2b) Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Kugel blau, 2. Kugel blau und
1. Kugel nichtblau, 2. Kugel blau.

$$P(x,B) = P(B,B) + P(\bar{B},B)$$

$$P(x,B) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$$



Die Wahrscheinlichkeit, beim 2. Zug eine blaue Kugel zu ziehen, beträgt 20 %.

zu C 5.1) Es kommen 5 Ziffern in Frage: 9, 8, 7, 6 und 5 \Rightarrow Anzahl = $5! = 120$.

zu C 5.2) Richtige Lösung: 10^4 .

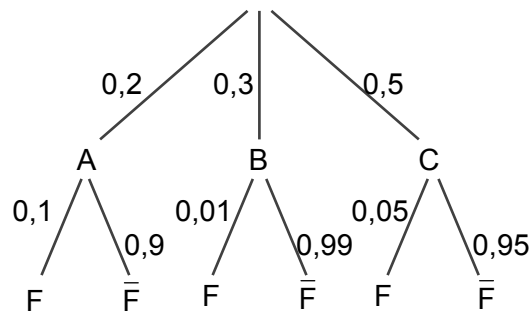
zu C 6. $C_5^2 \cdot C_4^1 \cdot C_5^1 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{1 \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{1 \cdot 4!} = 10 \cdot 4 \cdot 5 = \underline{200}$ (oder durch Überlegung)

zu C 7. Für das Ereignis gibt es vier günstige Ergebnisse des zweiten Würfels: {3; 4; 5; 6},

$$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} (\hat{=} 66,7 \%).$$

zu C 8. A (B, C) – Gerät ist in Stadt A (B, C) hergestellt, F – Gerät ist fehlerhaft

a)

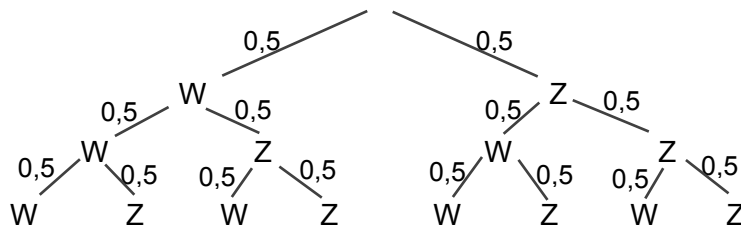


$$P(F) = 0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,01 + 0,5 \cdot 0,05 = 0,048$$

Es ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,85 % fehlerhaft.

b) $P_{F(A)} = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0,2 \cdot 0,1}{0,048} = \frac{0,02}{0,048} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$

zu C 9.



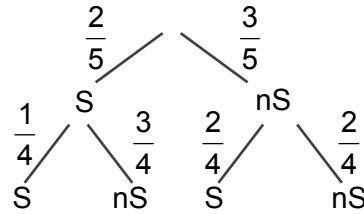
$$P(A) = \frac{1}{8}, P(B) = \frac{7}{8}, P(C) = \frac{7}{8}, P(D) = \frac{3}{8}$$

zu C 10. R = richtig, F = falsch \rightarrow mögliche Ergebnisse für das Ereignis „Bestanden“: RRRF, RRFR, RFRR, FRRR und RRRR

$$P(\text{Bestanden}) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

zu C 11. S = Schmuggler,
nS = nicht schmuggelnd

a) $P(A) = P(nS, nS) = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4} = 0,3$



b) $E = \{(S, S), (S, nS), (nS, S)\}, E = \bar{A} \Rightarrow P(E) = 1 - P(A), P(E) = 0,7$

zu C 12.1 a) $P_M(G) = \frac{6000}{6300} = \frac{20}{21} \triangleq 95,2\%$, b) $P_M(\bar{G}) = \frac{3300}{3700} = \frac{33}{37} \triangleq 89,2\%$

zu C 12.2 $P(A) = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{180}{900} = \frac{1}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{60}{900} = \frac{1}{15}$, $P_A(B) = \frac{60}{600} = \frac{1}{10}$,
 $P_B(A) = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$, $P(\bar{A} \cap B) = \frac{120}{900} = \frac{2}{15}$, $P_{\bar{A}}(B) = \frac{120}{300} = \frac{2}{5}$

zu C 13. Bernoulli-Ketten sind die Vorgänge: **D** mit $n = 4$, $p = 0,3$ (weiß) bzw. $0,7$ (rot) und **F** mit $n = 8$, $p = 0,25$.

zu C 14. A

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4$$

C

$$4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

B

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

A

$$\binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$\frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{4}{3}}$$

D

$$1 - \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \right)$$

zu C 15. $d = \frac{1}{8}$

zu C 16.

	<1,75	>1,75	
M	0,2	0,4	0,6
F	0,3	0,1	0,4
	0,5	0,5	1

Lösung: $p = 40\%$

zu C 17. $S = \{(1;1), (1;2), \dots (6;6)\} [n = 36]$,

$E = \{(1;1), (2;2), (2;3), (2;5), (3;2), (3;3), (3;5), (4;4), (5;2), (5;3), (5;5), (6;6)\}$

$$P(E) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$