Abschlussprüfung Fachoberschule 2012
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

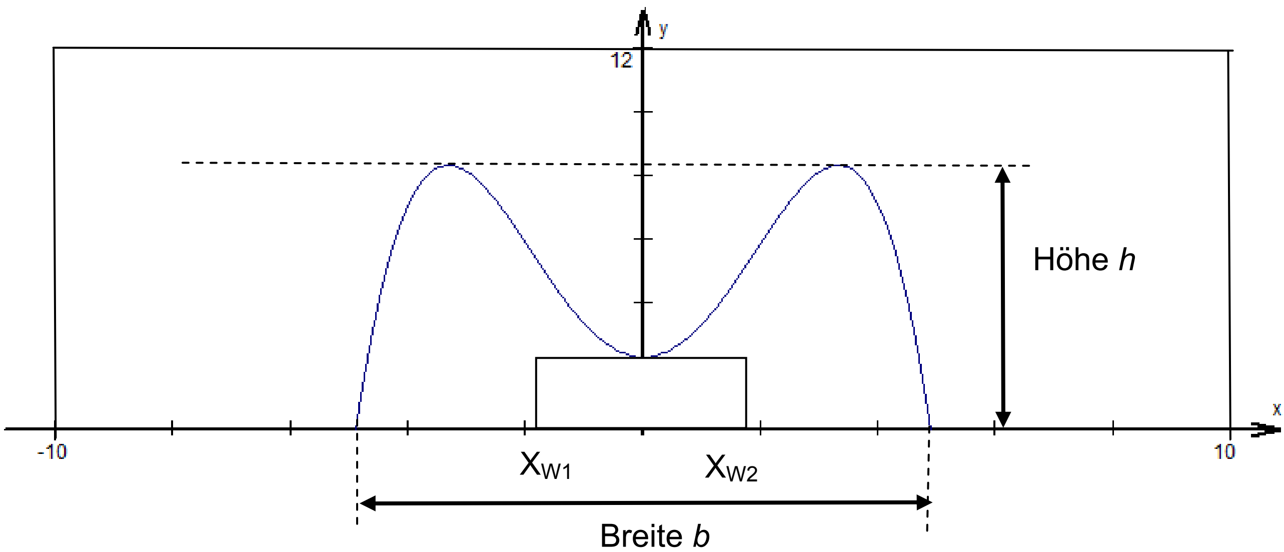
1 **/ 40**

Ein neuseeländischer Architekt entwirft die Fassade für ein meeresbiologisches Museum in Hamburg.
Diese Fassade hat eine Breite von 20 m und eine Höhe von 12 m.

Es gibt einen verglasten Bereich, der durch den Graphen der Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{11}{10}x^2 + \frac{45}{20},\ x \in D_f$$

wellenförmig begrenzt wird.
Der Rest der Fassade, also alles außerhalb der durch den Graphen der Funktion f und der x-Achse begrenzten Fläche, ist mit Blech verkleidet.
Die große Eingangstür zum Museum hat eine Höhe von 2,25 m und ist links und rechts begrenzt durch die beiden Wendestellen x_{W1} und x_{W2}.



1.1 Welches Symmetrieverhalten hat die wellenförmige Begrenzung des verglasten Fassadenbereiches? Begründen Sie ihre Aussage. **/ 2**

1.2 Berechnen Sie die Breite *b* des verglasten Bereiches. **/ 10**

1.3 Berechnen Sie die Höhe *h* des verglasten Bereiches. **/ 11**

1.4 Berechnen Sie die Breite der Eingangstür. **/ 6**

1.5 Berechnen Sie den Inhalt der Fassadenfläche, die mit Blech verkleidet wird. **/ 7**

1.6 Die Breite *b* des verglasten Bereiches soll genau 10 m betragen. **/ 4**

Berechnen Sie, um wie viele Meter der Graph der Funktion f nach oben verschoben werden muss!

2 / 15

Eine ganzrationale Funktion f vierten Grades besitzt den Sattelpunkt $S(2\,|\,0)$. Die Tangente an den Graphen der Funktion f im Koordinatenursprung verläuft durch den Punkt $P(2\,|\,-16)$.

Bestimmen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der Funktionsgleichung dieser Funktion.
Die Lösung dieses Gleichungssystems ist nicht erforderlich.

Lösen Sie stattdessen das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ der Funktion f.

Gehen Sie davon aus, dass der fehlende Koeffizient e den Wert 0 hat.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & 0 \\
40a & + & 14b & + & 5c & + & 2d & = & 0 \\
48a & + & 12b & + & 2c & + & 2d & = & -16 \\
32a & + & 8b & + & 2c & + & d & = & 0
\end{array}$$

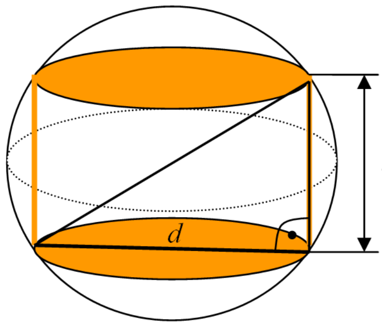
---

3 / 15

In eine Kugel mit dem Radius $R = 4cm$ soll ein Zylinder mit möglichst großem Rauminhalt hineinpassen (siehe Zeichnung).

<u>Hinweis:</u>

Geben Sie bei den Rechnungen die Ergebnisse auf eine relevante Stelle nach dem Komma an.



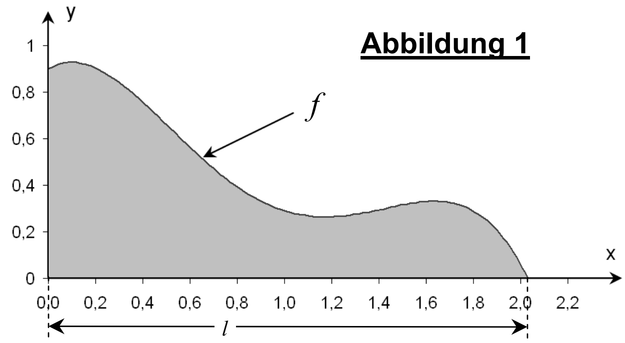
3.1 Weisen Sie nach, dass die Funktionsgleichung der Zielfunktion zur Bestimmung des Zylindervolumens wie folgt lautet: $V(h) = \pi\left(16 - \frac{h^2}{4}\right)h$ **/ 7**

3.2 Wie groß sind der Grundkreisdurchmesser d und die Höhe h des optimalen Zylinders? **/ 5**

3.3 Berechnen Sie den Rauminhalt des Zylinders mit maximalem Volumen. **/ 3**

4 Runden Sie alle Ergebnisse und Zwischenergebnisse auf 3 Stellen nach dem Komma (außer bei 4.1.1). / 30

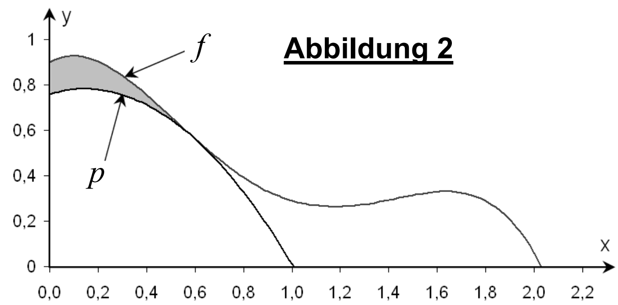
4.1 In der Abbildung 1 ist als grau gefärbte Fläche die Seitenansicht einer Relaxliege dargestellt, die in einem Stück aus einem Hartschaumblock gefertigt ist.
Der obere Rand lässt sich im Koordinatensystem ($1\,LE \triangleq 1\,m$) durch die Funktionsgleichung
$f(x) = -0,8x^4 + 3,1x^3 - 3,51x^2 + 0,6x + 0,9$
darstellen. Der linke Rand ist die y-Achse, der untere Rand die x-Achse.



4.1.1 Lesen Sie aus Abbildung 1 die ungefähre Länge l der Liege ab und benutzen Sie diesen Wert als Startwert für ein Näherungsverfahren, mit dem Sie l in zwei Iterationsschritten genauer berechnen.
Runden Sie das Ergebnis der letzten Iteration angemessen und begründen Sie die Anzahl der gewählten Nachkommastellen. / 10

4.1.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt der in Abbildung 1 grau gefärbten Fläche und das Volumen der Liege, die 0,6 m breit ist. / 7

4.2 In der Abbildung 2 ist unter dem Graph der Funktion f (s.o.) die Parabel p eingezeichnet, die im Koordinatensystem ($1\,LE \triangleq 1\,m$) durch die Funktionsgleichung
$p(x) = -1,05x^2 + 0,3x + 0,76032$
beschrieben wird .



4.2.1 Zeigen Sie, dass die Parabel p den Graphen von f an der Stelle 0,6 schneidet. / 3

4.2.2 Bei einigen Liegen wird im Intervall [0 ; 0,6] entlang der Parabel p ein Stück abgesägt, das in der Abbildung 2 grau gefärbt ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser grauen Fläche und zeigen Sie, dass das Volumen des abgesägten Stücks ca. 5,3 % des anfänglichen Gesamtvolumens beträgt. / 10

Ende der Aufgabenstellung

Abschlussprüfung Fachoberschule 2012
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
1						
1.1	G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da alle im Funktionsterm vorkommenden Exponenten von *x* gerade sind. (oder auch: f(x)=f(-x) für alle x des Definitionsbereiches.)	2				
1.2	$f(x) = 0 = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{11}{10}x^2 + \frac{45}{20}$ $= x^4 - 22x^2 - 45$	2				
	$Substitution\ mit\ u = x^2\ ergibt:$ $0 = u^2 - 22u - 45$		1			
	$u_{1/2} = 11 \pm \sqrt{166}$ $u_1 \approx 23{,}88\ und\ u_2 \approx -1{,}88$	3				
	$Einsetzen\ in\ die\ Substitutionsgleichung\ ergibt:$ $x^2 = 23{,}88 \Rightarrow x_1 \approx 4{,}89\ und\ x_2 \approx -4{,}89$ $x^2 = -1{,}88 \Rightarrow x_{3/4} \notin R$		3			
	$Die\ gesuchte\ Breite\ b\ beträgt\ 9{,}78\ m.$	1				
	Zwischensumme:	8	4	0		Aufgaben 1.1.bis 1.2

	Zwischensumme:	8	4	0		Aufgaben 1.1.bis 1.2
1.3	*Bestimmung der y – Koordinate eines der beiden Hochpunkte*					
	$f'(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{11}{5}x$ *und* $f''(x) = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{11}{5}$	2				
	$f'(x) = 0 = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{11}{5}x = x\,(-\frac{1}{5}x^2 + \frac{11}{5})$		1			
	$x_1 = 0,\ x_2 \approx 3{,}32$ *und* $x_3 \approx -3{,}32$	1				
	$f''(0) = \frac{11}{5} > 0 \Rightarrow$ *bei* x_1 *lokales Minimum*	3				
	$f''(3{,}32) = f''(-3{,}32) \approx -4{,}41 < 0 \Rightarrow$ *lokale Hochpunkte bei*					
	$H_1\ (3{,}32 \mid \approx 8{,}3)$ *und* $H_2\ (-3{,}32 \mid \approx 8{,}3)$		3			
	Die Höhe h des verglasten Fassadenbereichs beträgt $8{,}30\ m$.	1				
1.4	*Bestimmung der x – Koordinate eines der beiden Wendepunkte*					
	$f''(x)$ (s.o.) *und* $f'''(x) = -\frac{6}{5}x$	1				
	$f''(x) = 0 = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{11}{5} \Leftrightarrow 0 = x^2 - \frac{11}{3}$		1			
	$x_{W1} \approx 1{,}91$ *und* $x_{W2} \approx -1{,}91$	2				
	Da $f'''(1{,}91) \neq 0$ *und* $f'''(-1{,}91) \neq 0$, *handelt es sich um die Wendestelle von* f.	1				
	Die Breite der Eingangstür beträgt $3{,}82\ m$.	1				
	Zwischensumme:	20	9	0		Aufgaben 1.1.bis 1.4

	Zwischensumme:	20	9	0		Aufgaben 1.1.bis 1.4
1.5	$A_{Glas} = 2\int_0^{4,89}(-\frac{1}{20}x^4 + \frac{11}{10}x^2 + \frac{45}{20})\,dx$ $= 2(-\frac{1}{100}x^5 + \frac{11}{30}x^3 + \frac{45}{20}x\vert_0^{4,89})$ $\approx 51{,}83\,m^2$ $A_{Blech} = (20*12) - 51{,}83 = 188{,}17\,m^2$ *Die Größe der Fläche beträgt* $188{,}17\,m^2$.	2 1	4			
1.6	*Gegeben*: *z.B.* $P(5\vert 0)$ *Gesucht*: $g(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{11}{10}x^2 + k\ ,\ k \in R$ $g(5) = 0 = -\frac{625}{20} + \frac{275}{10} + k \Rightarrow k = \frac{75}{20}$ *Der Graph muss um* $\frac{75}{20} - \frac{45}{20} = \frac{30}{20} = 1{,}5$ *m nach oben verschoben werden.*	1 1		1 1		
	Summe	25	13	2		
	Mögliche BE:	40				**Erreichte BE Endsumme Aufgabe 1**

Aufg. 2	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	Erbrachte Teilleistung BE	Erbrachte Teilleistung Begutachtung
2	Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$	1				
	Bedingungsgefüge: 1. $f(2) = 0$ Punkt $P(2 \mid 0)$		1			
	2. $f'(2) = 0$ Sattelpunkt bei $x = 2$		2			
	3. $f''(2) = 0$ Wendepunkt bei $x = 2$		2			
	4. $f(0) = 0$ Koordinatenursprung	1				
	5. $f'(0) = m = \frac{-16-0}{2-0} = -8$ Anstieg der Tangente		2			
	Gleichungssystem: aus 4. folgt $e = 0$ und somit I: $16a + 8b + 4c + 2d = 0$ II: $32a + 12b + 4c + d = 0$ III: $48a + 12b + 2c = 0$ IV: $d = -8$		1			
	Lösungen des gegebenen Gleichungssystems $a = 1;\quad b = -6;\quad c = 12;\quad d = -8$		4			
	Funktionsgleichung: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$	1				
	Summe:	3	12	0		
Mögliche BE:		15				**Erreichte BE Endsumme Aufgabe 2**

Aufg. 3	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
3.1	Hauptbedingung HB: $V(r,h)=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h=\pi\frac{d^2}{4}h$		2			
	Durchmesser d und Höhe h des Zylinders bilden mit dem Durchmesser der Kugel ($2r$) als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck. Nebenbedingung NB: $(2r)^2=d^2+h^2 \Leftrightarrow 64=d^2+h^2 \Leftrightarrow d^2=64-h^2$			2		
	Zielfunktion ZF: $V(h)=\pi\left(\frac{64-h^2}{4}\right)h=\pi\left(16-\frac{h^2}{4}\right)h=16\pi h-\frac{\pi h^3}{4}$			3		
3.2	$V'(h)=16\pi-\frac{3\pi h^2}{4}=0 \Leftrightarrow 0=16\pi-\frac{3\pi h^2}{4}$		1			
	$h^2=\frac{64}{3} \Leftrightarrow h=\frac{8\sqrt{3}}{3}\approx 4,62 \Rightarrow d=\sqrt{64-h^2}=6,53$	1	1			
	$V''(h)=-\frac{3\pi h}{2}<0 \Rightarrow Maximum$		1			
	Antwortsatz: Der Zylinder hat einen Durchmesser von 6,53 cm und eine Höhe von 4,62 cm.	1				
3.3	$V_{\max}=16\pi\frac{8\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^3}{4}\approx 154,8$	2				
	Antwortsatz:Der größte Zylinder hat ein Volumen von 154,8 cm^3.	1				
	Summe:	5	5	5		
	Mögliche BE:	15				**Erreichte BE Endsumme Aufgabe 3**

<table>
<tr><th rowspan="2">Aufg. 4</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th><th colspan="2">Erbrachte Teilleistung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>BE</th><th>Begutachtung</th></tr>
<tr><td>4.1.1</td><td>Laut Abb. 1 ist $l \approx 2$</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Newton-Iterationsformel: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$f'(x) = -3,2x^3 + 9,3x^2 - 7,02x + 0,6$</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td><table>
<tr><th>n</th><th>x_n</th><th>$f(x_n)$</th><th>$f'(x_n)$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>0,06</td><td>-1,84</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2,032608696</td><td>-0,004485602</td><td>-2,118681372</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2,030491529</td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Die Liege ist ca. 2,03 Meter lang, weil der letzte und vorletzte Näherungswert auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet übereinstimmen.</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.1.2</td><td>Ansatz: $A_1 = \left| \int_0^{2,03} f(x)dx \right| = \left| F(2,03) - F(0) \right|$</td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>F ist Stammfunktion von f
$F(x) = -0,16x^5 + 0,775x^4 - 1,17x^3 + 0,3x^2 + 0,9x$</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$F(2,03) \approx 0,921$ und $F(0) = 0$</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\Rightarrow A \approx 0,921$ und $V = 0,6 \cdot 0,921 \approx 0,5526$
Der Flächeninhalt beträgt ca. 0,921 m² und
das Volumen beträgt ca. 0,553 m³.</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.2.1</td><td>$f(0,6) \approx 0,562$ und $p(0,6) \approx 0,562$</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Also schneiden sich die Graphen an der Stelle 0,6.</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" align="right">Zwischensumme:</td><td>14</td><td>5</td><td>1</td><td></td><td>Aufgaben 4.1.1.bis 4.2.1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Aufg. 4</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th><th colspan="2">Erbrachte Teilleistung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>BE</th><th>Begutachtung</th></tr>
<tr><td colspan="2">Zwischensumme:</td><td>14</td><td>5</td><td>1</td><td></td><td>Aufgaben 4.1.1.bis 4.2.1</td></tr>
<tr><td>4.2.2</td><td>$A_2 = \left| \int_0^{0,6} h(x)dx \right| = \left| H(0,6) - H(0) \right|$
h ist die Differenzfunktion von f und p
$h(x) = -0,8x^4 + 3,1x^3 - 2,46x^2 + 0,3x + 0,13968$
H ist die Stammfunktion von h
$H(x) = -0,16x^5 + 0,775x^4 - 0,82x^3 + 0,15x^2 + 0,13968x$
$H(0,6) \approx 0,0486864$ und $H(0) = 0$
Die weggeschnittene Seitenfläche beträgt ca. 0,049 m²
Anteil: $\frac{0,049m^2}{0,921m^2} \approx 0,053 = 5,3\%$
Damit hat auch das weggeschnittene Volumen einen Anteil von ca. 5,3% des anfänglichen Gesamtvolumens.</td><td>

2
1</td><td>2

2

2

1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe:</td><td>17</td><td>12</td><td>1</td><td colspan="2">▼</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mögliche BE:</td><td colspan="3">30</td><td></td><td>Erreichte BE Endsumme Aufgabe 4</td></tr>
</table>