Abschlussprüfung Fachoberschule Herbst 2012
Mathematik

Aufgabenvorschlag B

1 **/40**

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\,;\; x \in \mathrm{IR}.$$

1.1 Überprüfen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f und begründen Sie die Aussage. **/2**

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen. **/2**

1.3 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen. **/5**

1.4 Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte und bestimmen Sie die Art der Extrema. **/12**

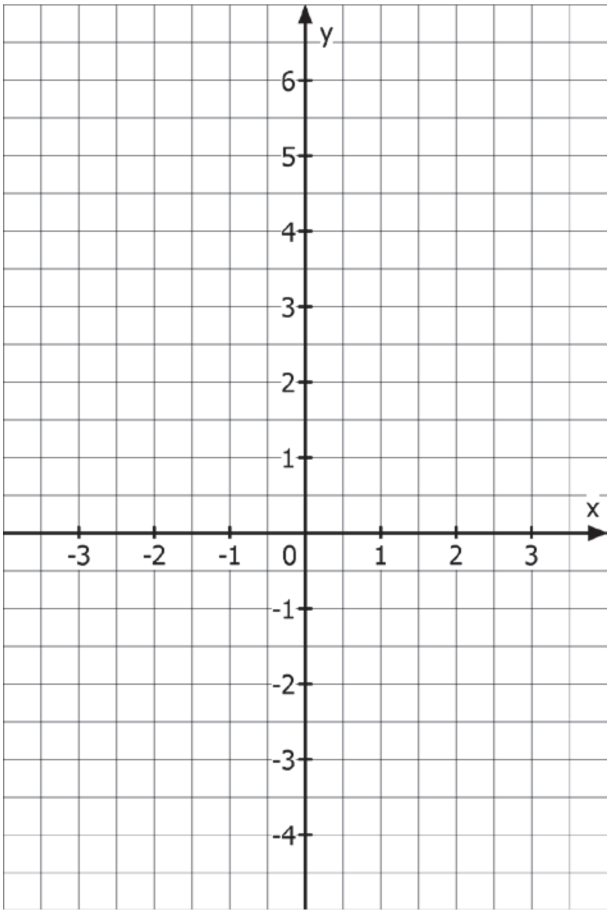
1.5 Ermitteln Sie die Wendepunkte/Sattelpunkte des Graphen von f und stellen Sie die Gleichung der Wendetangente t_W auf. **/11**

1.6 Berechnen Sie den Winkel α zwischen der Wendetangente t_W und der x-Achse. **/2**

1.7 Skizzieren Sie den Graphen von f und den Graphen der Tangente t_W im Intervall $[-2; 2,5]$ in das nachfolgende Koordinatensystem. **/6**

→ Fortsetzung nächste Seite →

graphische Darstellung zu 1.7



2 **/15**

Der Graph der ganzrationalen Funktion f 3. Grades verläuft durch den Koordinatenursprung und hat an der Stelle $x = 2$ eine waagerechte Tangente. Die Tangente im Wendepunkt $W(4 \mid y_W)$ hat die Steigung $m = -4$.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion.

Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie <u>*ersatzweise*</u> *das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion f.*

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad ; x \in \mathrm{IR}$$

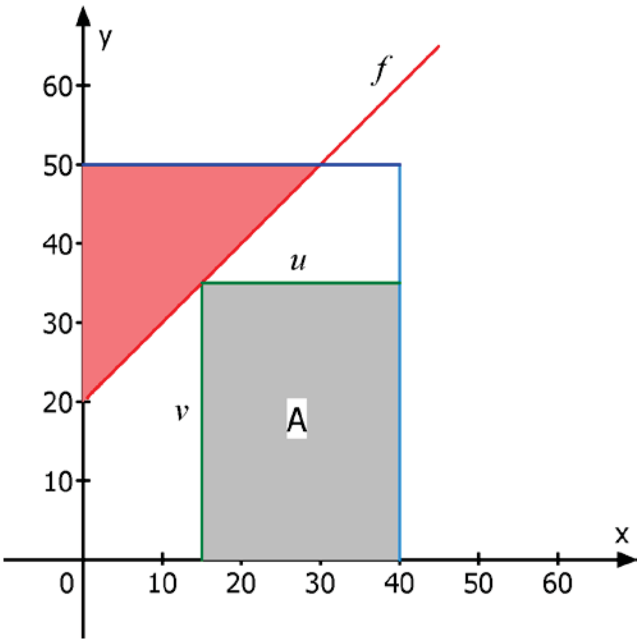
$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
0 & = & & & & & & & a_0 \\
0 & = & 24\,a_3 & + & 8\,a_2 & + & 2a_1 & & \\
-2 & = & 24\,a_3 & + & 4\,a_2 & + & 0{,}5a_1 & & \\
0 & = & 12\,a_3 & + & a_2 & & & &
\end{array}$$

3 /15

Aus einer rechteckigen Glasplatte mit den Seiten $a = 40\,\text{cm}$ und $b = 50\,\text{cm}$ ist das in der Abbildung dargestellte dreieckige Stück herausgebrochen. Die Bruchkante kann mit der Funktion:

$$f(x) = x + 20\,;\; x \in \mathrm{IR} \wedge 0 < x < 40$$

beschrieben werden. Aus dem Reststück soll eine rechteckige Platte mit dem Flächeninhalt A herausgeschnitten werden.



3.1 Zeigen Sie, dass A eine Zielfunktion ist, mit der der Flächeninhalt der rechteckigen Glasplatte berechnet werden kann: **/5**

$$A(x) = -x^2 + 20x + 800\,;\; x \in D_A$$

3.2 Berechnen Sie die Maße u und v der Seiten der Platte, sodass der Flächeninhalt maximal wird. **/8**

3.3 Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt A der rechteckigen Platte, die aus dem Reststück herausgeschnitten werden soll. **/2**

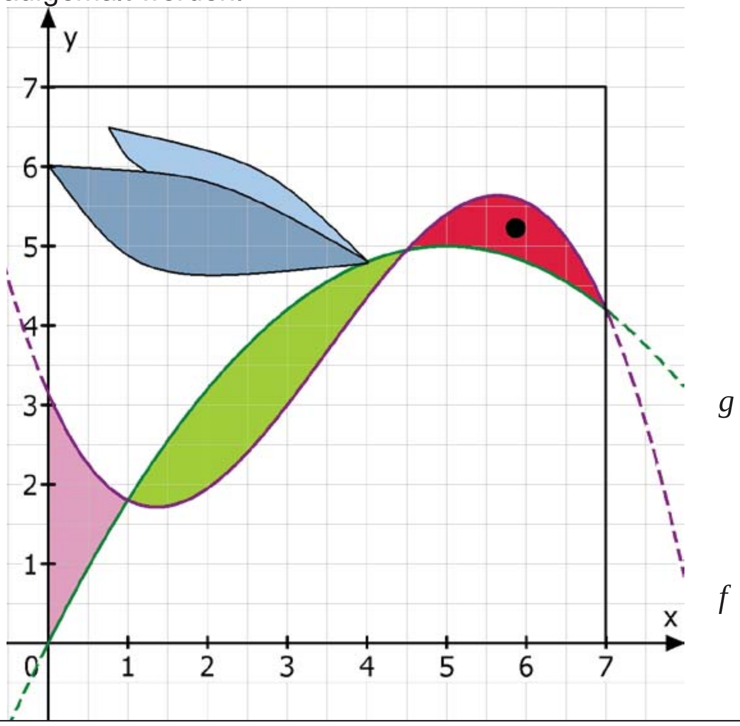
4 /30

Die Fassade des Vogelhauses eines Zoos soll ein Fenster in Gestalt eines stilisierten Vogels erhalten. Die Wand hat eine quadratische Grundfläche von 7 m Kantenlänge, die Konturen von Kopf, Rumpf und Schwanz des Vogels werden durch die Graphen der Funktionen f und g mit:

$$f(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}05x^2 - 2{,}3x + 3{,}15\ ;\ x \in \mathrm{IR}$$

$$g(x) = -0{,}2x^2 + 2x\ ;\ x \in \mathrm{IR}$$

beschrieben (s. Skizze). Die Flügel gehören nicht zur Fensterfläche, sie sollen wie das Auge nachträglich aufgemalt werden.



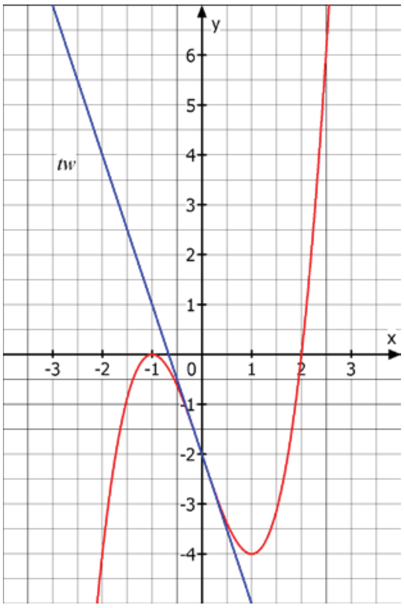
4.1 Berechnen Sie die Schnittstellen der Graphen von f und g. **/6**

4.2 Bestimmen Sie jeweils den Flächeninhalt der Glasflächen von Schwanz, Rumpf und Kopf. **/10**

4.3 Ermitteln Sie, wie groß der prozentuale Anteil der Fensterfläche an der Gesamtfläche der Fassade ist. **/3**

4.4 Unterhalb des Vogels soll die Wand bis auf 3 m Höhe mit Anti-Graffiti-Farbe gestrichen werden. Diese Farbe wird in 1 Liter-Gebinden angeboten, ein Eimer kostet € 44,00 und reicht für etwa 6,25 m² Wandfläche. Schraffieren Sie den zu behandelnden Bereich und zeigen Sie, dass der Graph von f durch den Punkt $P(3\,|\,3)$ verläuft. Berechnen Sie die benötigte Menge Farbe sowie die Kosten dieses Vorhabens. **/11**

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.1	$f(x) \neq f(-x) \wedge f(x) \neq -f(-x)$ oder die Exponenten von x sind gerade und ungerade, der Graph ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse, noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.	2		
1.2	Verhalten im Unendlichen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \to \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to -\infty$		1 1	
1.3	Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: $f(x)=0$ $x^3-3x-2=0$ *Polynomdivision* $x_1=-1$ (*durch Ausprobieren*) $(x^3-3x-2):(x+1)=x^2-x-2$ $x_2=2 \wedge x_3=-1$ *Schnittpunkte mit der* $x-$*Achse*: $N_{1/3}(-1\|0), N_2(2\|0)$ $f(0)=-2$ *Schnittpunkt mit der* $y-$*Achse*: $P_y(0\|-2)$	1 1 1	1 1	
1.4	Bestimmung der Extrempunkte: $f(x)=x^3-3x-2$ $f'(x)=3x^2-3$ $f''(x)=6x$ $f'(x)=0$ $3x^2-3=0$ $3x^2=3$ $x^2=1; \quad x_{E1}=1 \wedge x_{E2}=-1$ $f''(1)=6>0 \Rightarrow$ *lokales Minimum* $f''(-1)=-6<0 \Rightarrow$ *lokales Maximum* $f(1)=-4$; $E_{\min}(1\|-4)$ $f(-1)=0$; $E_{\max}(-1\|0)$	1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1 1	
1.5	Berechnung der Wendepunkte:			

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	$f''(x) = 6x$ $f''(x) = 0$ $6x = 0\,;\, x_W = 0$ $f'''(0) = 6$ $f'(0) = -3 \Rightarrow \textit{kein Sattelpunkt}$ $f(0) = -2\,;\, W(0 \mid -2)$ Bestimmung der Tangentengleichung: $f'(x_W) = m$ $f'(0) = -3$ $t: y = mx + n$ $-2 = -3 \cdot 0 + n$ $n = -2 \Rightarrow y = -3x - 2\ (\textit{Tangentengleichung})$	1 1 1 1 1	1 1 2	2
1.6	Bestimmung des Winkels: $m = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = 71{,}6°$		2	
1.7	Graphen der Funktionen f und t_w 	4	2	
	Summe	18	20	2
	mögliche BE	40		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
auf-
gaben</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2</td><td>Ansatz:
$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$
$f'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1$
$f''(x)=6a_3x+2a_2$

Bedingungsgefüge:
1. $f(0)=0$ (Graph geht durch den Ursprung)
2. $f'(2)=0$ (Steigung der Tangente an der Stelle $x=2$)
3. $f'(4)=-4$ (Steigung im Wendepunkt)
4. $f''(4)=0$ (Wendepunkt bei $W(4\mid y_W)$)</td><td>1
1
1

1</td><td>1
1
1
1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Gleichungssystem:
<table>
<tr><td>I.</td><td>0</td><td>=</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>a_0</td></tr>
<tr><td>II.</td><td>0</td><td>=</td><td>$12a_3$</td><td>+</td><td>$4a_2$</td><td>+</td><td>a_1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>III.</td><td>-4</td><td>=</td><td>$48a_3$</td><td>+</td><td>$8a_2$</td><td>+</td><td>a_1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>IV.</td><td>0</td><td>=</td><td>$24a_3$</td><td>+</td><td>$2a_2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Lösen des Gleichungssystems
(ebenso Ersatz-LGS)

Daraus ergibt sich (auch Ersatz-LGS):
$a_3=\frac{1}{3}$; $a_2=-4$; $a_1=12$; $a_0=0$</td><td>1</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Für die Funktionsgleichung gilt:
$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+12x$</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>6</td><td>9</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>mögliche BE</td><td colspan="3">15</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
auf-
gaben</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>Bestimmung der Zielfunktion:

$A(u,v)=u\cdot v \quad \Rightarrow$ Hauptbedingung

$u=40-x$
$v=f(x)=20+x \quad \Rightarrow$ Nebenbedingung

daraus folgt A(x):
$A(x)=(40-x)(20+x)$
$=40x+800-x^2-20x$
$=-x^2+20x+800$</td><td>1

1</td><td>

1
1

1</td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>Bestimmung von u und v:

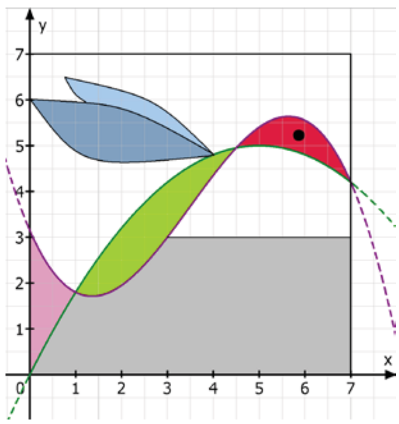
$A'(x)=-2x+20$
$A''(x)=-2$

$A'(x)=0$
$-2x+20=0$
$x=10$
$A''(10)=-2<0\,;\,lok.\ Maximum$
$u=40-x=30cm$
$v=x+20=30cm$</td><td>

1
1

1
1
1
1</td><td>

1
1</td><td></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>Bestimmung des maximalen Flächeninhalts:
$A(u,v)=u\cdot v$
$=30cm\cdot 30cm=900cm^2$</td><td>
1
1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>10</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>mögliche BE</td><td colspan="3">15</td></tr>
</table>

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4.1	Ansatz $f(x_S) = g(x_S)$, Umformen liefert die Differenzfunktion $h(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}25x^2 - 4{,}3x + 3{,}15 = 0$ Durch Ablesen/Einsetzen erhält man die erste Schnittstelle $x_1 = 1$. Division durch $-0{,}1$ und Polynomdivision mit $(x^3 - 12{,}5x^2 + 43x - 31{,}5) : (x-1) = x^2 - 11{,}5x + 31{,}5$ liefert die weiteren Schnittstellen $x_2 = 4{,}5$ und $x_3 = 7$.	1 2	1 2	
4.2	Zu berechnen sind drei Integrale über die Differenzfunktion $h(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}25x^2 - 4{,}3x + 3{,}15$ Mit der Stammfunktion $H(x) = -\frac{1}{40}x^4 + \frac{5}{12}x^3 - \frac{43}{20}x^2 + 3{,}15x$ $A_{Schwanz} = \int_0^1 h(x)dx \approx 1{,}39m^2$ $A_{Rumpf} = \left\vert \int_1^{4,5} h(x)dx \right\vert \approx \vert -3{,}04 \vert = 3{,}04m^2$ $A_{Kopf} = \int_{4,5}^{7} h(x)dx \approx 1{,}24m^2$	1	1 2 2	2 2
4.3	Der Flächeninhalt der gesamten Fassade beträgt $7 \cdot 7 = 49m^2$, der Gesamtinhalt der Fensterfläche ist $A_{Schwanz} + A_{Rumpf} + A_{Kopf} = 1{,}39m^2 + 3{,}04m^2 + 1{,}24m^2$ $= 5{,}67m^2$ Per Dreisatz errechnet man $5{,}67 \cdot 100 : 49 = 11{,}57\%$.	1 1	1	
4.4	Schraffur:  Zu zeigen ist außerdem $f(3) = 3$, somit ist die obere Grenze für die zweite Teilfläche 3. Zu berechnen sind wiederum drei Teilflächen:	1 1	2	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
	$A_1 = \int_0^1 (-0,2x^2 + 2x)dx = \left[-\frac{1}{15}x^3 + x^2\right]_0^1 \approx 0,93m^2$		2	
	$A_2 = \int_1^3 (-0,1x^3 + 1,05x^2 - 2,3x + 3,15)dx$		2	
	$= \left[-\frac{1}{40}x^4 + \frac{7}{20}x^3 - \frac{23}{20}x^2 + 3,15x\right]_1^3 = 4,2m^2$		1	
	$A_3 = 4 \cdot 3 = 12m^2$			
	Die zu streichende Gesamtfläche ist $A_{ges} = 0,93 + 4,2 + 12 = 17,13m^2$.		1	
	Bei einer Ergiebigkeit von $6,25m^2$ pro Liter benötigt man $17,13 : 6,25 \approx 2,74l$ von der Farbe. Man muss also drei Eimer kaufen, die Kosten betragen demnach $3 \cdot 44,- = 132,-$ €.		1	
	Summe	8	18	4
	mögliche BE	30		