Abschlussprüfung Fachoberschule 2014 Herbst
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

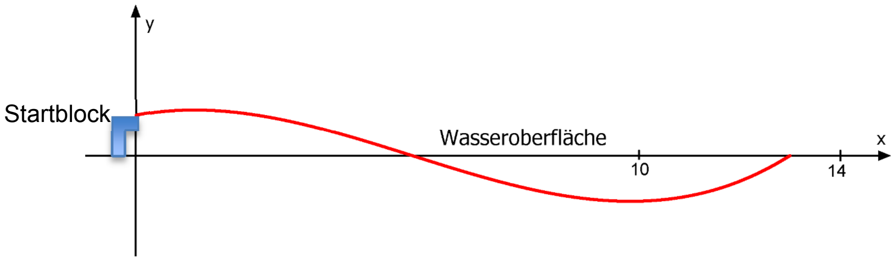
1 Funktionsuntersuchung /40

Die Absprung- und Tauchphase eines Schwimmers kann vom Absprung vom Startblock bis zum Wiederauftauchen durch den Graphen der Funktion f mit

$f(x) = \frac{4}{65} \cdot \left(\frac{1}{11}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{69}{22}x + 13 \right)$ dargestellt werden.

Der Graph der Funktion sei G_f.

Dabei gelten für die x- und y-Achse: $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{m}$



Hinweis: Die Größe des Schwimmers ist bei diesem Modell als punktförmig anzusehen.

1.1 Berechnen Sie die Höhe des Startblocks über der Wasseroberfläche. /2

1.2 Ermitteln Sie die x-Koordinaten der Punkte, an denen der Schwimmer ins Wasser ein- und wieder auftaucht. /6

1.3 Errechnen Sie die maximale Höhe des Schwimmers in der Flugphase sowie die maximale Tauchtiefe (jeweils bezogen auf die Wasseroberfläche). /11
Auf den Nachweis mittels 2. Ableitung bzw. Vorzeichenwechselkriterium kann verzichtet werden.

1.4 Bestimmen Sie den Punkt, an dem die Flugbahn des Schwimmers am steilsten nach unten zeigt. /5
Hinweis: Nachweis mittels 3. Ableitung erbringen.

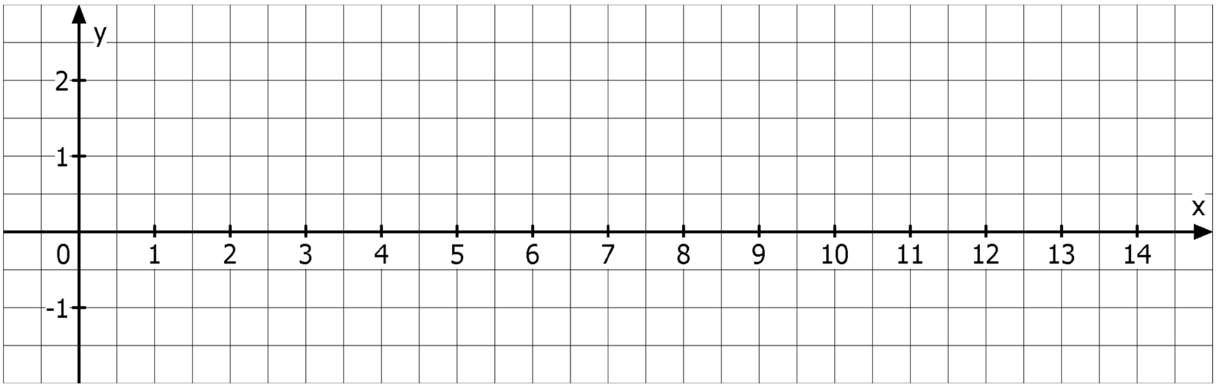
1.5 Berechnen Sie die Steigung der zugehörigen Tangente im Absprungpunkt des Schwimmers vom Startblock. /4
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente.

1.6 Zeichnen Sie G_f im Bereich vom Absprung bis zum Wiederauftauchen unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte. /5
Nutzen Sie hierfür das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

1.7 Ein zweiter Schwimmer springt direkt vom Beckenrand in das Wasser. /7
Dies kann durch die neue Funktion r mit $r(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}8x$ beschrieben werden.
Berechnen Sie, wieviel m dieser Schwimmer vor dem ersten Schwimmer wieder auftaucht, wenn der erste Schwimmer bei $x = 13$ auftaucht.
.

Koordinatensystem für Aufgabe 1.6 à nächste Seite

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.6:

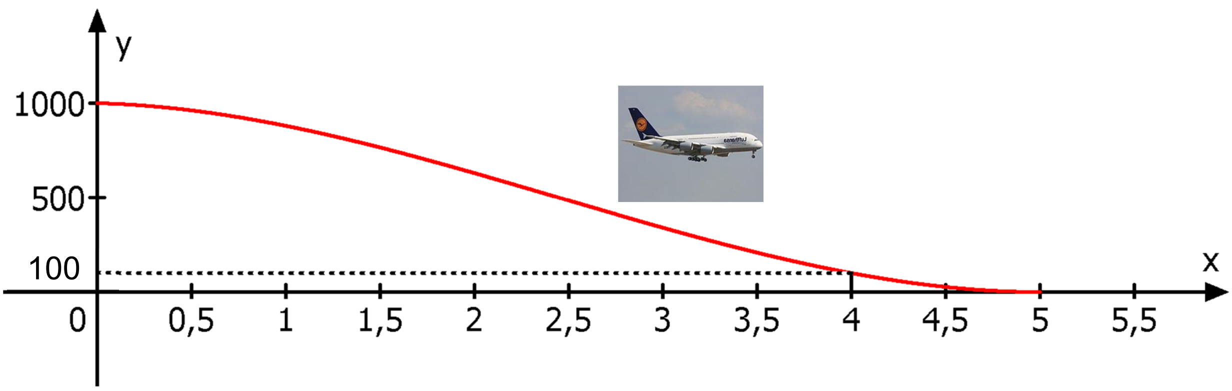


2 Rekonstruktion /15

Der Landeanflug eines Flugzeuges kann näherungsweise durch den Graphen einer Funktion 3. Grades mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dargestellt werden (siehe Abbildung).
An der Stelle $x = 0$ beginnt der Sinkflug. Aus einer Höhe von 1000 m (der Erdboden entspricht der x-Achse) sinkt das Flugzeug zu Boden und landet bei $x = 5$ km.
An dieser Stelle beträgt die Sinkgeschwindigkeit $0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
1 km vor der Landung hat das Flugzeug noch eine Flughöhe von 100 m.

Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion *f*.

Dabei gilt:
x-Achse: $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{km}$
y-Achse: $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{m}$



Hinweis: Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, dann lösen Sie das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion *f*.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
100 & = & 64a & + & 16b & + & 4c & + & d \\
0 & = & 75a & + & 10b & + & c & & \\
0 & = & 125a & + & 25b & + & 5c & + & d \\
1000 & = & & & & & & & d
\end{array}$$

3 Extremwertaufgabe /15

Unter der Decke einer Fabrikhalle soll ein Lüftungskanal eingebaut werden, dessen Querschnittfläche aus einem Halbkreis und einem daran angesetzten Rechteck besteht (siehe Abbildung).
Der Inhalt der Querschnittfläche des Kanals soll maximal werden, sein Umfang soll genau 4 m betragen.

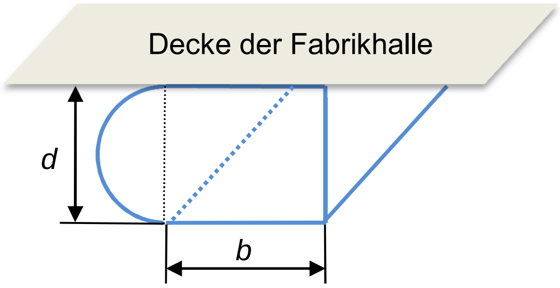


Abbildung: Lüftungskanal

3.1 Bestimmen Sie die Zielfunktion *A*, mit der die Querschnittfläche des gesamten Lüftungskanals berechnet werden kann. /6

[zur Kontrolle: $A(d) = 2d - \frac{\pi d^2}{8} - \frac{4d^2}{8}$]

3.2 Berechnen Sie die Werte für *b* und *d*, für die die Querschnittfläche maximal wird. /7

3.3 Berechnen Sie das Volumen des Lüftungskanals in m^3, wenn dieser eine Länge von 10 m hat. /2

4 Integralrechnung /30

Gegeben sind die vier Funktionen mit:

$$f(x) = \frac{3}{8750}x^4 - \frac{12}{175}x^2 + 1,5$$

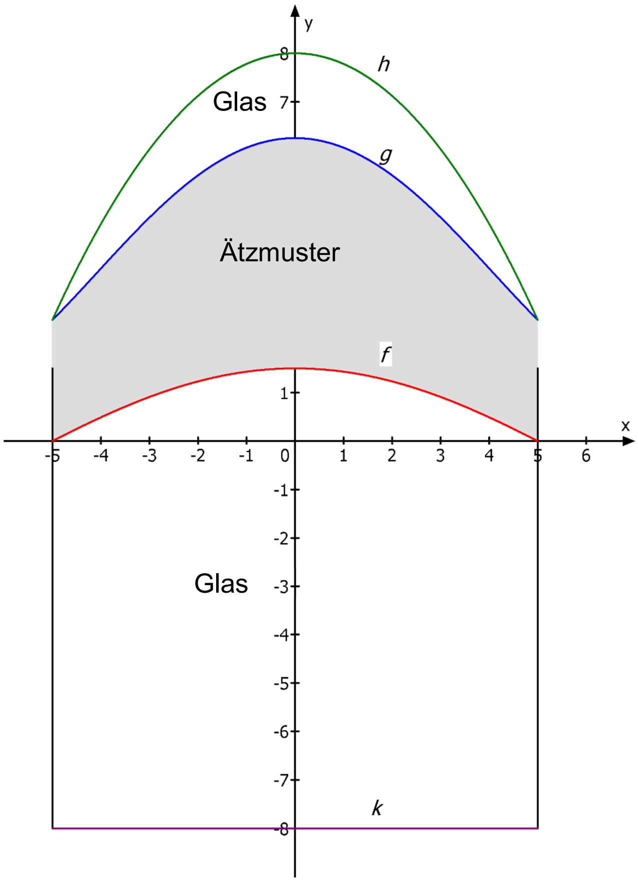
$$g(x) = 0,002x^4 - 0,2x^2 + 6,25$$

$$h(x) = -0,22x^2 + 8$$

$$k(x) = -8$$

Die Abbildung zeigt das Fenster eines historischen brandenburgischen Gemeindehauses, das bei einer Rekonstruktion originalgetreu ersetzt werden soll. Die mittlere Glasfläche ist mit einem Ätzmuster verziert.
Die einzelnen Teilflächen des Fensters werden im Intervall $[-5|5]$ durch die Graphen der oben genannten Funktionen begrenzt.

$1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 10\,\text{cm}$



4.1 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche (in cm²), die vom Graphen der Funktion *f* und der *x*-Achse begrenzt wird. **/10**
Berechnen Sie die Gesamtfläche (in cm²) der unteren Glasscheibe, die sich aus der von den Graphen von *f* und *k* eingeschlossenen Fläche zusammensetzt.

4.2 Die untere Glasscheibe wird am oberen Rand von einer Glasfläche mit Ätzmuster begrenzt. Berechnen Sie die Größe der Glasfläche (in cm²), die von den Graphen von *f* und *g* eingeschlossen wird. **/5**

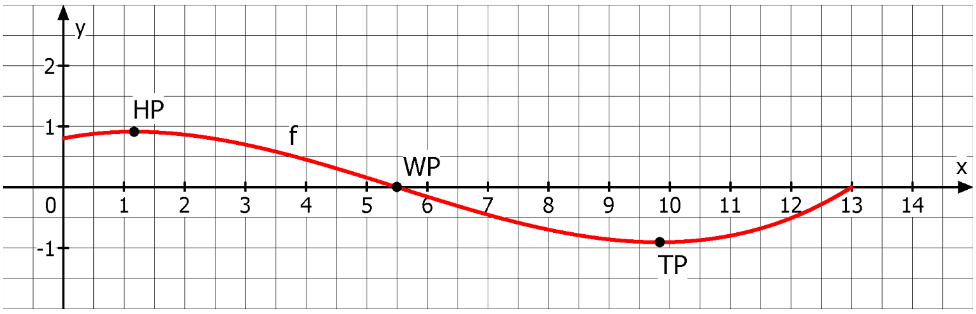
4.3 Die obere Glasscheibe, die von den Graphen von *g* und *h* eingeschlossen wird, besteht aus einem farbigen Glas. **/15**

Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Schnittpunkte der Graphen von *g* und *h* bei $x = -5$ und $x = 5$ liegen.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der farbigen Glasfläche (in cm²).

Abschlussprüfung Fachoberschule 2014 Herbst
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.1	$f(0)=\frac{4}{5}=0{,}8$ Die Höhe des Startblocks beträgt 0,8 m über der Wasseroberfläche.	2		
1.2	$f(x_N)=0$ $\frac{1}{11}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{69}{22}x+13=0$ Erste Lösung: $x_{N1}=13$ (durch Probieren) $\left(\frac{1}{11}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{69}{22}x+13\right):(x-13)=\frac{1}{11}x^2-\frac{7}{22}x-1$ $\frac{1}{11}x^2-\frac{7}{22}x-1=0 \Rightarrow x^2-\frac{7}{2}x-11=0$ $x_{N2}=5{,}5$; Der Schwimmer taucht bei 5,5 m ein und bei 13 m wieder auf.	1	5	
1.3	$f(x)=\frac{4}{715}x^3-\frac{6}{65}x^2+\frac{138}{715}x+\frac{4}{5}$ $f'(x)=\frac{12}{715}x^2-\frac{12}{65}x+\frac{138}{715}=0$ $x^2-11x+\frac{23}{2}=0$; $x_{1/2}=\frac{11}{2}\pm\sqrt{\frac{75}{4}}$ $x_{E1}=1{,}17$; $x_{E2}=9{,}83$ $f(1{,}17)=0{,}908$; $f(9{,}83)=-0{,}908$ Hochpunkt $HP(1{,}17\,\|\,0{,}908)$ Tiefpunkt $TP(9{,}83\,\|\,-0{,}908)$ Der Schwimmer erreicht in seiner Flugphase eine maximale Höhe von 0,91 m über der Wasseroberfläche und eine maximale Tauchtiefe von 0,91 m unter der Wasseroberfläche.	2	9	
1.4	$f''(x)=\frac{24}{715}x-\frac{12}{65}=0$; $x_W=5{,}5$ $f'''(5{,}5)=\frac{24}{715}>0$; $f(5{,}5)=0$; $WP(5{,}5\,\|\,0)$ Direkt beim Eintauchen in das Wasser nach $5{,}5$ m ist die Flugbahn des Schwimmers am steilsten.		5	
1.5	$f'(0)=m_t=\frac{138}{715}=0{,}193$ $y_t=m_tx+n$ $0{,}8=0{,}193\cdot 0+n$; $n=0{,}8$ $y_t=0{,}193x+0{,}8$			4

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.6	$f(0) = 0{,}8$; $x_{N1} = 13$; $x_{N2} = 5{,}5$; Hochpunkt $HP(1{,}17 \mid 0{,}908)$; Tiefpunkt $TP(9{,}83 \mid -0{,}908)$; $WP(5{,}5 \mid 0)$  	5		
1.7	$r(x) = 0$ $0{,}01x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}8x = 0$ $x(0{,}01x^2 - 0{,}2x + 0{,}8) = 0$ $x_1 = 0$ (Beckenrand) $0{,}01x^2 - 0{,}2x + 0{,}8 = 0$ $x_2 \approx 5{,}53$ (Eintauchen) $x_3 \approx 14{,}47$ (Auftauchen) Der zweite Schwimmer taucht 1,47 m nach dem ersten Schwimmer auf.	7		
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	17	19	4
	Summe der BE	40		

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
2	Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$	2		
	Bedingungsgefüge: 1. $f(4) = 100$ (Punkt $P(4\|100)$) 2. $f'(5) = 0$ (Sinkgeschwindigkeit an der Stelle $x = 5$ ist null) 3. $f(5) = 0$ (Nullstelle $x = 5$) 4. $f(0) = 1000$ (Flughöhe bei $x = 0$)		4	
	Gleichungssystem: I. $100 = 64a + 16b + 4c + d$ II. $0 = 75a + 10b + c$ III. $0 = 125a + 25b + 5c + d$ IV. $1000 = d$		3	
	Lösen des Gleichungssystems (auch Ersatz-LGS) ergibt: $a = 15$; $b = -110$; $c = -25$; $d = 1000$		4	
	Für die Funktionsgleichung gilt: $f(x) = 15x^3 - 110x^2 - 25x + 1000$	2		
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	4	11	0
	Summe der BE		15	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	II	III
3.1	$A(b,d)=\frac{\pi d^2}{8}+b\cdot d$ (*Hauptbedingung*) $U=2b+d+\frac{\pi d}{2}=4\,\text{m}$ (*Nebenbedingung*) $b=2-\frac{d}{2}-\frac{\pi d}{4}=2-d\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ $A(d)=\frac{\pi d^2}{8}+\left(2-\frac{d}{2}-\frac{\pi d}{4}\right)d=2d-\frac{\pi d^2}{8}-\frac{4d^2}{8}$ (*Zielfunktion*)		2	4
3.2	$A'(d)=2-\frac{\pi d}{4}-d$ $2-\frac{\pi d}{4}-d=0$ $d=\frac{2}{\frac{\pi}{4}+1}\approx 1{,}12\,\text{m}$ $b=2-\frac{d}{2}-\frac{\pi d}{4}\approx 0{,}56\,\text{m}$	3	4	
3.3	$A(1{,}12)\approx 1{,}12\,\text{m}^2$ $V=A\cdot l=11{,}2\,\text{m}^3$	2		
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	5	6	4
	Summe der BE	15		

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
4.1	Ansatz: $A_1 = \int_{-5}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ $F(x) = \frac{3}{43750}x^5 - \frac{4}{175}x^3 + \frac{3}{2}x$ $F(-5) = -\frac{34}{7}$; $F(5) = \frac{34}{7}$ $A_1 = F(5) - F(-5)$; $A_1 = \frac{68}{7} \approx 9{,}71$ Die Fläche zwischen dem Graphen von *f* und der *x*-Achse ist 971 cm^2 groß. Ansatz: $A_{ges} = A_1 + A_2$ $A_2 = 80$; $A_{ges} = 9{,}71 + 80 = 89{,}71$ Die Gesamtfläche der unteren Glasscheibe beträgt 8971 cm^2.	3 3	4	
4.2	Ansatz: $r(x) = g(x) - f(x) = 0{,}0017x^4 - 0{,}1314x^2 + 4{,}75$ Fläche mit Ätzmuster $A_3 = \int_{-5}^{5} r(x)\,\mathrm{d}x$ $R(x) = 0{,}00034x^5 - 0{,}0438x^3 + 4{,}75x$ $R(5) = 19{,}3375$ $R(-5) = -19{,}3375$ $A_3 = R(5) - R(-5) = 38{,}675$ Die Glasfläche mit Ätzmuster beträgt $3842{,}5 \text{ cm}^2$.	5		
4.3	$g(x) = h(x)$ $0{,}002x^4 + 0{,}02x^2 - 1{,}75 = 0$ $x^4 + 10x^2 - 875 = 0$; $z^2 + 10z - 875 = 0$ $z_{1/2} = -5 \pm 30$; $z_1 = -35$; $z_2 = 25$; $x_1 = -5$; $x_2 = 5$ Ansatz für Fläche: $A_4 = \int_{-5}^{5} j(x)\,\mathrm{d}x$ $j(x) = h(x) - g(x)$ $j(x) = -0{,}002x^4 - 0{,}02x^2 + 1{,}75$ $J(x) = -\frac{1}{2500}x^5 - \frac{1}{150}x^3 + 1{,}75x$ $J(5) = \frac{20}{3}$; $J(-5) = -\frac{20}{3}$; $A_4 = J(5) - J(-5)$; $A_4 = \frac{40}{3} \approx 13{,}34$ Die obere farbige Glasfläche hat einen Flächeninhalt von 1334 cm^2.		4 3 8	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	11	19	0
	Summe der BE	30		