Abschlussprüfung Fachoberschule 2015
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

1 Funktionsuntersuchung /40

Gegeben sei die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^4 - 4,5x^2 + 5,0625$; $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f ist G_f .

1.1 Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie. Begründen Sie Ihre Aussage. **/4**

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen.

1.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der y-Achse. **/7**
Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f .

1.3 Bestimmen Sie die Hoch-, Tief- und Wendepunkte von G_f . **/15**

1.4 Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $\left[-2;2\right]$ unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte. Berechnen Sie auch die Funktionswerte am Rand des Intervalls. **/5**

Nutzen Sie hierfür das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

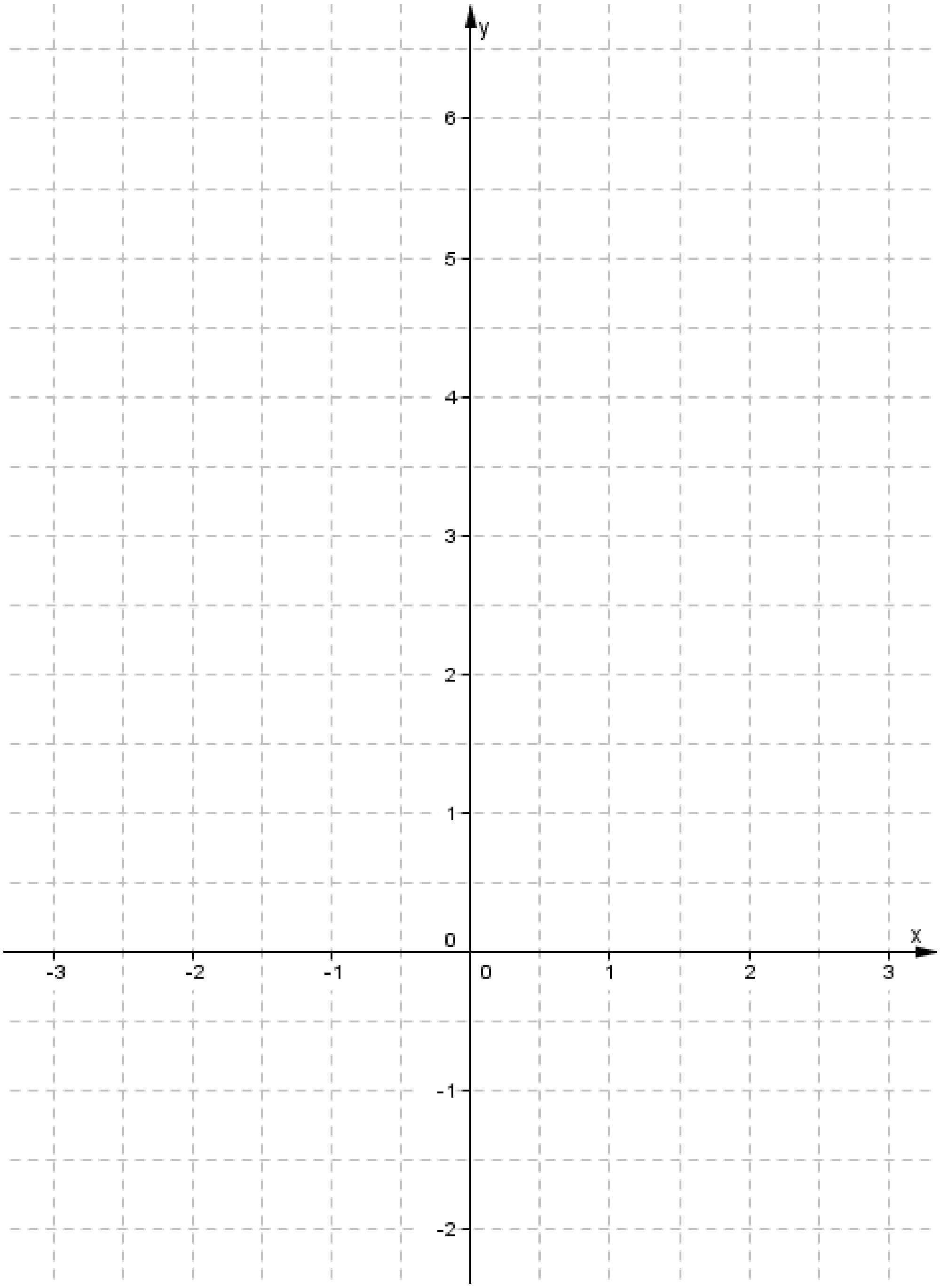
1.5 Weiterhin ist eine Parabel p mit der Funktionsgleichung **/9**
$p(x) = 2x^2 - 6x + 6,5$; $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Durch Gleichsetzen der Funktionsterme von p und f erhält man eine Gleichung, deren Lösungen die Schnittstellen der beiden Funktionen sind. Stellen Sie diese Gleichung auf.

Die gesuchte Schnittstelle ist eine Nullstelle der Funktion n mit
$n(x) = x^4 - 6,5x^2 + 6x - 1,4375$. Begründen Sie diesen Sachverhalt.

Eine Schnittstelle der Graphen von p und f liegt bei ungefähr $x = 2$.
Bestimmen Sie einen Näherungswert dieser Stelle mit einem geeigneten Verfahren. Brechen Sie das Verfahren nach drei Schritten ab. Betrachten Sie die Tendenz der Funktionswerte der ermittelten Näherungen und beurteilen Sie hiermit die Wirksamkeit des Näherungsverfahrens.

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.4



2 Rekonstruktion /15

Eine ganzrationale Funktion f dritten Grades besitzt den Wendepunkt $W(2\,|\,46)$.
Die Wendetangente in W schneidet die y-Achse bei 40.
Der Funktionswert von f an der Stelle -1 beträgt 10.

2.1 Bestimmen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der Funktionsgleichung dieser Funktion f. **/9**

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist nicht erforderlich.

2.2 Lösen Sie stattdessen das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ der Funktion f: **/6**

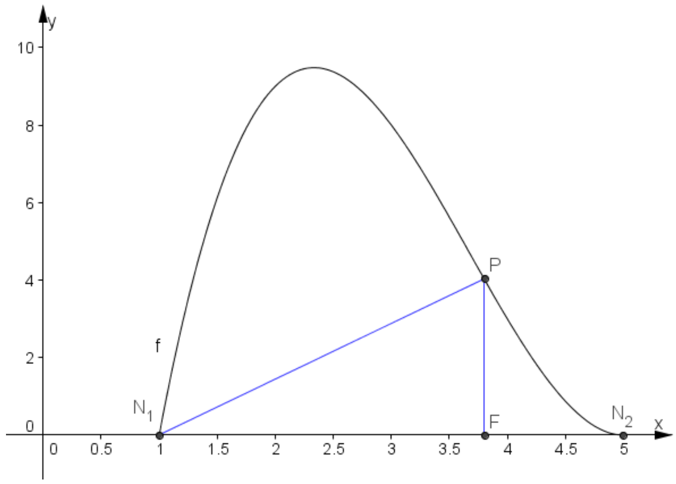
$$\begin{array}{rrrrcr} 23a & +9b & +c & +d & = & 16 \\ 15a & +5b & -c & & = & -30 \\ -28a & -2b & +2c & +d & = & 46 \\ -12a & -6b & -2c & & = & -6 \end{array}$$

3 Extremwertaufgabe /18

Gegeben ist die Funktion f mit

$f(x) = x^3 - 11x^2 + 35x - 25$; $x \in [1;5]$

Für jeden Punkt P auf dem Graphen von f bilden die drei Punkte $P(x \mid f(x))$, $N_1(1 \mid 0)$ und $F(x \mid 0)$ ein rechtwinkliges Dreieck.



3.1 Bestimmen Sie die Flächeninhalte der Dreiecke für $x = 4$ sowie für $x = 1,5$. **/4**

3.2 Der Flächeninhalt der Dreiecke in Abhängigkeit von x kann durch eine Funktion A beschrieben werden. **/6**

Weisen Sie nach, dass die Funktion A die folgende Funktionsgleichung hat:
$A(x) = 0,5x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 30x + 12,5$

3.3 Bestimmen Sie den Wert von x, für den das Dreieck mit dem größtmöglichen Flächeninhalt entsteht. **/8**

Berechnen Sie diesen maximalen Flächeninhalt.

4 Integralrechnung /27

In der modernen Landwirtschaft werden zunehmend Erntemaschinen mit GPS-Steuerung eingesetzt. Hierzu werden die Formen der Felder erfasst und mathematisch beschrieben.

Das in der Abbildung dargestellte Gerstenfeld wird durch die Koordinatenachsen sowie den Graphen G_n der Funktion n und den Graphen G_o der Funktion o begrenzt. Die Eckpunkte des Feldes sind somit A, B, C, O. Eine Längeneinheit entspricht 10 Meter.

Auf dem Feld befindet sich ein Feuchtbiotop, welches vollständig von dem Graphen G_p der Funktion p und dem Graphen G_g der Funktion g eingeschlossen wird.

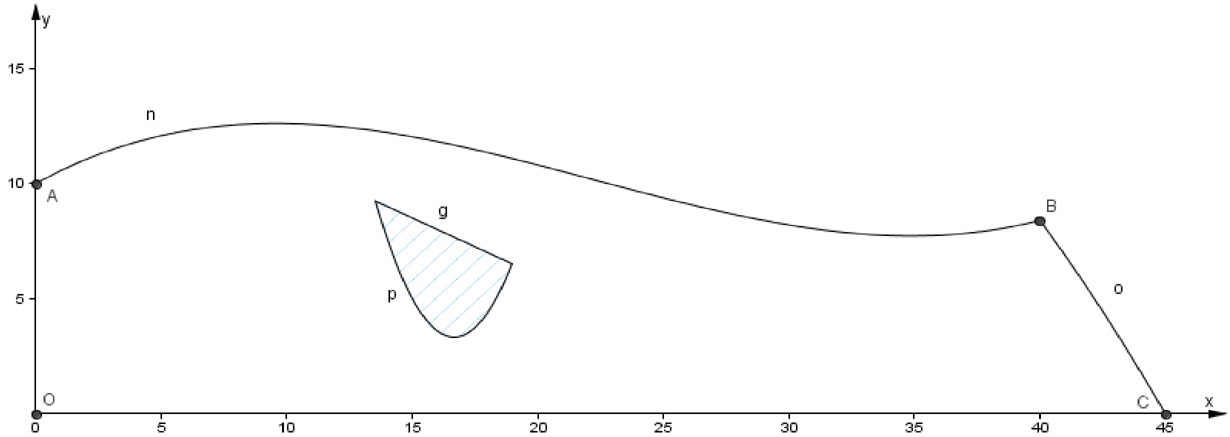
Folgende Koordinaten wurden erfasst:

Punkte: $A(0\,|\,10) \in G_n$ $\quad B(40\,|\,8{,}4) \in G_n, G_o$ $\quad C(45\,|\,0) \in G_o$ $\quad O(0\,|\,0)$

Funktionsgleichungen:

$n(x) = 0{,}0006x^3 - 0{,}04x^2 + 0{,}6x + 10$ $\qquad p(x) = 0{,}6x^2 - 20x + 170$

$o(x) = -0{,}04x^2 + 1{,}72x + 3{,}6$ $\qquad g(x) = -0{,}5x + 16$



1 LE = 10 m

4.1 Wie viel landwirtschaftliche Nutzfläche ließe sich durch Trockenlegen des Feuchtbiotops gewinnen? **/9**

4.2 Berechnen Sie die Größe des abzuerntenden Feldes und geben Sie das Ergebnis in Quadratmetern an. **/9**

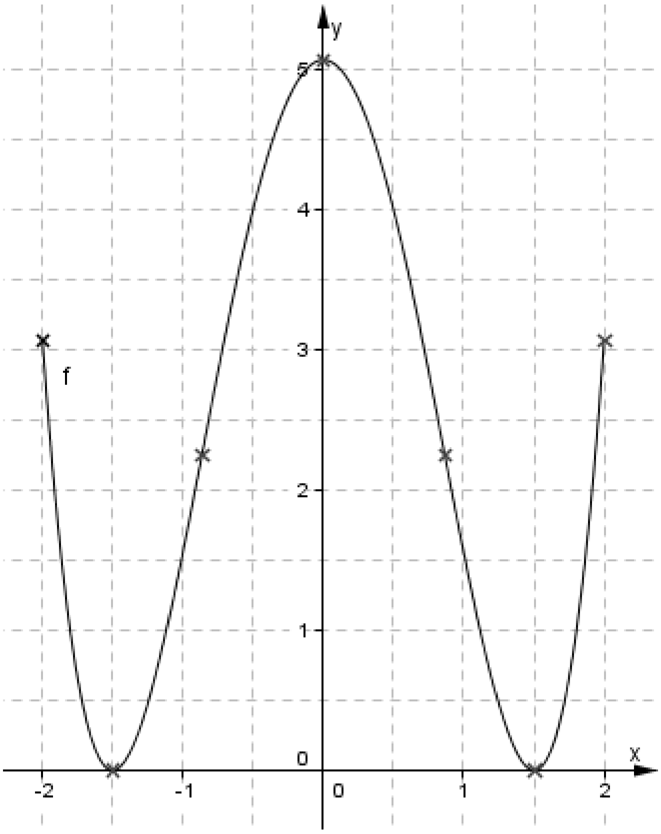
4.3 Der durchschnittliche Ertrag pro Hektar (ha) liegt bei 6,9 Tonnen (t). Wieviel Gerste wird von diesem Feld geerntet, wenn mit einem Ernteverlust von zwei Prozent zu rechnen ist? **/5**

4.4 Für welchen Wert des Parameters a ($a \in \mathbb{R}$) hat die vom Graphen der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + ax + 4$ und der x-Achse im Intervall $[1;4]$ eingeschlossene Fläche den Flächeninhalt 16,5 FE? **/4**

Abschlussprüfung Fachoberschule 2015
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
1.1	Die Exponenten von x sind nur gerade, der Graph ist achsen-symmetrisch zur y-Achse. oder $f(x) = f(-x)$	2		
	Der höchste Exponent der Variablen im Funktionsterm von f ist 4. Da a_4 im Summand a_4x^4 positiv ist, verläuft der Graph von „plus Unendlich“ nach „plus Unendlich“ oder $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$	2		
1.2	Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = 5{,}0625$; $S_y(0 \mid 5{,}0625)$	1		
	Nullstellen: $f(x) = 0$ $x^4 - 4{,}5x^2 + 5{,}0625 = 0$ Substitution $x^2 = z$ $z^2 - 4{,}5z + 5{,}0625 = 0$ p-q-Formel $z_{1/2} = 2{,}25$ Resubstitution $x = \pm\sqrt{z}$ $x_{N1} = 1{,}5$; $x_{N2} = -1{,}5$ Nullstellen		6	
1.3	Extrema $f'(x) = 4x^3 - 9x = 0$ notwendige Bedingung $x(4x^2 - 9) = 0 \Rightarrow$ $x_{E1} = 0$ mögliche Extremstelle und $4x^2 - 9 = 0$ $x_{E2} = 1{,}5; x_{E3} = -1{,}5$ mögliche Extremstellen $f''(x_E) = 12x^2 - 9 \neq 0$ Überprüfen der hinreichenden Bedingung für x_E $f''(0) = -9 < 0$ Maximum bei $x_{E1} = 0$ $f''(1{,}5) = 18 > 0$ Minimum bei $x_{E2} = 1{,}5$ $f''(-1{,}5) = 18 > 0$ Minimum bei $x_{E3} = -1{,}5$ $f(0) = 5{,}0625$ Hochpunkt $H(0 \mid 5{,}0625)$ $f(1{,}5) = 0$ Tiefpunkt $T_1(1{,}5 \mid 0)$ $f(-1{,}5) = 0$ Tiefpunkt $T_2(-1{,}5 \mid 0)$		9	

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung		BE in AB		
			I	II	III
noch 1.3	Wendepunkte $f''(x) = 12x^2 - 9 = 0$ $x_{W1} = 0{,}866; x_{W2} = -0{,}866$ $f'''(x) = 24x \neq 0$ $f'''(0{,}866) = 20{,}784 > 0$ $f'''(-0{,}866) = -20{,}784 < 0$ $f(0{,}866) = 2{,}25$ $f(-0{,}866) = 2{,}25$	 notwendige Bedingung mögliche Wendepunkte notw. und hinreichende Bedingung Wendepunkt bei $x_w = 0{,}866$ Wendepunkt bei $x_w = -0{,}866$ Wendepunkt $W_1(0{,}866 \mid 2{,}25)$ Wendepunkt $W_2(-0{,}866 \mid 2{,}25)$		6	
1.4	Randpunkte $f(-2) = 3{,}0625$ $f(2) = 3{,}0625$  	 linker Randpunkt $L(-2 \mid 3{,}0625)$ rechter Randpunkt $R(2 \mid 3{,}0625)$	1	4	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.5</td><td>$f(x)=p(x) \Rightarrow x^4-6{,}5x^2+6x-1{,}4375=0$</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$n(x)=0$, der Ansatz zum Bestimmen der Nullstellen von n, liefert dieselbe Gleichung wie $f(x)=p(x)$. Somit liefern Gleichsetzen der Funktionsterme von p und f bzw. das Bestimmen der Nullstellen von n die gleichen Lösungen.</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Näherungsverfahren
$n(x)=x^4-6{,}5x^2+6x-1{,}4375$, $n'(x)=4x^3-13x+6$
Startwert wählen; Berechnung
Algorithmus kennen und anwenden
(Bem.: Mögliche Lösung ist unten aufgeführt, auch andere Lösungsansätze sind denkbar.)

Beispielrechnung für Startwert 2
<table>
<tr><td>x_s - erste Näherung</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>x_n</td><td>$f(x_n)$</td><td>$f'(x_n)$</td><td>x_{n+1}</td><td>$f(x_{n+1})$</td></tr>
<tr><td>x_s</td><td>2</td><td>0,5625</td><td>12</td><td>1,953125</td><td>0,037633</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>1,953125</td><td>0,037633</td><td>10,4116974</td><td>1,94951051</td><td>0,00021374</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>1,94951051</td><td>0,00021374</td><td>10,2935335</td><td>1,94948974</td><td>7,0291E-09</td></tr>
</table></td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Die Funktionswerte der ermittelten Näherungen laufen gegen Null, durch das Verfahren nähern wir uns der Nullstelle an.</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Mögliche BE</td><td>7</td><td>30</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe Aufgabe</td><td colspan="3">40</td></tr>
</table>

Teilaufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
2.1	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $f'(x)=3ax^2+2bx+c$; $f''(x)=6ax+2b$ $f(2)=46$ Wendepunkt $f''(2)=0$ Wendepunkt $m_t=f'(2)=\frac{46-40}{2-0}=3$ Anstieg der Wendetangente $f(-1)=10$ Funktionswert an der Stelle Gleichungssystem: $8a+4b+2c+d=46$ $12a+2b=0$ $12a+4b+c=3$ $-a+b-c+d=10$	1	5 3	
2.2	Lösungen des Gleichungssystems berechnen $a=1$; $b=-6$; $c=15$; $d=32$ Funktionsgleichung: $f(x)=x^3-6x^2+15x+32$		6	
	Mögliche BE	1	14	0
	Summe Aufgabe		15	

Teilaufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
3.1	$A_\Delta=\frac{g\cdot h_g}{2}=\frac{(x-1)\cdot f(x)}{2}$; $A_4=4{,}5$ FE ; $A_{1,5}\approx 1{,}53$ FE		4	
3.2	Hauptbedingung $A(x)=\frac{(x-1)\cdot f(x)}{2}$ Nebenbedingung $f(x)=x^3-11x^2+35x-25$ Zielfunktion $A(x)=\frac{(x-1)\cdot(x^3-11x^2+35x-25)}{2}=0{,}5x^4-6x^3+23x^2-30x+12{,}5$		2 2 2	

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
3.3	Maxima bestimmen $A'(x) = 2x^3 - 18x^2 + 46x - 30 = 0$ $x_1 = 1$ Dreieck mit Flächeninhalt Null; planvolles Raten Polynomdivision $(0{,}5x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 30x + 12{,}5) : (x-1) = 2x^2 - 16x + 30$ $x_2 = 5$; $x_3 = 3$ pq-Formel $A''(x) = 6x^2 - 36x + 46$ $A''(1) = 16 > 0$ Minimum $A''(3) = -8 < 0$ Maximum $A''(5) = 16 > 0$ Minimum $A(3) = 8$ maximaler Flächeninhalt Der maximale Flächeninhalt von 8 FE wird an der Stelle $x = 3$ erreicht.		4 4	
	Mögliche BE	0	18	0
	Summe Aufgabe		18	

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
4.1	Flächeninhalt des Biotop A_{Biotop} Bestimmung der Schnittstellen der Graphen von g und p $g(x) = p(x)$; $0{,}6x^2 - 19{,}5x + 154 = 0$ $x_1 = 18{,}9695 \approx 19{,}0$; $x_2 = 13{,}5305 \approx 13{,}5$ $A_B = \int_{13{,}5}^{19{,}0} \left(g(x) - p(x)\right)dx = \left[-0{,}2x^3 + 9{,}75x^2 - 154x\right]_{13{,}5}^{19{,}0} \approx 16{,}09$ $A_{Biotop} = A_B \cdot 10\text{ m} \cdot 10\text{ m} \approx 1609\text{ m}^2$ Rund 1609 m^2 Nutzfläche sind zu gewinnen.		3 5	1
4.2	Flächeninhalt des Feldes A_{Feld} $A_F = \int_0^{40} n(x)dx + \int_{40}^{45} o(x)dx - A_B$ $A_F = \left[0{,}00015x^4 - 0{,}0133x^3 + 0{,}3x^2 + 10x\right]_0^{40}$ $+ \left[-0{,}0133x^3 + 0{,}86x^2 + 3{,}6x\right]_{40}^{45} - A_B$ $A_F = 410{,}6667 + 21{,}8333 - 16{,}09 = 416{,}41$ $A_{Feld} = A_F \cdot 10\text{ m} \cdot 10\text{ m} \approx 41641\text{ m}^2$ Das Feld besitzt eine Fläche von 41641 m^2.		2 6	1

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4.3	Ertrag E $E = A_{Feld} \cdot 6{,}9\,\frac{\text{t}}{\text{ha}} = 41641\,\text{m}^2 \cdot 6{,}9\,\frac{\text{t}}{\text{ha}} = 4{,}1641\,\text{ha} \cdot 6{,}9\,\frac{\text{t}}{\text{ha}} = 28{,}732\text{ t}$ Ertrag nach Ernteverlust E_V $E_V = E \cdot 0{,}98 = 28{,}157\text{ t}$ Es werden $28{,}157\text{ t}$ Gerste vom Feld geerntet.		4 1	
4.4	$\int_1^4 (-\frac{1}{2}x^2 + ax + 4)dx = 16{,}5$; $\left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + 4x\right]_1^4 = 16{,}5$ $\left(-\frac{1}{6}4^3 + \frac{a}{2}4^2 + 4 \cdot 4\right) - \left(-\frac{1}{6}1^3 + \frac{a}{2}1^2 + 4 \cdot 1\right) = 16{,}5$ $a = 2$			4
	Mögliche BE	0	21	6
	Summe Aufgabe	27		