Abschlussprüfung Fachoberschule 2015
Mathematik

Aufgabenvorschlag B

1 Funktionsuntersuchung /39

Gegeben ist die Funktion *f* mit der Funktionsgleichung $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

1.1 Berechnen Sie die Funktionswerte *f(x)* in der folgenden Wertetabelle: **/6**

x	-1,8	-1,7	1,7	1,8	2	2,1
f(x)						

Welche begründeten Aussagen können Sie aufgrund der Wertetabelle, also ohne weitere Berechnungen, über die Nullstellen der Funktion *f* machen?

1.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion *f*. **/7**

Bestimmen Sie, bei welchem *y*-Wert der Funktionsgraph G_f die *y*-Achse schneidet.

1.3 Untersuchen Sie den Graphen von *f* auf Symmetrie. Begründen Sie Ihre Aussage. **/4**

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von *f* im Unendlichen.

1.4 Bestimmen Sie die Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von *f*. **/13**

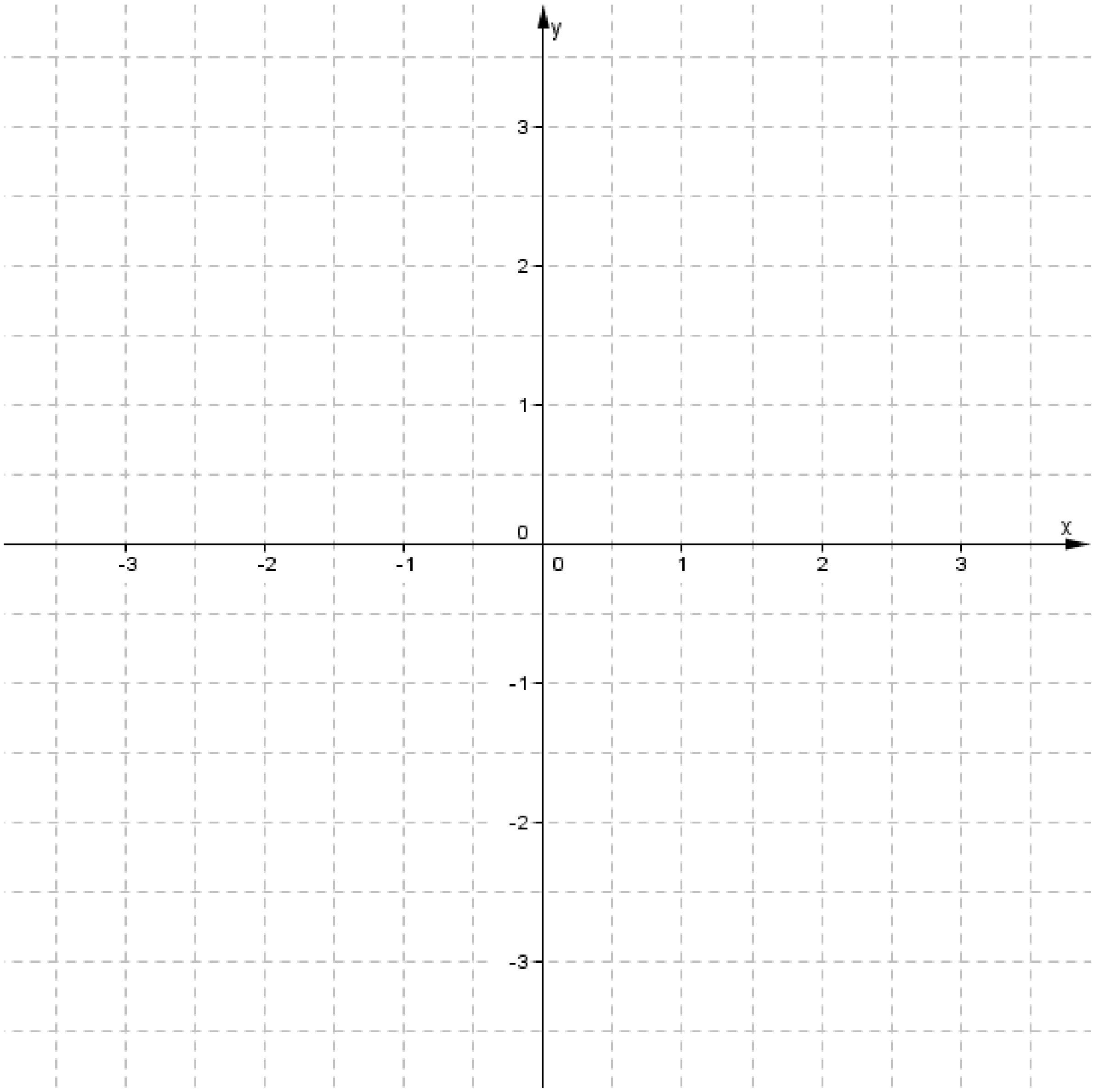
1.5 Zeichnen Sie den Graphen von *f* im Intervall $[-2;3]$ unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte aus 1.2 und 1.4. Berechnen Sie auch die Funktionswerte am Rand des Intervalls. **/5**
Nutzen Sie hierfür das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

1.6 Der Funktionsterm der Funktion *g* hat als Koeffizienten vor x^2 einen Parameter $u\in\mathbb{R}$. **/4**

$$g(x)=\frac{1}{4}x^3+ux^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$$

Bestimmen Sie diesen Koeffizienten so, dass die Funktion in $x=2$ eine Wendestelle besitzt.
Geben Sie die Koordinaten des Wendepunktes an.

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.5



2 Rekonstruktion /18

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades geht durch den Punkt $P(0|2)$.

Im Punkt $S(2|2)$ hat der Graph einen Sattelpunkt.

Die Normale im Punkt P hat die Steigung $m_n = -\frac{1}{4}$.

2.1 Beschreiben Sie, inwiefern ein Sattelpunkt ein „besonderer" Wendepunkt ist. **/2**

Fertigen Sie für Ihre Argumentation eine Skizze an.

2.2 Bestimmen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der Funktionsgleichung dieser Funktion f . **/10**

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist nicht erforderlich.

2.3 Lösen Sie stattdessen das folgende Gleichungssystem: **/6**

$$\begin{aligned} 32a + 16b + 8c &= -16 \\ 16a + 6b + 2c &= -2 \\ 24a + 6b + c &= 0 \\ d &= 4 \\ e &= 2 \end{aligned}$$

Notieren Sie als letzten Schritt dieser Aufgabe die gesuchte Funktionsgleichung $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ der Funktion *f*.

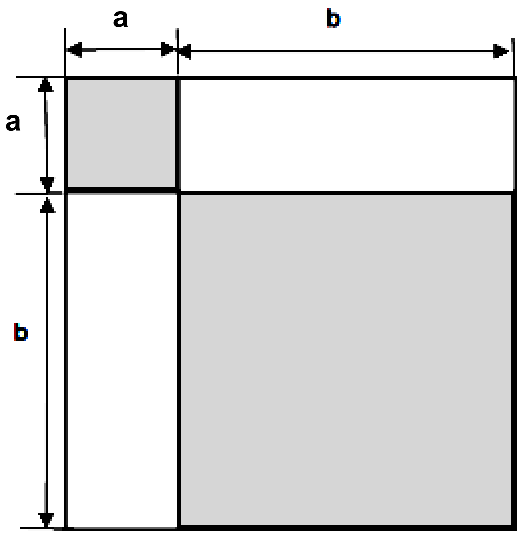
3 Extremwertaufgabe /13

Ein quadratisches Beet mit der Seitenlänge von 10 m soll zu einem Teil mit einer sehr wertvollen Rosenart bepflanzt werden.

Die Unterteilung des Gesamtbeetes erfolgt durch zwei Strecken, so dass sich immer zwei Quadrate bilden (s. Skizze).

Nur die grau gekennzeichneten Quadrate des Beetes werden mit den Rosen bepflanzt.

Da die Rosen sehr teuer sind, soll der mit Rosen bepflanzte Teil des Beetes möglichst klein sein.



3.1 Berechnen Sie in der Wertetabelle die Werte für *b* und die Gesamtgröße $a^2 + b^2$ des jeweils mit Rosen bepflanzten Teils des Beetes. /3

a	2,5	5	7,5
b			
$a^2 + b^2$			

3.2 Eine Mitschülerin sieht die ausgefüllte Wertetabelle und behauptet: „ *a* muss den Wert 5 annehmen“. Leider hat sie keinen Beweis für Ihre Behauptung. Sie notiert aber die folgende Zielfunktion: /6

$$A(a) = 2a^2 - 20a + 100$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion *A* die Zielfunktion für den Flächeninhalt ist.

Bestätigen Sie die Behauptung der Mitschülerin mit den Mitteln der Differentialrechnung.

3.3 Nachdem die Mitschülerin Ihren Beweis gesehen hat, sagt sie, dass man dieses Ergebnis auch ohne Differentialrechnung ermitteln könnte. /4

Sie notiert die folgenden beiden Zeilen:

$$A(a) = 2a^2 - 20a + 100$$

$$A(a) = 2(a-5)^2 + 50 \Rightarrow S\left(5 \;/\; 50\right) \Rightarrow a = 5 \Rightarrow \textit{Die Seite a ist 5 m lang.}$$

Erläutern Sie den mathematischen Hintergrund des von ihr gewählten Lösungsweges.

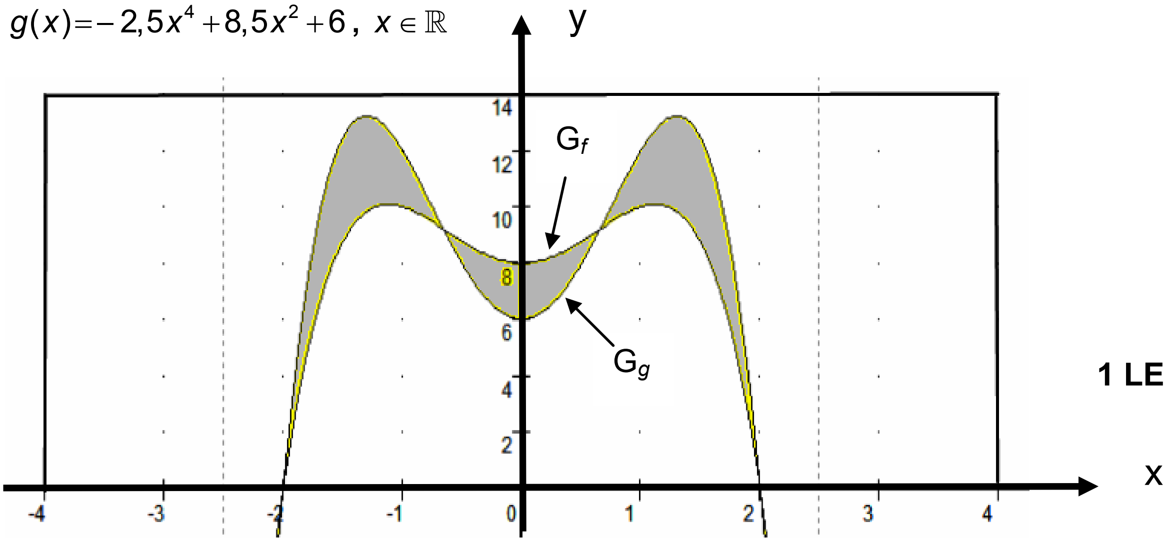
4 Integralrechnung /30

Die Seitenwand eines Gebäudes mit einer Höhe von 14 m und einer Breite von 8 m soll mit hochwertigen Materialien verkleidet werden. Das Firmenlogo der im Gebäude ansässigen Firma ist ein abgewandeltes „M“ (in der Skizze grau gefärbt).

Das Logo wird durch die Graphen G_f und G_g der folgenden Funktionen *f* und *g* begrenzt:

$$f(x) = -\frac{4}{3}x^4 + \frac{10}{3}x^2 + 8,\ x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = -2{,}5x^4 + 8{,}5x^2 + 6,\ x \in \mathbb{R}$$



1 LE = 1 m

4.1 Zeigen Sie durch Einsetzen, dass $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ die gemeinsamen Nullstellen der Funktionen *f* und *g* sind. **/2**

4.2 Berechnen Sie die Menge an Material in Quadratmetern, die benötigt wird, um die graue Farbfläche auszufüllen. **/15**

Falls Sie die weiteren notwendigen Schnittstellen der Funktionsgraphen G_f und G_g nicht bestimmen können, gehen Sie von $x_3 = -0{,}65$ und $x_4 = 0{,}65$ aus.

4.3 Berechnen Sie die Menge an Material in Quadratmetern, die benötigt wird, um die Fläche unterhalb des Logos auszufüllen. **/9**

4.4 Betrachtet wird das bestimmte Integral $I_a = \int_0^a (f(x) - g(x))\,dx,\ 0{,}65 < a < 2$. **/4**

Begründen Sie, dass es Werte für die obere Grenze a gibt, so dass I_a positiv ist, I_a negativ ist oder I_a gleich Null ist.

HINWEIS: Sie sollen keine bestimmten Werte für a berechnen!

Abschlussprüfung Fachoberschule 2015
Mathematik
Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

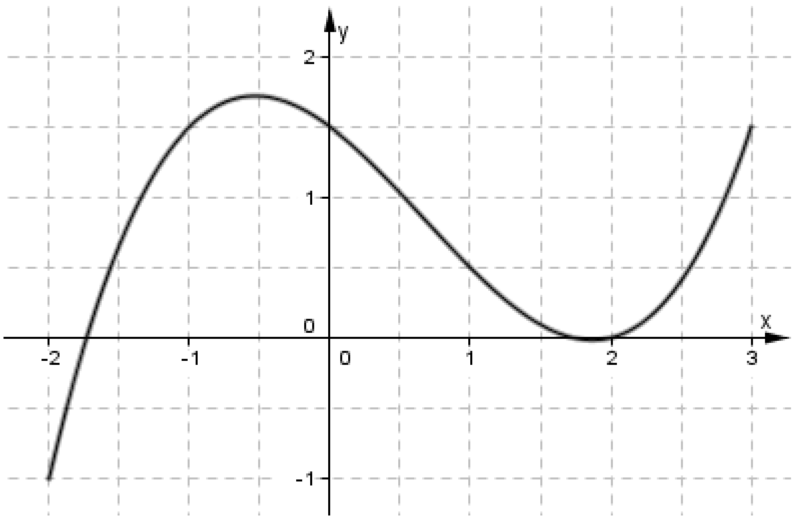
<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>

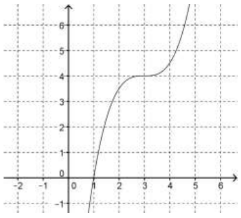
x	-1,8	-1,7	1,7	1,8	2	2,1
f(x)	-0,23	0,1	0,01	-0,01	0	0,04

Eine Nullstelle liegt bei x_1=2, wegen der wechselnden Vorzeichen der Funktionswerte liegen in den Intervallen [-1,8;-1,7] bzw. [1,7;1,8] die weiteren beiden Nullstellen.</td><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>

$f(x)=0=\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$
$0=x^3-2x^2-3x+6$
$x_1=2$ (nach der Wertetabelle oben)
Die Polynomdivision ergibt:
$(x^3-2x^2-3x+6):(x-2)=x^2-3$
$0=x^2-3\Rightarrow x_2=\sqrt{3}\approx 1{,}73\, und\; x_3=-\sqrt{3}\approx -1{,}73$
$f(0)=\frac{3}{2}\Rightarrow y_{S_y}=\frac{3}{2}$</td><td></td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>Der Graph G_f der Funktion *f* ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse, da im Funktionsterm sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen.

Der höchste Exponent im Funktionsterm von *f* ist 3.
Der Koeffizient von x^3 ist $\frac{1}{4}$, also positiv. Daher verläuft der Graph von „minus unendlich“ nach „plus unendlich“
oder
$f(x)\to+\infty$ für $x\to+\infty$ und $f(x)\to-\infty$ für $x\to-\infty$.</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>Bestimmung der Extrempunkte
$f'(x)=0=\frac{3}{4}x^2-x-\frac{3}{4}$ notwendige Bedingung
$x_1\approx 1{,}87\, und\; x_2\approx -0{,}54$ mögliche Extremstelle
$f''(x)=\frac{3}{2}x-1$
$f''(x_E)\neq 0$ Überprüfen der hinreichenden Bedingung
$f''(1{,}87)>0\Rightarrow T(1{,}87|-0{,}02)$ lokales Minimum bei $x_1=1{,}87$
$f''(-0{,}54)<0\Rightarrow H(-0{,}54|1{,}72)$ lokales Maximum bei $x_2=-0{,}54$</td><td></td><td>8</td><td></td></tr>
</table>

Teilaufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
noch 1.4	Bestimmung der Wendepunkte $f''(x)=0=\frac{3}{2}x-1$ notwendige Bedingung $x=\frac{2}{3}$ möglicher Wendepunkt $f'''(x)=\frac{3}{2}$ $f'''(x_W)\neq 0$ Überprüfen der hinreichenden Bedingung $f'''(\frac{2}{3})\neq 0 \Rightarrow W(\frac{2}{3}\|0,85)$ Wendepunkt		5	
1.5	Randpunkte $f(-2)=-1$ linker Randpunkt $L(-2\|-1)$ $f(3)=1{,}5$ rechter Randpunkt $R(3\|1{,}5)$ 		5	
1.6	$g(x)=\frac{1}{4}x^3+ux^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$; $g'(x)=\frac{3}{4}x^2+2ux-\frac{3}{4}$; $g''(x)=\frac{3}{2}x+2u$; $g'''(x)=\frac{3}{2}$ $g''(2)=0=\frac{3}{2}\cdot 2+2u \Rightarrow u=-\frac{3}{2}$; $g'''(2)\neq 0 \Rightarrow \textit{für}\ u=-\frac{3}{2}$ existiert bei x=2 eine Wendestelle $g(2)=-4$, *also* $W(2\|-4)$			4
		10	25	4
	Mögliche BE	39		
	Summe Aufgabe			

Teilaufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.1	Beispielskizze:  Die Steigung der Tangente im Sattelpunkt ist Null, es gilt also: $f'(x_W)=0$. Die Skizze muss deutlich einen Wendepunkt mit dieser zusätzlichen Eigenschaft zeigen.	2		
2.2	$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ und $f''(x)=12ax^2+6bx+2c$ $f(0)=2=e$ Punkt P $f'(0)=4=d$ $m_t=4$, da $m_o=-\frac{1}{4}$ $f(2)=2=16a+8b+4c+2d+e$ Punkt S $f'(2)=0=32a+12b+4c+d$ S ist Sattelpunkt $f''(2)=0=48a+12b+2c$ S ist Wendepunkt Das Gleichungssystem lautet: $16a+8b+4c=-8$ $32a+12b+4c=-4$ $48a+12b+2c=0$	1	9	
2.3	Lösungen des Gleichungssystems berechnen $a=-\frac{1}{2}$; $b=3$; $c=-6$ Funktionsgleichung: $f(x)=-\frac{1}{2}x^4+3x^3-6x^2+4x+2$		6	
	Mögliche BE	3	15	0
	Summe Aufgabe	18		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td><table><tr><td>a</td><td>2,5</td><td>5</td><td>7,5</td></tr><tr><td>b</td><td>7,5</td><td>5</td><td>2,5</td></tr><tr><td>$a^2 + b^2$</td><td>62,5</td><td>50</td><td>62,5</td></tr></table></td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>Hauptbedingung
$A(a,b)=a^2+b^2$
Nebenbedingung
$a+b=10$
Zielfunktion
$A(a)=a^2+(10-a)^2=a^2+100-20a+a^2=2a^2-20a+100$
Überprüfung der Behauptung:
$A'(a)=4a-20$ und $A''(a)=4$
$A'(5)=0$ und $A''(5)=4>0 \Rightarrow$ rel. Min. bei $a=5$
Damit ist die Behauptung der Schülerin bewiesen.</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>Zunächst erfolgt die Umwandlung in die Scheitelpunktform. Der Scheitelpunkt wird nun abgelesen. Bei der Zielfunktion handelt es sich um eine Parabel, der Scheitelpunkt der Parabel ist das Minimum der Zielfunktion und die x-Koordinate dieses Punktes ist der gesuchte Wert für die Seitenlänge a.</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Mögliche BE</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe Aufgabe</td><td colspan="3">13</td></tr>
</table>

Teilaufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
4.1	Es gilt: f(-2)=f(2)=0 sowie g(-2)=g(2)=0	2		
4.2	Bestimmung der Schnittstellen der Funktionsgraphen G_f und G_g: $f(x)=g(x)$ $0=-\frac{7}{6}x^4+\frac{31}{6}x^2-2$ $0=x^4-\frac{31}{7}x^2+\frac{12}{7}$ $\text{Substitution}: u=x^2$ $0=u^2-\frac{31}{7}u+\frac{12}{7}$ $u_1=4$ und $u_2\approx 0{,}43$ Resubstitution ergibt: $x_{1/2}=\pm 2$ und $x_{3/4}\approx\pm 0{,}65$		6	
	$A_G=2A_1+2A_2$ Die Differenzfunktion lautet: $d(x)=f(x)-g(x)=\frac{7}{6}x^4-\frac{31}{6}x^2+2$ $A_1=\int_0^{0{,}65} d(x)dx=\int_0^{0{,}65}(\frac{7}{6}x^4-\frac{31}{6}x^2+2)dx=\left[\frac{7}{30}x^5-\frac{31}{18}x^3+2x\right]_0^{0{,}65}\approx 0{,}85$ $A_2=\left\|\int_{0{,}65}^{2} d(x)dx\right\|=\left\|\int_{0{,}65}^{2}(\frac{7}{6}x^4-\frac{31}{6}x^2+2)dx\right\|=\left\|\left[\frac{7}{30}x^5-\frac{31}{18}x^3+2x\right]_{0{,}65}^{2}\right\|$ $\approx 3{,}16$ $A_G=2\cdot 0{,}85\ m^2+2\cdot 3{,}16\ m^2=8{,}02\ m^2$ Man benötigt 8,02 m^2 Material, um das Logo zu füllen.		9	
4.3	$A_u=2(\int_0^2 f(x)dx-A_1)$, A_1 muss berechnet werden, falls diese Fläche in 4.2 nicht berechnet wurde. $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(-\frac{4}{3}x^4+\frac{10}{3}x^2+8)dx=\left[-\frac{4}{15}x^5+\frac{10}{9}x^3+8x\right]_0^2\approx 16{,}36$ $A_u=2(16{,}36\ m^2-0{,}85\ m^2)=31{,}02\ m^2$ Man benötigt 31,02 m^2 Material, um die Fläche unterhalb des Logos zu füllen.		9	

Teilaufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
4.4	Das bestimmte Integral I_a kann wegen der Lage der Funktionsgraphen G_f und G_g im Intervall [0 ; 0,65] auf jeden Fall einen positiven Wert annehmen. Wenn die Fläche $A_a = \int_{0,65}^{a} (f(x) - g(x))\,dx$, die wegen der umgekehrten Lage der Funktionsgraphen G_f und G_g mit negativem Vorzeichen in die Gesamtberechnung eingeht, größer als die Fläche $A_1 = \int_{0}^{0,65} (f(x) - g(x))\,dx$ wird, ist auch ein negatives Ergebnis bzw. das Ergebnis Null möglich.			4
	Mögliche BE	2	24	4
	Summe Aufgabe	30		