Abschlussprüfung Fachoberschule 2015 Herbst
Mathematik

Aufgabenvorschlag B

1 Funktionsuntersuchung /40

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4\,;\, x \in \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion ist G_f.

1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten der Funktion f und begründen Sie Ihre Aussage.
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen. **/4**

1.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der y-Achse. **/2**

1.3 Die Funktion hat bei $x = -1$ und $x = 4$ eine einfache und bei $x = 1$ eine doppelte Nullstelle.
Geben Sie einen Funktionsterm als Produkt aus Linearfaktoren an und prüfen Sie durch Ausmultiplizieren, dass dieser ein Funktionsterm für die Funktion f ist. **/4**

1.4 Bestimmen Sie die Hoch- und Tiefpunkte von G_f .
[Hinweis: Geben Sie die Ergebnisse mit 3 Nachkommastellen an.] **/11**

1.5 Berechnen Sie die Wendepunkte von G_f und geben Sie die Art des Krümmungswechsels an. **/6**

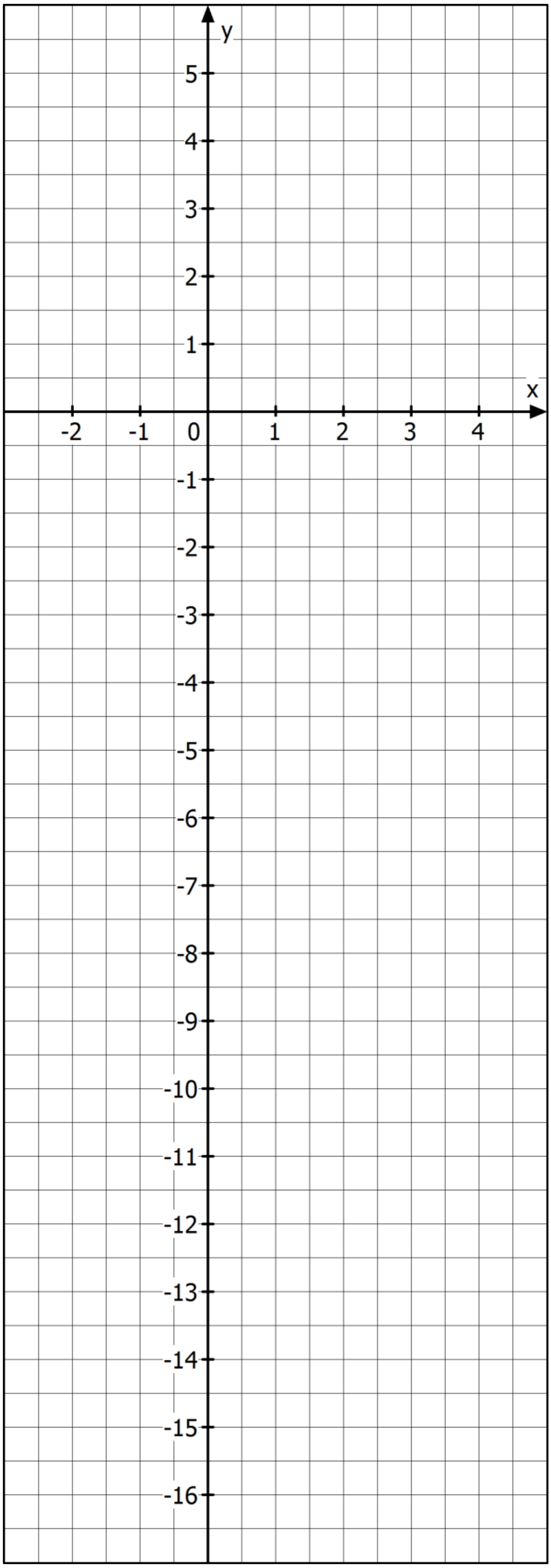
1.6 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $[-1{,}2\,;\,4{,}1]$ unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte.
Berechnen Sie auch die Funktionswerte der Intervallgrenzen.
Verwenden Sie das Koordinatensystem auf der folgenden Seite. **/5**

1.7 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Tangente t der Funktion f an der Stelle $x = 0$.
[zur Kontrolle: $t(x) = 5x - 4$] **/4**

1.8 Weisen Sie nach, dass G_f und der Graph von t zwei Schnittpunkte haben für $x > 0$. **/4**

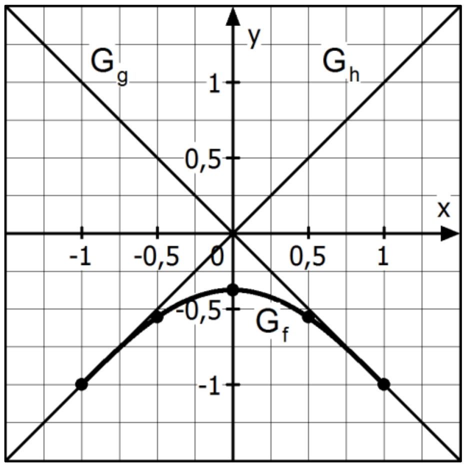
Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.6:



2 Rekonstruktion /15

Zwischen zwei senkrecht aufeinander stehenden Geraden mit $g(x) = -x$ und $h(x) = x$ wird zwischen $x = -1$ und $x = 1$ der Graph G_f einer symmetrischen Funktion 4. Grades eingesetzt.



G_f schneidet die y-Achse bei $n = -\frac{3}{8}$,

den Graphen von g bei $x = 1$ und
den Graphen von h bei $x = -1$.

Für die zugehörige Funktion f gilt:
$f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = -\frac{71}{128}$.

2.1 Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f. **/12**

Hinweis: Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, dann lösen Sie das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion *f*.

$$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

-3/4	=				2e
-5/4	=	2a	+	2c	
-23/4	=	2a	+	8c	

[zur Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}$]

2.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $T(\frac{1}{2} \mid f(\frac{1}{2}))$. **/3**

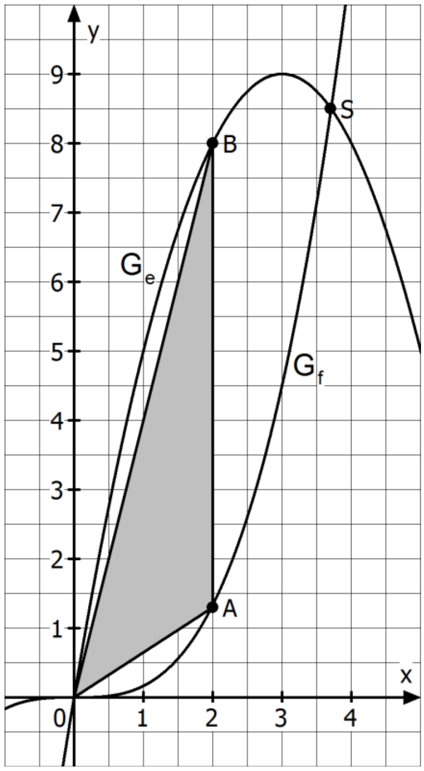
3 Extremwertaufgabe /15

Gegeben sind die Graphen der Funktionen *e* und *f* mit:

$e(x) = -x^2 + 6x$ und $f(x) = \frac{1}{6}x^3$.

Die Eckpunkte *A* und *B* des Dreiecks *OAB* sind die Schnittpunkte einer Parallelen zur *y*-Achse mit den Graphen von *e* bzw. *f*.

Der linke Eckpunkt O des Dreiecks liegt im Koordinatenursprung.



3.1 Bestimmen Sie die Zielfunktion *A*, mit der der Flächeninhalt des Dreiecks berechnet werden kann. /6

[zur Kontrolle: $A(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2$]

3.2 Bestimmen Sie, für welchen Wert x_{MAX} das Dreieck *OAB* den maximalen Flächeninhalt hat. /9

Berechnen Sie diesen Flächeninhalt.

4 Integralrechnung /30

Die nördliche Begrenzung eines zu bebauenden Grundstücks kann durch die Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{1}{10}\left(x^2 - 11x + 26{,}25\right)\cdot\left(x^2 - 15x\right)$$

beschrieben werden.
Nördlich dieses Grundstücks befindet sich Wald.

Die südliche Begrenzung ist eine Straße, die durch die Funktion h mit $h(x) = -60$ beschrieben wird.
Im Westen wird das Grundstück durch die Gerade $x = 0$ begrenzt, im Osten durch die Gerade $x = 15$.

Maßstab
x-Achse: $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{m}$
y-Achse: $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{m}$

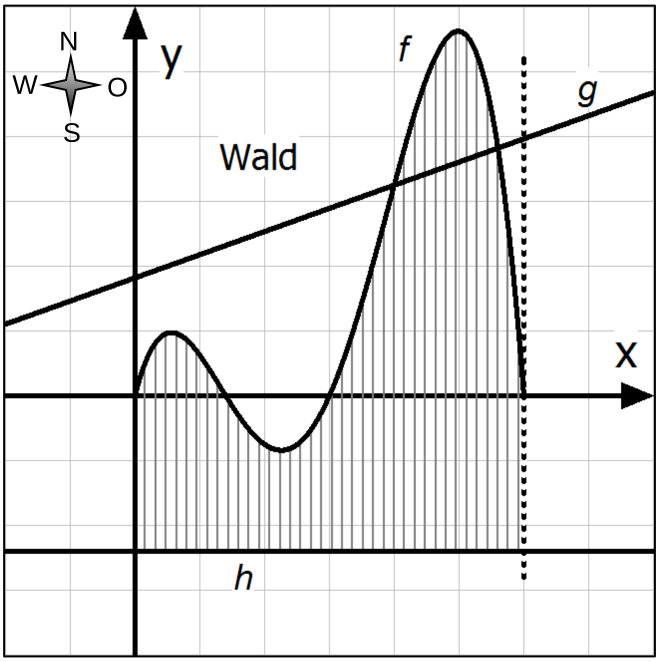


Abbildung: schematische Darstellung des Grundstücks

4.1 Berechnen Sie die Schnittstellen des Graphen von f mit der x-Achse. /6

[zur Kontrolle: $x_1 = 0$, $x_2 = 3{,}5$; $x_3 = 7{,}5$; $x_4 = 15$]

4.2 Berechnen Sie die Grundstücksfläche A in m^2. /12

[zur Kontrolle: $A \approx 1500\ \text{m}^2$]

4.3 Eine geplante nördliche Grundstücksbegradigung wird durch eine lineare Funktion g dargestellt. Diese schneidet den Graphen von f in den Punkten $P_1(10\,|\,81{,}25)$ und $P_2(14\,|\,95{,}55)$. /6

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g.

[zur Kontrolle: $g(x) = 3{,}575x + 45{,}5$]

4.4 Die nördlich der Linie (dargestellt durch den Graphen der Funktion g) liegende Grundstücksfläche wird mit Fichten bepflanzt und an das Forstamt gegeben. Im Austausch dafür erhält der Bauträger die südlich der Linie liegenden Flächen zur Abholzung und Bebauung. /6

Berechnen Sie die neue Gesamtfläche, die dem Bauträger nun zur Verfügung steht.

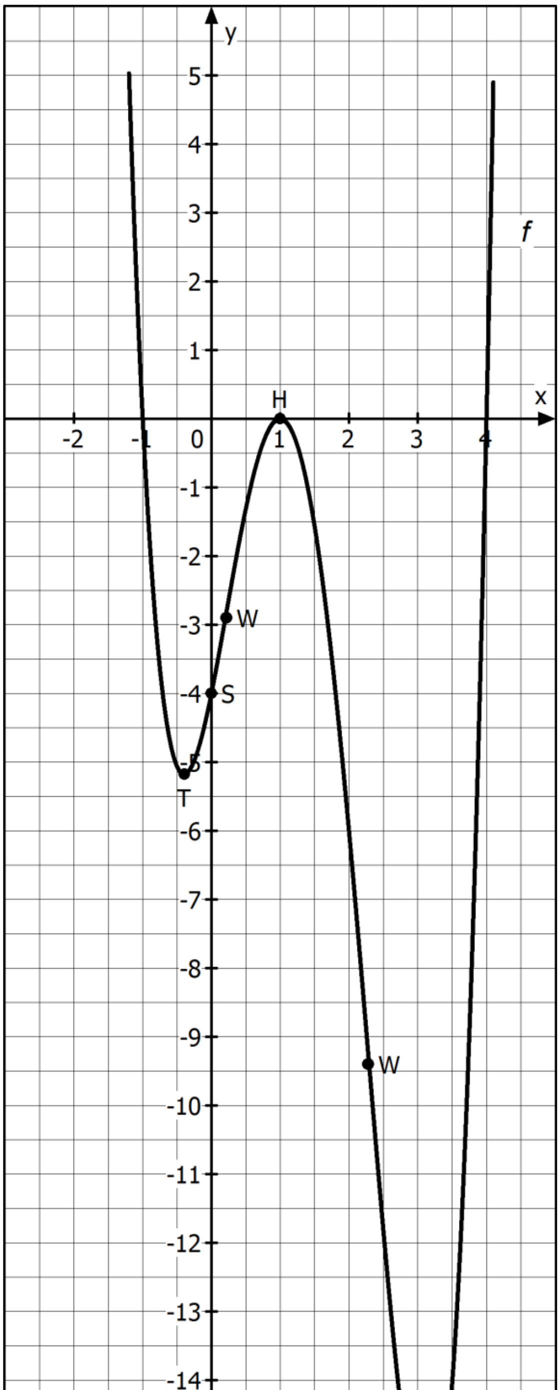
Berechnen Sie um wieviel Prozent sich dadurch die Grundstücksfläche vergrößert.

Abschlussprüfung Fachoberschule 2015 Herbst
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>Die Funktion f ist weder punkt- noch achsensymmetrisch, da gerade und ungerade Potenzen von x vorhanden sind
oder $f(x) \neq f(-x)$
$f(x) \neq -f(-x)$
Der Graph verläuft von „plus Unendlich“ nach „plus Unendlich“ oder
$f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$.</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>$f(0) = -4$; $S_y(0 \mid -4)$</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>$f(x) = (x+1)\cdot(x-4)\cdot(x-1)^2$
$= (x^2-3x-4)\cdot(x^2-2x+1)$
$= x^4-5x^3+3x^2+5x-4$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>$f'(x) = 4x^3-15x^2+6x+5$
$f'(x) = 0$
$x_{E1} = 1$
$(4x^3-15x^2+6x+5) \div (x-1) = 4x^2-11x-5$
$x^2 - \frac{11}{4}x - \frac{5}{4} = 0$
$x_{E2} = -0{,}395$; $x_{E3} = 3{,}145$
$f''(x) = 12x^2-30x+6$
$f''(-0{,}395) = 19{,}72 > 0$; Minimum bei $x_{E2} = -0{,}395$
$f''(1) = -12 < 0$; Maximum bei $x_{E1} = 1$
$f''(3{,}145) = 30{,}34 > 0$; Minimum bei $x_{E3} = 3{,}145$
$f(-0{,}395) = -5{,}174$; Tiefpunkt $T_1(-0{,}395 \mid -5{,}174)$
$f(1) = 0$; Hochpunkt $H_1(1 \mid 0)$
$f(3{,}145) = -16{,}306$; Tiefpunkt $T_2(3{,}145 \mid -16{,}306)$</td><td></td><td>5

6</td><td></td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>$f''(x) = 12x^2-30x+6 = 0$
$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = 0$
$x_{W1} = 0{,}22$; $x_{W2} = 2{,}28$
$f''' = 24x-30$
$f'''(0{,}22) = -24{,}72 < 0$; L-R-Wende
$f'''(2{,}28) = 24{,}72 > 0$; R-L-Wende
$f(0{,}22) = -2{,}9$; Wendepunkt $W_1(0{,}22 \mid -2{,}9)$
$f(2{,}28) = -9{,}4$; Wendepunkt $W_2(2{,}28 \mid -9{,}4)$</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.6</td><td>Randpunkte
$f(-1{,}2)=5{,}03$; linker Randpunkt $R_1(-1{,}2 \mid 5{,}03)$
$f(4{,}1)=4{,}9$; rechter Randpunkt $R_2(4{,}1 \mid 4{,}9)$

</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.7</td><td>Tangentenberechnung bei $x = 0$
$t(x) = m_t \cdot x + n$
$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 6x + 5$
$f'(0) = 5 = m_t \Rightarrow t(x) = 5 \cdot x + n$
$f(0) = -4 = t(0) \Rightarrow -4 = 5 \cdot 0 + n \quad \Rightarrow n = -4$
$t(x) = 5 \cdot x - 4$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1.8</td><td>$f(x) = t(x)$
$x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4 = 5x - 4$
$x^4 - 5x^3 + 3x^2 = 0$
$x^2 \cdot (x^2 - 5x + 3) = 0$
$x_{S0} = 0$; $x_{S1} \approx 0{,}7$; $x_{S2} \approx 4{,}3$
Schnittpunkte bei $x_{S1} \approx 0{,}7$ und $x_{S2} \approx 4{,}3$.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>9</td><td>31</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Summe der BE</td><td colspan="3">40</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
2.1	Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e;\ b = d = 0$ (aufgrund der Symmetrie) $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ Bedingungsgefüge: 1. $f(0) = -\frac{3}{8}$ (Graph schneidet die *y*-Achse bei $n = -\frac{3}{8}$) 2. $f(1) = -1$ (Schnittpunkt mit G_g) 3. $f(\frac{1}{2}) = -\frac{71}{128}$ Gleichungssystem: $\begin{array}{lllllll} \text{I.} & -3/8 & = & & & & e \\ \text{II.} & -5/8 & = & a & + & c & \\ \text{III.} & -23/8 & = & a & + & 4c & \end{array}$ Lösen des Gleichungssystems (auch Ersatz-LGS) ergibt: $a = \frac{1}{8};\ c = -\frac{3}{4};\ e = -\frac{3}{8}$ Für die Funktionsgleichung gilt: $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}$	2 1	3 5	
2.2	$t(x) = mx + n$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ $m = f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^3 - \frac{3}{2}(\frac{1}{2}) = -0{,}6875$ $n = -\frac{71}{128} + 0{,}6875 \cdot \frac{1}{2} \approx -0{,}21$ $t(x) = -0{,}6875x - 0{,}21$		4	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	3	12	0
	Summe der BE		15	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.1	Flächeninhalt eines Dreiecks allgemein: $A = \frac{1}{2}gh$ hier: Höhe h: x Grundseite $g: e(x) - f(x) = -x^2 + 6x - \frac{1}{6}x^3$ $A(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 6x - \frac{1}{6}x^3)x$ $A(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2$			6
3.2	$A(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2$ $A'(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x$ $A'(x) = 0$ $-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x = 0$ $x(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + 6) = 0$ $x_1 = 0$; $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + 6 = 0$ $x^2 + \frac{9}{2}x - 18 = 0$ $x_{2/3} = -\frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{4} + 18} = -\frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{369}{16}} = -\frac{9}{4} \pm \frac{\sqrt{369}}{4}$ $x_2 \approx 2{,}55$; $x_3 \approx -7{,}05$ (nicht im Intervall) $A(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2$ $A(x_2) = 7{,}7$	2	3 4	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	2	7	6
	Summe der BE	15		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Schnittstellen mit der x-Achse: Ansatz $f(x)=0$
$-\frac{1}{10}\cdot\left(x^2-11x+26{,}25\right)\cdot\left(x^2-15x\right)=0$
$\left(x^2-11x+26{,}25\right)\cdot\left(x^2-15x\right)=0$
$x\cdot(x-15)=0$ ergibt $x_1=0$ und $x_2=15$
$x^2-11x+26{,}25=0$
$x_3=3{,}5$ und $x_4=7{,}5$</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>$f(x)=\frac{-1}{10}\cdot\left(x^4-26x^3+191{,}25x^2-393{,}75x\right)$
$F(x)=\frac{-1}{10}\cdot\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{13}{2}x^4+\frac{255}{4}x^3-\frac{1575}{8}x^2\right)$
Ansatz für Flächenbilanz
$A_{ges}=A_1-A_2+A_3+A_4$
$A_1=\left\lvert\int_0^{3{,}5}f(x)\mathrm{d}x\right\rvert=\lvert 54{,}88-0\rvert\approx 55\ \mathrm{m}^2$
$A_2=\left\lvert\int_{3{,}5}^{7{,}5}f(x)\mathrm{d}x\right\rvert=\lvert 0-54{,}88\rvert\approx 55\ \mathrm{m}^2$
$A_3=\left\lvert\int_{7{,}5}^{15}f(x)\mathrm{d}x\right\rvert=\lvert 632{,}8125-0\rvert\approx 633\ \mathrm{m}^2$
$A_4=15\cdot 60=900\ \mathrm{m}^2$
$A_{ges}=A_1-A_2+A_3+A_4=1533\ \mathrm{m}^2$
Die Grundstücksfläche beträgt 1533 m^2.</td><td></td><td>3
3
2
2
1
1</td><td></td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>$g(x)=m\cdot x+n$
$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{95{,}55-81{,}25}{14-10}=\frac{143}{40}=3{,}575$
$g(x)=3{,}575\cdot x+n$
$g(10)=10\cdot 3{,}575+n=81{,}25$
$35{,}75+n=81{,}25$
$n=45{,}5$
$g(x)=3{,}575\cdot x+45{,}5$</td><td>6</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
4.4	$A_{neu} = A_4 + A_5$ $A_5 = \int_0^{15} g(x)\mathrm{d}x = \left[1{,}7875x^2 + 45{,}5x\right]_0^{15} = \left[1084{,}6875 - 0\right] \approx 1085\,\mathrm{m}^2$ $A_4 = 900\,\mathrm{m}^2$ $A_{neu} = 1985\,\mathrm{m}^2$ $\frac{x}{1985\,\mathrm{m}^2} = \frac{100\%}{1533\,\mathrm{m}^2}$		4	
	$x \approx 130\%$ Die Grundstücksfläche vergrößert sich dadurch um 30 Prozent.		2	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	6	24	0
	Summe der BE	30		