

Analysis Aufgabe aus Abiturprüfung Bayern GK (abgeändert)

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (1 - x^2)e^{\frac{1}{2}(3-x^2)}$.

a) Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie, ermitteln Sie die Nullstellen von f und bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \rightarrow \infty$.

(Hinweis: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ darf ohne Beweis verwendet werden.)

b) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f , und geben Sie Art und Lage der Extrempunkte an.

[zur Kontrolle: $f'(x) = (x^3 - 3x)e^{\frac{1}{2}(3-x^2)}$]

c) Zeichnen Sie den Graphen von f .

d) Die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x -Achse und ein weiterer, beliebiger Punkt des Graphen bestimmen ein Dreieck. Ermitteln Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Punkt P , für den das Dreieck maximalen Flächeninhalt besitzt. Geben Sie auch diesen Inhalt an.

e) Weisen Sie nach, dass $F(x) = xe^{\frac{1}{2}(3-x^2)}$ eine Stammfunktion von f ist.

Bestimmen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von F .

Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.

Was bedeutet das Ergebnis geometrisch?

Aufgabe Lösungen aus Abiturprüfung Bayern GK

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (1 - x^2)e^{\frac{1}{2}(3-x^2)}$.

- a) Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie, ermitteln Sie die Nullstellen von f und bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \rightarrow \infty$.

(Hinweis: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ darf ohne Beweis verwendet werden.)

Graph symmetrisch zur y -Achse, Nullstellen: $x_1 = 1, x_2 = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

- b) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f , und geben Sie Art und Lage der Extrempunkte an.

[zur Kontrolle: $f'(x) = (x^3 - 3x)e^{\frac{1}{2}(3-x^2)}$]

$$-\infty < x < -\sqrt{3} : f'(x) < 0$$

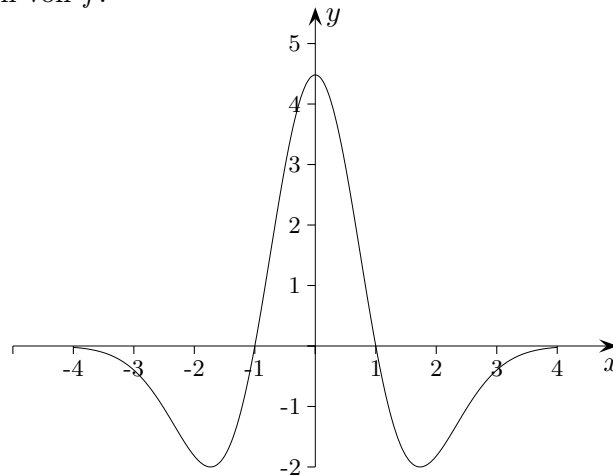
$$-\sqrt{3} < x < 0 : f'(x) > 0$$

$$0 < x < \sqrt{3} : f'(x) < 0$$

$$\sqrt{3} < x < +\infty : f'(x) > 0$$

$$\Rightarrow \text{Min}(-\sqrt{3} | -2), \text{Max}(0 | e^{1,5}), \text{Min}(\sqrt{3} | -2)$$

- c) Zeichnen Sie den Graphen von f .



- d) Die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x -Achse und ein weiterer, beliebiger Punkt des Graphen bestimmen ein Dreieck. Ermitteln Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Punkt P , für den das Dreieck maximalen Flächeninhalt besitzt. Geben Sie auch diesen Inhalt an.

unmittelbar einsichtig $P(0 | e^{1,5}), A = e^{1,5}$

- e) Weisen Sie nach, dass $F(x) = x e^{\frac{1}{2}(3-x^2)}$ eine Stammfunktion von f ist.

Bestimmen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von F .

$$E_1(-1 | -e), E_2(1 | e), W_1(-\sqrt{3} | -\sqrt{3}), W_2(0 | 0), W_3(\sqrt{3} | \sqrt{3})$$

Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0 \text{ siehe Hinweis 1.a)}$$

Was bedeutet das Ergebnis geometrisch?

Die vom Graphen mit der x -Achse eingeschlossenen Flächenstücke oberhalb und unterhalb der x -Achse sind gleich groß.

Analysis Aufgabe aus Abiturprüfung Bayern GK (abgeändert)

2. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = e - e^{k-\frac{x}{2}}$, $k \in \mathbb{R}$.
- a) Ermitteln Sie für allgemeines k die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und das Verhalten der f_k für $x \rightarrow -\infty$.
Zeigen Sie, dass die Gerade $h: y = e$ eine Asymptote der f_k für $x \rightarrow \infty$ ist und dass alle Graphen der Schar stets unterhalb von h verlaufen.
 - b) Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von f_k .
 - c) Für welche x -Werte unterscheidet sich $f_{-1}(x)$ von e um weniger als 0,1?
Zeichnen Sie den Graphen von f_{-1} .
 - d) Weisen Sie nach, dass $F_k(x) = e \cdot x + 2e^{k-\frac{x}{2}}$ eine Stammfunktion von f ist.
 - e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f_k , der x -Achse und der Geraden $x = 2k$ eingeschlossen wird.
 - f) Weisen Sie nach, dass die Graphen von f_k durch Verschiebung parallel zur x -Achse auseinander hervorgehen und stellen Sie den Bezug zur vorigen Teilaufgabe her.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $f_k(x - a) = f_{k^}(x)$ für ein geeignetes k^* ist.*
 - g) Die Funktionen der Schar f_k sind alle umkehrbar.
Begründen Sie dies und ermitteln Sie die Umkehrfunktionen und ihren Definitionsbereich.

Aufgabe Lösungen aus Abiturprüfung Bayern GK

2. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = e - e^{k-\frac{x}{2}}$, $k \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie für allgemeines k die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und das Verhalten der f_k für $x \rightarrow -\infty$.

Zeigen Sie, dass die Gerade $h: y = e$ eine Asymptote der f_k für $x \rightarrow \infty$ ist und dass alle Graphen der Schar stets unterhalb von h verlaufen.

Schnittpunkt mit der y -Achse: $P_k(0 \mid e - e^k)$, Schnittpunkt mit der x -Achse: $N_k(2k - 2 \mid 0)$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = e, \quad e - f_k(x) > 0$

b) Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von f_k .

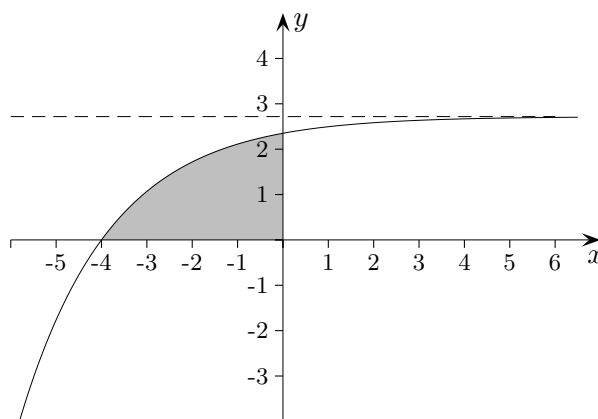
$$f'_k(x) = \frac{1}{2} e^{k-\frac{x}{2}} > 0 \implies f_k \text{ streng monoton steigend.}$$

$$f''_k(x) = -\frac{1}{4} e^{k-\frac{x}{2}} < 0 \implies f_k \text{ rechtsgekrümmt.}$$

c) Für welche x -Werte unterscheidet sich $f_{-1}(x)$ von e um weniger als 0,1?

Zeichnen Sie den Graphen von f_{-1} .

$$x > 2 \ln 10 - 2 = 2,61$$



d) Weisen Sie nach, dass $F_k(x) = e \cdot x + 2e^{k-\frac{x}{2}}$ eine Stammfunktion von f ist.

$$F'_k(x) = f_k(x)$$

e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f_k , der x -Achse und der Geraden $x = 2k$ eingeschlossen wird.

$$A_k = [F_k(x)]_{2k-2}^{2k} = 2$$

f) Weisen Sie nach, dass die Graphen von f_k durch Verschiebung parallel zur x -Achse auseinander hervorgehen und stellen Sie den Bezug zur vorigen Teilaufgabe her.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $f_k(x - a) = f_{k^*}(x)$ für ein geeignetes k^* ist.

$$k^* = k + \frac{a}{2}$$

Der Flächeninhalt ist unabhängig von k .

Die Breite der Flächenstücke ist stets $2k - (2k - 2) = 2$, sie gehen durch Verschiebung auseinander hervor.

g) Die Funktionen der Schar f_k sind alle umkehrbar.

Begründen Sie dies und ermitteln Sie die Umkehrfunktionen und ihren Definitionsbereich.

Graphen sind monoton steigend.

$$f_k^{-1}(x) = 2k - 2 \ln(e - x)$$

Definitionsbereich der Umkehrfunktionen: $D =] - \infty; e[$

Analysis Aufgabe aus Abiturprüfung Bayern GK (abgeändert)

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$.
- a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und das Verhalten von f für $x \rightarrow -\infty$.
 - b) Zeigen Sie, dass der Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. Geben Sie nun das Verhalten von f für $x \rightarrow \infty$ an.
 - c) Bilden Sie die 1. Ableitung. Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f .
 - d) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente im Ursprung. Zeichnen Sie den Graphen von f .
 - e) Begründen Sie, dass f umkehrbar ist und ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} und ihren Definitionsbereich.
 - f) Weisen Sie nach, dass $F(x) = x - \ln(1 + e^{2x})$ eine Stammfunktion von f ist.
 - g) Die Graphen von f und f^{-1} und die Geraden $x = -1$ und $y = 1$ begrenzen im II. Quadranten ein Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt.

Aufgabe Lösungen aus Abiturprüfung Bayern GK

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und das Verhalten von f für $x \rightarrow -\infty$.

$$\text{Nullstelle: } x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

b) Zeigen Sie, dass der Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.
Geben Sie nun das Verhalten von f für $x \rightarrow \infty$ an.

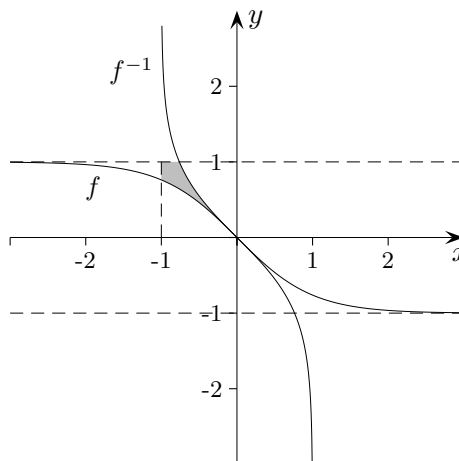
$$f(x) = -f(-x) \quad (\text{Umformung: mit } e^{2x} \text{ erweitern}), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$$

c) Bilden Sie die 1. Ableitung.
Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f .

$$f'(x) = \frac{-4e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} < 0, \quad f \text{ fällt streng monoton.}$$

d) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente im Ursprung.
Zeichnen Sie den Graphen von f .

$$y = -x$$



e) Begründen Sie, dass f umkehrbar ist und ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} und ihren Definitionsbereich.

$$\text{Graph ist monoton fallend, } f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad D =]-1; 1[$$

f) Weisen Sie nach, dass $F(x) = x - \ln(1 + e^{2x})$ eine Stammfunktion von f ist.

$$F'(x) = f(x)$$

g) Die Graphen von f und f^{-1} und die Geraden $x = -1$ und $y = 1$ begrenzen im II. Quadranten ein Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt.

$$[F(x)]_{-1}^0 = 1 - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2}) = 0,434$$

$$A = 1 - 2 \cdot \int_{-1}^0 f(x) dx = 0,13$$

Analysis Abiturprüfung Bayern GK 2000

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{4x}{e^{0,5x}}$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

G_f bezeichnet den Graphen von f .

1. a) Geben Sie die Nullstelle der Funktion an und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs. Geben Sie die Gleichung der horizontalen Asymptote von G_f an.
- b) Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von G_f . Ermitteln Sie Lage und Art des Extrempunkts sowie die Lage des Wendepunkts von G_f .

[zur Kontrolle: $f'(x) = e^{-0,5x}(4 - 2x)$]

- c) Die Gleichung der Wendetangente w lautet $y = \frac{-4}{e^2}x + \frac{32}{e^2}$.

Bestätigen Sie dies durch Rechnung und ermitteln Sie den spitzen Winkel (auf Grad genau), unter dem w die y -Achse schneidet.

- d) Berechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen $\frac{1}{2}$, 1 und 6.

Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f und die Wendetangente w im Bereich $-1 < x < 9$ (Längeneinheit: 1 cm).

2. a) Zeigen Sie, dass $F: x \rightarrow \frac{-8x - 16}{e^{0,5x}}$, $D_F = \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von f ist.

- b) Der Graph G_f , die x -Achse und die Gerade $x = 6$ schließen eine Fläche vom Inhalt A ein. Berechnen Sie A auf 2 Dezimalen gerundet.

3. Skizzieren Sie einen Anwendungszusammenhang beispielsweise aus den Naturwissenschaften oder der Wirtschaftslehre, in dem eine Funktion der Art $x \rightarrow a \cdot e^{bx}$ eine wichtige Rolle spielt ($a, b \neq 0$). Begründen Sie kurz, ob der Parameter b in dem von Ihnen beschriebenen Anwendungszusammenhang positiv oder negativ ist. Welche Bedeutung hat der Parameter a ?

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{4x}{e^{0,5x}}$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

G_f bezeichnet den Graphen von f .

1. a) Geben Sie die Nullstelle der Funktion an und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs. Geben Sie die Gleichung der horizontalen Asymptote von G_f an.

$$x = 0, \text{ Asymptote } y = 0$$

- b) Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von G_f . Ermitteln Sie Lage und Art des Extrempunkts sowie die Lage des Wendepunkts von G_f .

$$\left[\text{zur Kontrolle: } f'(x) = e^{-0,5x}(4 - 2x) \right]$$

streng monoton wachsend für $x < 2$

streng monoton fallend für $x > 2$

$$\text{Max}\left(2 \mid \frac{8}{e}\right)$$

$$f''(x) = (x - 4)e^{-\frac{x}{2}}$$

linksgekrümmt für $x > 4$

rechtsgekrümmt für $x < 4$

$$\text{W}\left(4 \mid \frac{16}{e^2}\right)$$

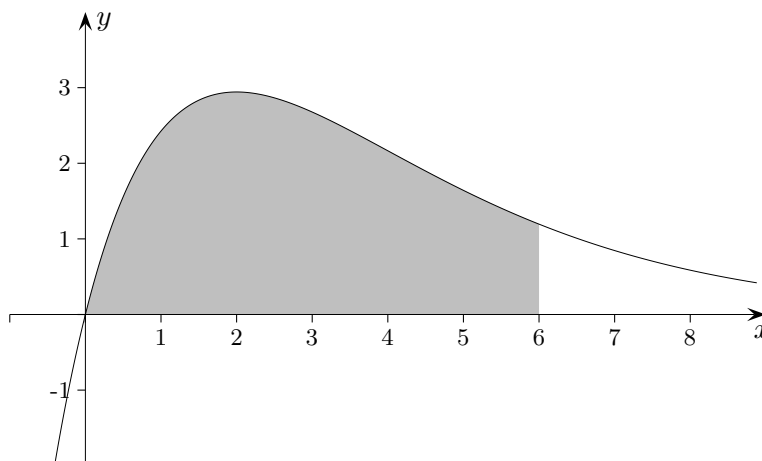
- c) Die Gleichung der Wendetangente w lautet $y = \frac{-4}{e^2}x + \frac{32}{e^2}$.

Bestätigen Sie dies durch Rechnung und ermitteln Sie den spitzen Winkel (auf Grad genau), unter dem w die y -Achse schneidet.

$$\alpha = 62^\circ$$

- d) Berechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen $\frac{1}{2}$, 1 und 6.

Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f und die Wendetangente w im Bereich $-1 < x < 9$ (Längeneinheit: 1 cm).



2. a) Zeigen Sie, dass $F: x \rightarrow \frac{-8x - 16}{e^{0,5x}}$, $D_F = \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von f ist.

- b) Der Graph G_f , die x -Achse und die Gerade $x = 6$ schließen eine Fläche vom Inhalt A ein. Berechnen Sie A auf 2 Dezimalen gerundet.

$$A = 12,81$$

3. ...