Firmenlogo-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2005

1. Im Eingangsbereich eines Unternehmens soll das Firmenlogo im Boden eingelassen werden. Abb. 1 zeigt den Entwurf des Architekten nach Wahl eines geeigneten Koordinatensystems:

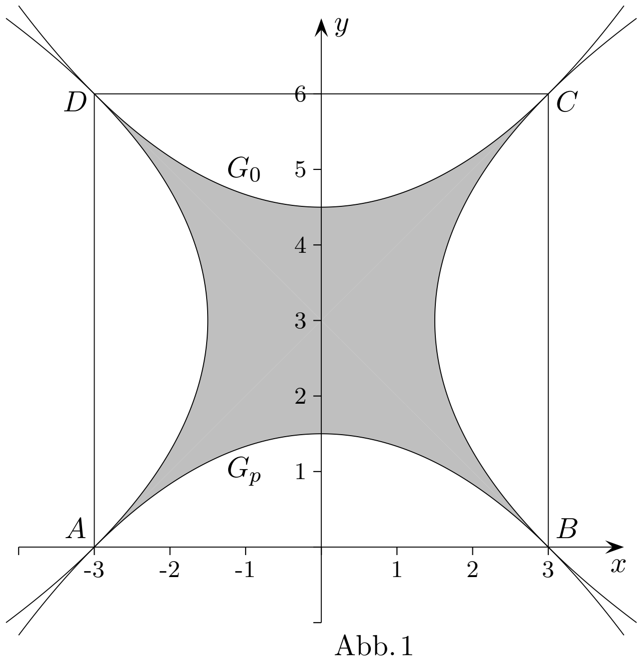

Abb. 1

Im Quadrat $ABCD$ schneiden vier kongruente parabelförmige Bögen die in Abb. 1 schraffierte Figur aus. Die untere Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion p mit $D_p = \mathbb{R}$. G_p schneidet die x-Achse in den Punkten $A(-3 \mid 0)$ und $B(3 \mid 0)$. Die Diagonalen des Quadrats sind zugleich Tangenten an die Parabeln in den Punkten A und C bzw. B und D.

a) Geben Sie die Werte der Ableitung von p in den beiden Nullstellen an und bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion p.

$\left[\text{ zur Kontrolle: } p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 1{,}5 \right]$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Figur, wenn die Seitenlänge des Quadrats $ABCD$ in der Eingangshalle $6\,m$ beträgt.

2. Die Graphen der linken, rechten und oberen Parabel in Abb. 1 gehen aus G_p durch Spiegelung und Verschiebung hervor. Daher können die zugehörigen Funktionsterme aus dem Funktionsterm von p entwickelt werden.

a) Erklären Sie zunächst allgemein, wie die Graphen zu den Zuordnungsvorschriften $x \to p(x) + a$ bzw. $x \to p(x + a)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ durch Verschiebung aus G_p entstehen.

b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass zum Graphen G_0 der oberen Parabel in Abb. 1 die Zuordnungsvorschrift $x \to -p(x) + 6$ gehört.

c) p ist in $[0; +\infty[$ umkehrbar. Ergänzen Sie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion p^{-1} in Abb. 1. Kennzeichnen Sie in Abb. 1 den Teil der Umrandung der schraffierten Figur, zu dem die Zuordnungsvorschrift $x \to p^{-1}(x + 3) + 3$ gehört.

(Fortsetzung nächste Seite)

3. Betrachtet wird nun die Funktion $f(x) = \dfrac{p(x)}{x^2} = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{1{,}5}{x^2}$ mit $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(mit p aus Aufgabe 1). Der Graph G_f der Funktion f ist zusammen mit G_p in Abb. 2 dargestellt. Gemäß der Definition von f stimmen die Nullstellen von f mit den Nullstellen von p überein.

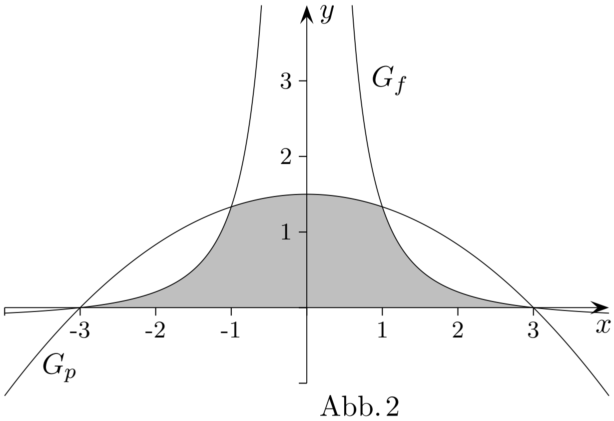

Abb. 2

a) Weisen Sie nach, dass G_f achsensymmetrisch ist und untersuchen Sie das Verhalten von G_f für $x \to +\infty$.

b) Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten an G_f in den beiden Nullstellen.

c) Bestätigen Sie, dass $S\left(1 \mid \frac{4}{3}\right)$ ein weiterer Schnittpunkt von G_f und G_p ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt des in Abb. 2 schraffierten Flächenstücks, das von G_f, G_p und der x-Achse begrenzt wird.

1. Im Eingangsbereich eines Unternehmens soll das Firmenlogo im Boden eingelassen werden. Abb. 1 zeigt den Entwurf des Architekten nach Wahl eines geeigneten Koordinatensystems:

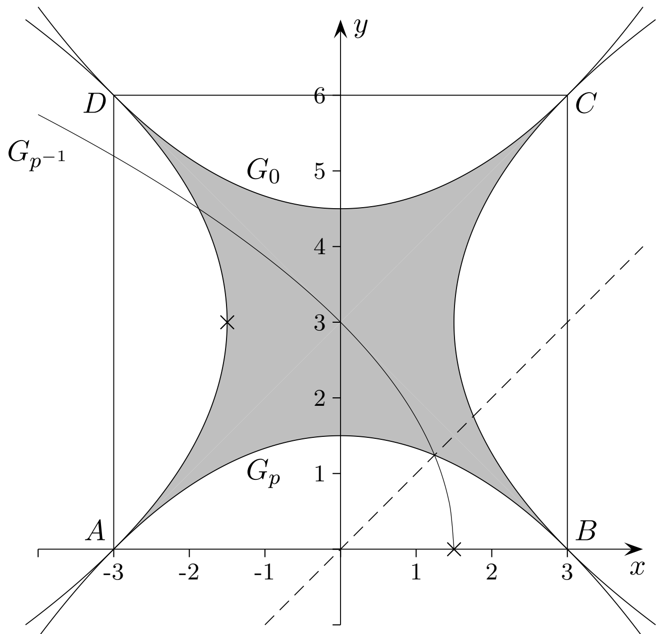

Abb. 1

Im Quadrat $ABCD$ schneiden vier kongruente parabelförmige Bögen die in Abb. 1 schraffierte Figur aus. Die untere Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion p mit $D_p = \mathbb{R}$. G_p schneidet die x-Achse in den Punkten $A(-3 \mid 0)$ und $B(3 \mid 0)$. Die Diagonalen des Quadrats sind zugleich Tangenten an die Parabeln in den Punkten A und C bzw. B und D.

a) Geben Sie die Werte der Ableitung von p in den beiden Nullstellen an und bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion p.

$p(x) = ax^2 + b$ *(Graph achsensymmetrisch)*, $p(3) = 0$, $p'(-3) = 1 \implies p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 1{,}5$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Figur, wenn die Seitenlänge des Quadrats $ABCD$ in der Eingangshalle $6\,m$ beträgt.

$$36 - 8 \cdot \int_0^3 p(x)\,dx = 12$$

2. Die Graphen der linken, rechten und oberen Parabel in Abb. 1 gehen aus G_p durch Spiegelung und Verschiebung hervor. Daher können die zugehörigen Funktionsterme aus dem Funktionsterm von p entwickelt werden.

a) Erklären Sie zunächst allgemein, wie die Graphen zu den Zuordnungsvorschriften $x \to p(x) + a$ bzw. $x \to p(x + a)$ mit a, $b \in \mathbb{R}^+$ durch Verschiebung aus G_p entstehen.

b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass zum Graphen G_0 der oberen Parabel in Abb. 1 die Zuordnungsvorschrift $x \to -p(x) + 6$ gehört.

c) p ist in $[0; +\infty[$ umkehrbar. Ergänzen Sie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion p^{-1} in Abb. 1. Kennzeichnen Sie in Abb. 1 den Teil der Umrandung der schraffierten Figur, zu dem die Zuordnungsvorschrift $x \to p^{-1}(x + 3) + 3$ gehört.

Der Graph von p^{-1} wird um 3 nach links und um 3 nach oben verschoben.

3. Betrachtet wird nun die Funktion $f(x) = \dfrac{p(x)}{x^2} = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{1{,}5}{x^2}$ mit $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (mit p aus Aufgabe 1). Der Graph G_f der Funktion f ist zusammen mit G_p in Abb. 2 dargestellt. Gemäß der Definition von f stimmen die Nullstellen von f mit den Nullstellen von p überein.

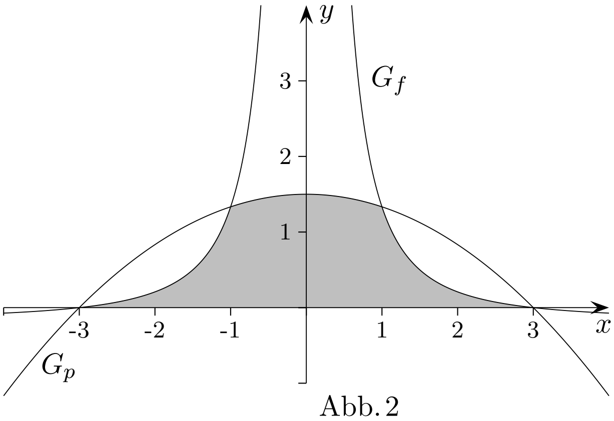

Abb. 2

a) Weisen Sie nach, dass G_f achsensymmetrisch ist und untersuchen Sie das Verhalten von G_f für $x \to +\infty$.

$$f(x) = f(-x)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1{,}5}{x^2}\right) = -\frac{1}{6}$$

b) Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten an G_f in den beiden Nullstellen.

an der Stelle $x = -3$: $y = \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$

an der Stelle $x = 3$: $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$

c) Bestätigen Sie, dass $S\left(1 \mid \frac{4}{3}\right)$ ein weiterer Schnittpunkt von G_f und G_p ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt des in Abb. 2 schraffierten Flächenstücks, das von G_f, G_p und der x-Achse begrenzt wird.

$$f(x) = p(x) \quad\Longrightarrow\quad x^2 = 1$$

$$2 \cdot \left(\int_0^1 p(x)\,dx + \underbrace{\int_1^3 f(x)\,dx}_{\frac{2}{3}} \right) = \frac{38}{9}$$