

Mikrochip-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2001

Der Konzern „Electronix“ stellt Mikrochips in Massenproduktion her. Jeder hergestellte Chip ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % fehlerhaft.

1.
 - a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 100 Chips genau 15 fehlerhaft?
 - b) Bestimmen Sie mit Hilfe des GTR (im Original mit Hilfe des Tabellenwerks) das kleinstmögliche Intervall mit dem Mittelpunkt 15, in dem bei insgesamt 100 Chips die Anzahl der fehlerhaften Chips mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85 % liegt.
 - c) Wie viele Chips müssen der Produktion mindestens entnommen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens ein fehlerhafter dabei ist?
2. Zur Aussonderung fehlerhafter Chips wird ein Prüfgerät eingesetzt, von dem Folgendes bekannt ist: Unter allen geprüften Chips beträgt der Anteil der Chips, die einwandfrei sind und dennoch ausgesondert werden, 3%. Insgesamt werden 83% aller Chips nicht ausgesondert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Chip fehlerhaft ist und ausgesondert wird. Welcher Anteil der fehlerhaften Chips wird demnach ausgesondert?
3. Der Konzern beauftragt ein Expertenteam mit Maßnahmen zur Qualitätsverbesserung. Falls der Anteil der fehlerhaften Chips deutlich gesenkt werden kann, wird dem Team eine Prämie gezahlt. Nach Abschluss der Verbesserungsmaßnahmen wird der Produktion eine Stichprobe von 200 Chips entnommen. Befinden sich darunter höchstens 22 fehlerhafte, wird die Prämie gewährt.
 - a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält das Team die Prämie, obwohl keine Qualitätsverbesserung eingetreten ist?
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dem Team die Prämie verweigert, obwohl der Anteil der fehlerhaften Chips auf 10 % gesunken ist?

Die nebenstehende Tabelle gibt Auskunft über die Zusammensetzung des Expertenteams. Nach Abschluss ihrer Arbeiten treffen sich die 12 Mitglieder des Teams zu einem Abschiedsabend.

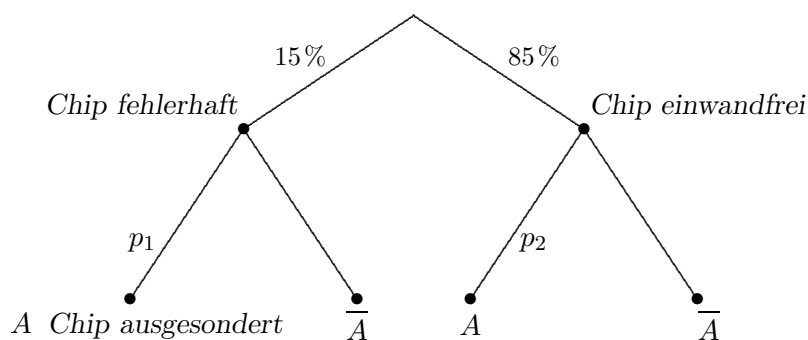
	Frauen	Männer
Deutsche	3	2
Engländer	2	1
Franzosen	1	3

4. In einem Lokal sind ein Vierertisch und ein Achtertisch reserviert. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Tische zu besetzen, wenn es auf die Sitzordnung an den einzelnen Tischen nicht ankommt und wenn an jedem Tisch
 - a) gleich viele Männer und Frauen sitzen sollen?
 - b) mindestens zwei deutsche Mitglieder sitzen sollen?
5. Zu vorgerückter Stunde wird getanzt. Die Tanzpaarungen werden auf folgende Weise ausgelost: In einem Hut befinden sich 6 gefaltete Zettel mit den Namen der Damen. Die Herren ziehen nacheinander zufällig je einen Zettel. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den 6 Tanzpaaren genau zwei deutsche Paare befinden.

Mikrochip-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2001 Lösungen

Der Konzern „Electronix“ stellt Mikrochips in Massenproduktion her. Jeder hergestellte Chip ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % fehlerhaft.

1. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 100 Chips genau 15 fehlerhaft? $P_{0,15}^{100}(X = 15) = 11,1\%$
 - b) Bestimmen Sie mit Hilfe des GTR (im Original mit Hilfe des Tabellenwerks) das kleinstmögliche Intervall mit dem Mittelpunkt 15, in dem bei insgesamt 100 Chips die Anzahl der fehlerhaften Chips mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85 % liegt. $[15 - k, 15 + k]$
 $k = 5, \quad P(10 \leq X \leq 20) = 87,9\%$
 - c) Wie viele Chips müssen der Produktion mindestens entnommen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens ein fehlerhafter dabei ist?
 $P_{0,15}^n(Y \geq 1) = 1 - P_{0,15}^n(Y = 0) = 1 - 0,85^n > 99\% \implies n \geq 29$
2. Zur Aussonderung fehlerhafter Chips wird ein Prüfgerät eingesetzt, von dem Folgendes bekannt ist: Unter allen geprüften Chips beträgt der Anteil der Chips, die einwandfrei sind und dennoch ausgesondert werden, 3%. Insgesamt werden 83% aller Chips nicht ausgesondert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Chip fehlerhaft ist und ausgesondert wird. Welcher Anteil der fehlerhaften Chips wird demnach ausgesondert?



$$\begin{aligned}
 p_2 \cdot 85\% &= 3\% \implies p_2 = 3,5\% \\
 p_1 \cdot 15\% + p_2 \cdot 85\% &= 17\% \implies p_1 = 93,3\%
 \end{aligned}$$

3. Der Konzern beauftragt ein Expertenteam mit Maßnahmen zur Qualitätsverbesserung. Falls der Anteil der fehlerhaften Chips deutlich gesenkt werden kann, wird dem Team eine Prämie gezahlt. Nach Abschluss der Verbesserungsmaßnahmen wird der Produktion eine Stichprobe von 200 Chips entnommen. Befinden sich darunter höchstens 22 fehlerhafte, wird die Prämie gewährt.
 - a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält das Team die Prämie, obwohl keine Qualitätsverbesserung eingetreten ist? $P_{0,15}^{200}(Z \leq 22) = 6,5\%$
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dem Team die Prämie verweigert, obwohl der Anteil der fehlerhaften Chips auf 10 % gesunken ist? $P_{0,10}^{200}(Z \geq 23) = 27,1\%$

Mikrochip-Aufgabe Lösungen Fortsetzung

Die nebenstehende Tabelle gibt Auskunft über die Zusammensetzung des Expertenteams.

Nach Abschluss ihrer Arbeiten treffen sich die 12 Mitglieder des Teams zu einem Abschiedsabend.

	Frauen	Männer
Deutsche	3	2
Engländer	2	1
Franzosen	1	3

4. In einem Lokal sind ein Vierertisch und ein Achtertisch reserviert. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Tische zu besetzen, wenn es auf die Sitzordnung an den einzelnen Tischen nicht ankommt und wenn an jedem Tisch

a) gleich viele Männer und Frauen sitzen sollen?

Vierertisch: $\binom{6}{2} \cdot \binom{6}{2} = 225$

b) mindestens zwei deutsche Mitglieder sitzen sollen?

Vierertisch: entweder zwei oder drei deutsche Teilnehmer

$\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} + \binom{5}{3} \cdot \binom{7}{1} = 280$

5. Zu vorgerückter Stunde wird getanzt. Die Tanzpaarungen werden auf folgende Weise ausgelost: In einem Hut befinden sich 6 gefaltete Zettel mit den Namen der Damen. Die Herren ziehen nacheinander zufällig je einen Zettel. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den 6 Tanzpaaren genau zwei deutsche Paare befinden.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = 20\%$

Der erste deutsche Mann trifft auf eine Deutsche mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$,

der Zweite mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$.

Gesangverein-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2001

Ein Gesangverein hat 30 weibliche und 20 männliche Mitglieder. Die Zahl der Anwesenden bei der wöchentlichen Chorprobe schwankt von Mal zu Mal. Um diese Schwankung durch ein Modell zu beschreiben, soll davon ausgegangen werden, dass die Mitglieder unabhängig voneinander und jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 85% an einer Probe teilnehmen.

1.
 - a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Chorprobe mindestens 40 Mitglieder anwesend sind?
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlen bei einer Chorprobe 6 Sängerinnen und 4 Sänger?
 - c) Für die nächste Chorprobe haben sich 5 Mitglieder entschuldigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlt bei dieser Probe höchstens noch ein weiteres Chormitglied?
 - d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlt bei einer Chorprobe von den Sängerinnen Sandra und Simone entweder die eine oder die andere?
 - e) Wie viele Chorproben müssen mindestens stattfinden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens einmal alle 5 Tenöre des Vereins gemeinsam anzutreffen sind?
2. Der Chorleiter vermutet, dass die Anwesenheitsquote unter 85% gefallen ist. Um diese Vermutung zu überprüfen, soll die Nullhypothese $H_0: p \geq 0,85$ auf dem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Dazu wird bei vier Chorproben jeweils die Anzahl der Anwesenden festgestellt. Die Entscheidung soll aufgrund der Summe dieser vier Zahlen getroffen werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.
3. Die beiden anfangs genannten und bisher verwendeten Modellannahmen für das Vorliegen einer Bernoullikette können in der Realität unzutreffend sein. Erläutern Sie dies anhand je eines konkreten Beispiels.
4. Unter den 20 Männern des Vereins sind fünf Tenöre, acht Baritone und sieben Bässe. Bei einer Veranstaltung singen ein Tenor, zwei Baritone und zwei Bässe in einem Quintett.
 - a) Wie viele verschiedene Zusammenstellungen des Quintetts aus den Sängern des Vereins sind hierfür möglich?
 - b) Nach ihrem Auftritt stellen sich die 5 Sänger nebeneinander auf und verbeugen sich. Wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es dafür, wenn die 2 Bässe nebeneinander stehen wollen?

Gesangverein-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2001 Lösungen

Ein Gesangverein hat 30 weibliche und 20 männliche Mitglieder. Die Zahl der Anwesenden bei der wöchentlichen Chorprobe schwankt von Mal zu Mal. Um diese Schwankung durch ein Modell zu beschreiben, soll davon ausgegangen werden, dass die Mitglieder unabhängig voneinander und jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 85% an einer Probe teilnehmen.

1. a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Chorprobe mindestens 40 Mitglieder anwesend sind? $P_{0,85}^{50}(X \geq 40) = 88,0\%$
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlen bei einer Chorprobe 6 Sängerinnen und 4 Sänger? $P_{0,85}^{30}(Y = 24) \cdot P_{0,85}^{20}(Z = 16) = 2,5\%$ oder $P_{0,15}^{30}(Y = 6) \cdot P_{0,15}^{20}(Z = 4) = 2,5\%$
- c) Für die nächste Chorprobe haben sich 5 Mitglieder entschuldigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlt bei dieser Probe höchstens noch ein weiteres Chormitglied? $P_{0,15}^{45}(Y \leq 1) = 0,6\%$
- d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlt bei einer Chorprobe von den Sängerinnen Sandra und Simone entweder die eine oder die andere? $0,15 \cdot 0,85 + 0,85 \cdot 0,15 = 2 \cdot 0,15 \cdot 0,85 = 25,5\%$
- e) Wie viele Chorproben müssen mindestens stattfinden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens einmal alle 5 Tenöre des Vereins gemeinsam anzutreffen sind?

$$P_{0,85^n}^n(X \geq 1) = 1 - P_{0,85^n}^n(X = 0) = 1 - (1 - 0,85^n)^n > 99\% \implies n \geq 8$$

2. Der Chorleiter vermutet, dass die Anwesenheitsquote unter 85% gefallen ist. Um diese Vermutung zu überprüfen, soll die Nullhypothese $H_0: p \geq 0,85$ auf dem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Dazu wird bei vier Chorproben jeweils die Anzahl der Anwesenden festgestellt. Die Entscheidung soll aufgrund der Summe dieser vier Zahlen getroffen werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

$$P_{0,85}^{200}(X \leq k) \leq 0,05 \implies k \leq 161, \quad \bar{A} = \{0, \dots, 161\} \quad (\text{Ablehnungsbereich für die Nullhypothese})$$

3. Die beiden anfangs genannten und bisher verwendeten Modellannahmen für das Vorliegen einer Bernoullikette können in der Realität unzutreffend sein. Erläutern Sie dies anhand je eines konkreten Beispiels.

Ehepartner erscheinen nur gemeinsam (Verletzung der Unabhängigkeit).
Teilnehmerwahrscheinlichkeit ist vom Alter abhängig.

4. Unter den 20 Männern des Vereins sind fünf Tenöre, acht Baritone und sieben Bässe. Bei einer Veranstaltung singen ein Tenor, zwei Baritone und zwei Bässe in einem Quintett.

- a) Wie viele verschiedene Zusammenstellungen des Quintetts aus den Sängern des Vereins sind hierfür möglich? $\binom{5}{1} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{7}{2} = 2940$

- b) Nach ihrem Auftritt stellen sich die 5 Sänger nebeneinander auf und verbeugen sich. Wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es dafür, wenn die 2 Bässe nebeneinander stehen wollen?

$4! \cdot 2 = 48$ Die beiden Bässe werden zusammengefasst, sie können dann noch vertauscht werden.