

Fußball-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2003

Bei einem Fußball-Turnier stehen die Mannschaften von Althausen (A) und Burgdorf (B) im Endspiel.

1. Der Trainer von A stellt seine Mannschaft zusammen. Hierfür werden vier der sieben verfügbaren Abwehrspieler, vier der fünf Mittelfeldspieler, zwei der sechs Angriffsspieler und einer der drei Torhüter ausgewählt.
 - a) Wie viele Möglichkeiten hat der Trainer, seine Mannschaft zusammenzustellen?
 - b) Vor dem Spiel sollen sich die elf ausgewählten Spieler für ein Gruppenfoto so in eine Reihe stellen, dass die Abwehr-, die Mittelfeld- und die Angriffsspieler jeweils nebeneinander stehen und der Torwart am Rand steht. Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür?
2. Für den Torhüter beträgt die Wahrscheinlichkeit 2%, dass er während des Spiels verletzt wird und ausgewechselt werden muss; für jeden der zehn Feldspieler liegt der entsprechende Wert bei 5%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird im Laufe des Spiels keiner der 11 Akteure einer Mannschaft wegen Verletzung ausgewechselt?
3. Da das Spiel nach Ablauf der regulären Spielzeit unentschieden steht, folgt ein Elfmeterschießen. Im Folgenden kann vereinfachend davon ausgegangen werden, dass jeder Spieler von A mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% einen Elfmeter verwandelt, während jeder Spieler von B eine Trefferquote von 70% hat.
 - a) Wie viele Elfmeter muss Mannschaft A mindestens schießen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9% mindestens einen Treffer erzielt?

Als Alternativen zum üblichen Ablauf eines Elfmeterschießens werden die beiden in den folgenden Teilaufgaben 3b) und 3c) behandelten Verfahren vorgeschlagen.

- b) Beide Mannschaften schießen je dreimal. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Elfmeterduell unentschieden endet.
 - c) Die Schützen der beiden Mannschaften treten paarweise gegeneinander an: Ein Spieler von A und einer von B schießen je einmal; liegt danach eine Mannschaft in Führung, endet das Spiel sofort, anderenfalls wird das Verfahren mit dem nächsten Spielerpaar wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde bei diesem Vorgehen nach drei angetretenen Paaren immer noch kein Sieger feststehen?
4. Der Torhüter von Mannschaft A behauptet, dass er einen Elfmeter mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75% verwandelt.
 - a) Man ist bereit, die Behauptung des Torhüters zu akzeptieren, wenn er von 30 Elfmeter mindestens 24 verwandelt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Trefferquote des Torhüters irrtümlich für höher als 75% gehalten?
 - b) Die Nullhypothese $H_0: p \leq 75\%$ soll auf dem Signifikanzniveau von 5% bei einem Stichprobenumfang von 30 Elfmeter getestet werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
 - c) Geben Sie an, wie sich die in Teilaufgabe 4a) ermittelte Irrtumswahrscheinlichkeit tendenziell ändern würde, wenn man den Stichprobenumfang von 30 auf 60 und die Mindesttrefferzahl entsprechend von 24 auf 48 verdoppeln würde. Erläutern Sie, wie Sie zu Ihrer Antwort gekommen sind.

Fußball-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2003 Lösungen

Bei einem Fußball-Turnier stehen die Mannschaften von Althausen (A) und Burgdorf (B) im Endspiel.

1. Der Trainer von A stellt seine Mannschaft zusammen. Hierfür werden vier der sieben verfügbaren Abwehrspieler, vier der fünf Mittelfeldspieler, zwei der sechs Angriffsspieler und einer der drei Torhüter ausgewählt.

- a) Wie viele Möglichkeiten hat der Trainer, seine Mannschaft zusammenzustellen?

$$\binom{7}{4} \cdot \binom{5}{4} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{3}{1} = 7875$$

- b) Vor dem Spiel sollen sich die elf ausgewählten Spieler für ein Gruppenfoto so in eine Reihe stellen, dass die Abwehr-, die Mittelfeld- und die Angriffsspieler jeweils nebeneinander stehen und der Torwart am Rand steht. Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür? $2 \cdot 3! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2! = 13824$

2. Für den Torhüter beträgt die Wahrscheinlichkeit 2%, dass er während des Spiels verletzt wird und ausgewechselt werden muss; für jeden der zehn Feldspieler liegt der entsprechende Wert bei 5%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird im Laufe des Spiels keiner der 11 Akteure einer Mannschaft wegen Verletzung ausgewechselt? $0,98 \cdot 0,95^{10} = 58,7\%$

3. Da das Spiel nach Ablauf der regulären Spielzeit unentschieden steht, folgt ein Elfmeterschießen. Im Folgenden kann vereinfachend davon ausgegangen werden, dass jeder Spieler von A mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% einen Elfmeter verwandelt, während jeder Spieler von B eine Trefferquote von 70% hat.

- a) Wie viele Elfmeter muss Mannschaft A mindestens schießen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9% mindestens einen Treffer erzielt?

$$P_{0,75}^n(Y \geq 1) = 1 - P_{0,75}^n(Y = 0) = 1 - 0,25^n > 99,9\% \implies n \geq 5$$

Als Alternativen zum üblichen Ablauf eines Elfmeterschießens werden die beiden in den folgenden Teilaufgaben 3b) und 3c) behandelten Verfahren vorgeschlagen.

- b) Beide Mannschaften schießen je dreimal. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Elfmeterduell unentschieden endet.

$$\sum_{k=0}^3 P_{0,75}^3(X = k) \cdot P_{0,70}^3(Z = k) = 35,8\%$$

- c) Die Schützen der beiden Mannschaften treten paarweise gegeneinander an: Ein Spieler von A und einer von B schießen je einmal; liegt danach eine Mannschaft in Führung, endet das Spiel sofort, anderenfalls wird das Verfahren mit dem nächsten Spielerpaar wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde bei diesem Vorgehen nach drei angetretenen Paaren immer noch kein Sieger feststehen? $(0,75 \cdot 0,70 + 0,25 \cdot 0,30)^3 = 21,6\%$

4. Der Torhüter von Mannschaft A behauptet, dass er einen Elfmeter mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75% verwandelt.

- a) Man ist bereit, die Behauptung des Torhüters zu akzeptieren, wenn er von 30 Elfmeter mindestens 24 verwandelt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Trefferquote des Torhüters irrtümlich für höher als 75% gehalten? $P_{0,75}^{30}(X \geq 24) = 34,8\%$

- b) Die Nullhypothese $H_0: p \leq 75\%$ soll auf dem Signifikanzniveau von 5% bei einem Stichprobenumfang von 30 Elfmeter getestet werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

$$P_{0,75}^{30}(X \geq k) \leq 0,05 \implies \bar{A} = \{27, \dots, 30\} \quad (\text{Ablehnungsbereich für die Nullhypothese})$$

- c) Geben Sie an, wie sich die in Teilaufgabe 4a) ermittelte Irrtumswahrscheinlichkeit tendenziell ändern würde, wenn man den Stichprobenumfang von 30 auf 60 und die Mindesttrefferzahl entsprechend von 24 auf 48 verdoppeln würde. Erläutern Sie, wie Sie zu Ihrer Antwort gekommen sind.

Die Irrtumswahrscheinlichkeit (der Fehler 1. Art) wird dann kleiner.

Parteiversammlung-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2003

1. Eine Partei hält Versammlungen ab, zu denen jeweils 100 Mitglieder eingeladen werden. Erfahrungsgemäß besucht ein eingeladenes Mitglied die Versammlung mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%.
 - a) Eine Versammlung wird als „sehr gut besucht“ bezeichnet, wenn mindestens 80 der geladenen 100 Personen anwesend sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Versammlung „sehr gut besucht“?
[Ergebnis: 1,65%]
 - b) Wie viele Versammlungen müssen mindestens stattfinden, damit mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit wenigstens eine Versammlung „sehr gut besucht“ ist?
2. Mit einer Umfrage ist der Bekanntheitsgrad des Spitzenkandidaten der Partei ermittelt worden. 16% aller Befragten waren Männer, die den Spitzenkandidaten nicht kennen. Der Frauenanteil in der Umfrage betrug 52%.

Aus der Menge der Befragten wird zufällig eine Person ausgewählt. Die beiden Ereignisse M : „Die Person ist ein Mann“ und B : „Die Person kennt den Spitzenkandidaten“ seien stochastisch unabhängig. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B wird als Bekanntheitsgrad interpretiert.

 - a) Bestimmen Sie den Bekanntheitsgrad des Spitzenkandidaten.
 - b) Würde die Umfrage einen größeren, einen kleineren oder einen gleich großen Bekanntheitsgrad liefern, wenn der Anteil der Frauen kleiner als 52% wäre und wiederum 16% aller Befragten Männer sind, die den Spitzenkandidaten nicht kennen? Erläutern Sie, wie Sie zu Ihrer Antwort gekommen sind.
3. Der Bekanntheitsgrad p des Spitzenkandidaten der Partei liegt derzeit bei höchstens 80%. Die Partei will eine Agentur beauftragen, den Bekanntheitsgrad auf über 80% zu steigern. Die Partei schlägt der Agentur vor, auf Erfolgsbasis zu arbeiten, d. h., sie wird nur im Erfolgsfall bezahlt. Um über den Erfolgsfall zu entscheiden, möchte die Partei nach einer festgelegten Zeitspanne die Nullhypothese $H_0: p \leq 0,80$ zufällig ausgewählten Wahlberechtigten testen und H_0 nur ablehnen, wenn mindestens 170 der Befragten den Spitzenkandidaten kennen.
 - a) Wie hoch ist dabei das Risiko für die Partei, die Agentur irrtümlich zu bezahlen?
 - b) Wie groß ist dabei das Risiko für die Agentur, trotz eines Bekanntheitsgrades von 85% kein Geld zu erhalten?
 - c) Die Agentur ist mit der obigen Entscheidungsregel nicht einverstanden. Sie schlägt vor, diese so zu ändern, dass ihr Risiko, trotz eines Bekanntheitsgrades von 85% kein Geld zu erhalten, kleiner als 10% ist. Bestimmen Sie dafür den kleinstmöglichen Ablehnungsbereich.
 - d) Ein Mitarbeiter der Agentur liest in der Zeitung, dass der aktuelle Bekanntheitsgrad des Spitzenkandidaten in A -Stadt bei 78% und in B -Stadt bei 84% liegt. Er schließt daraus, dass der Bekanntheitsgrad in den beiden Städten insgesamt bei 81% liegt. Nehmen Sie zu dieser Folgerung Stellung.
4. Die Partei will die Aufmerksamkeit der Medien auf ein 11-köpfiges Team lenken, dem neben dem Spitzenkandidaten 4 weitere Männer und 6 Frauen angehören. Für ein Foto soll sich dieses Team in einer Reihe aufstellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn der Spitzenkandidat in der Mitte stehen soll und
 - a) nur nach Frauen und Männern unterschieden wird,
 - b) nach Personen unterschieden wird,
 - c) nach Personen unterschieden wird und keine zwei Personen gleichen Geschlechts nebeneinander stehen dürfen?

Parteiversammlung-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2003 Lösungen

1. Eine Partei hält Versammlungen ab, zu denen jeweils 100 Mitglieder eingeladen werden. Erfahrungsgemäß besucht ein eingeladenes Mitglied die Versammlung mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%.

a) Eine Versammlung wird als „sehr gut besucht“ bezeichnet, wenn mindestens 80 der geladenen 100 Personen anwesend sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Versammlung „sehr gut besucht“?

$$P_{0,70}^{100}(X \geq 80) = 1,65\%$$

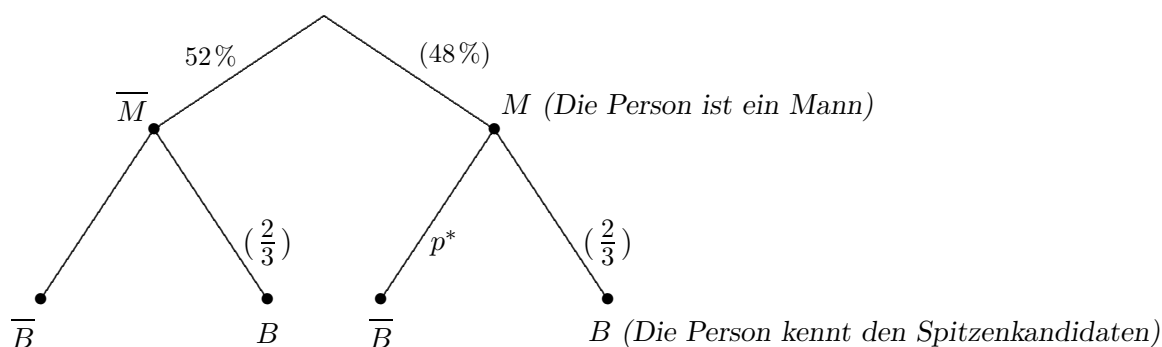
b) Wie viele Versammlungen müssen mindestens stattfinden, damit mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit wenigstens eine Versammlung „sehr gut besucht“ ist?

$$P_{0,0165}^n(Y \geq 1) > 90\% \implies n \geq 139$$

2. Mit einer Umfrage ist der Bekanntheitsgrad des Spitzenkandidaten der Partei ermittelt worden. 16% aller Befragten waren Männer, die den Spitzenkandidaten nicht kennen. Der Frauenanteil in der Umfrage betrug 52%.

Aus der Menge der Befragten wird zufällig eine Person ausgewählt. Die beiden Ereignisse M : „Die Person ist ein Mann“ und B : „Die Person kennt den Spitzenkandidaten“ seien stochastisch unabhängig. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B wird als Bekanntheitsgrad interpretiert.

a) Bestimmen Sie den Bekanntheitsgrad des Spitzenkandidaten.



$$p^* \cdot 48\% = 16\% \implies p^* = \frac{1}{3}$$

Bekanntheitsgrad: $\frac{2}{3} (52\% + 48\%) = 66,7\%$ Teilbäume stimmen überein (M, B unabhängig)

b) Würde die Umfrage einen größeren, einen kleineren oder einen gleich großen Bekanntheitsgrad liefern, wenn der Anteil der Frauen kleiner als 52% wäre und wiederum 16% aller Befragten Männer sind, die den Spitzenkandidaten nicht kennen? Erläutern Sie, wie Sie zu Ihrer Antwort gekommen sind.

p^* wäre kleiner, der Bekanntheitsgrad wäre größer.

3. Der Bekanntheitsgrad p des Spitzenkandidaten der Partei liegt derzeit bei höchstens 80%. Die Partei will eine Agentur beauftragen, den Bekanntheitsgrad auf über 80% zu steigern. Die Partei schlägt der Agentur vor, auf Erfolgsbasis zu arbeiten, d.h., sie wird nur im Erfolgsfall bezahlt. Um über den Erfolgsfall zu entscheiden, möchte die Partei nach einer festgelegten Zeitspanne die Nullhypothese $H_0: p \leq 0,80$ zufällig ausgewählten Wahlberechtigten testen und H_0 nur ablehnen, wenn mindestens 170 der Befragten den Spitzenkandidaten kennen.

a) Wie hoch ist dabei das Risiko für die Partei, die Agentur irrtümlich zu bezahlen?

$$P_{0,80}^{200}(Y \geq 170) = 4,3\%$$

b) Wie groß ist dabei das Risiko für die Agentur, trotz eines Bekanntheitsgrades von 85% kein Geld zu erhalten?

$$P_{0,85}^{200}(Z \leq 169) = 45,1\%$$

- c) Die Agentur ist mit der obigen Entscheidungsregel nicht einverstanden. Sie schlägt vor, diese so zu ändern, dass ihr Risiko, trotz eines Bekanntheitsgrades von 85% kein Geld zu erhalten, kleiner als 10% ist. Bestimmen Sie dafür den kleinstmöglichen Ablehnungsbereich.

$$P_{0,85}^{200}(Y \leq k) < 10\% \implies k \leq 162, \quad \bar{A} = \{163, \dots, 200\} \quad (\text{Ablehnungsbereich für die Nullhypothese})$$

- d) Ein Mitarbeiter der Agentur liest in der Zeitung, dass der aktuelle Bekanntheitsgrad des Spitzenkandidaten in *A*-Stadt bei 78% und in *B*-Stadt bei 84% liegt. Er schließt daraus, dass der Bekanntheitsgrad in den beiden Städten insgesamt bei 81% liegt. Nehmen Sie zu dieser Folgerung Stellung.

4. Die Partei will die Aufmerksamkeit der Medien auf ein 11-köpfiges Team lenken, dem neben dem Spitzenkandidaten 4 weitere Männer und 6 Frauen angehören. Für ein Foto soll sich dieses Team in einer Reihe aufstellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn der Spitzenkandidat in der Mitte stehen soll und

a) nur nach Frauen und Männern unterschieden wird, $\binom{10}{4} = \binom{10}{6} = 210 \quad (= \frac{10!}{6! \cdot 4!})$

b) nach Personen unterschieden wird, $10! = 3628800$

c) nach Personen unterschieden wird und keine zwei Personen gleichen Geschlechts nebeneinander stehen dürfen? $\text{Aufstellung: FMFMFSFMFMF} \quad 6! \cdot 4! = 17280$