

Fotokopien-Aufgabe Bayern GK 2006

Ein in die Jahre gekommenes Fotokopiergerät liefert brauchbare und unbrauchbare Kopien. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kopie unbrauchbar ist, beträgt 15% (Ausschussquote). Das Fertigen von Kopien soll als Bernoulli-Kette angesehen werden.

1. Es werden 20 Kopien gefertigt. Ermitteln Sie für jedes der drei angegebenen Ereignisse die Wahrscheinlichkeit.
A: Es sind mehr als drei Viertel der Kopien brauchbar.
B: Es ist genau eine Kopie unbrauchbar und diese befindet sich unter den letzten fünf.
C: Von den Kopien sind genau drei unbrauchbar und diese folgen unmittelbar hintereinander.
2. Es werden n Kopien gefertigt. Für welche Werte von n ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle n Kopien brauchbar sind, kleiner als 10%?
3. Von einem einseitigen Rundschreiben werden 170 brauchbare Kopien benötigt. Eine Sekretärin, der die Ausschussquote von 15% bekannt ist, fertigt zur Sicherheit gleich 200 Kopien. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält sie trotzdem weniger als die gewünschte Zahl von brauchbaren Kopien?
4. Die unbrauchbaren Kopien entstehen im vorliegenden Fall dadurch, dass das Papier zerknittert oder das Druckbild fehlerhaft ist. Um zu klären, ob die beiden Ereignisse „Eine Kopie ist zerknittert“ und „Das Druckbild ist fehlerhaft“ unabhängig sind, werden die nächsten 1000 Kopien untersucht. 154 davon sind unbrauchbar, wobei 66 Kopien zerknittert sind und bei 115 das Druckbild fehlerhaft ist.
Welche Vermutung hinsichtlich der Unabhängigkeit der beiden Ereignisse lassen diese Werte zu? Die Antwort ist zu begründen.
(Hinweis: Die relativen Häufigkeiten können als brauchbare Näherungswerte für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.)
5. Ein Student fertigt von einem zehnsseitigen Vorlesungsskript eine Kopie bestehend aus zehn einseitig bedruckten Blättern an. Er heftet diese zehn Blätter aus Versehen in falscher Reihenfolge zusammen. Wie viele „falsche Reihenfolgen“ sind insgesamt möglich? Bei wie vielen davon ist die richtige Reihenfolge dadurch wieder herzustellen, dass genau zwei Blätter vertauscht werden?
6. a) Das Kopiergerät wurde repariert. Die mit der Reparatur beauftragte Firma behauptet, dass die Ausschussquote jetzt nur noch höchstens 4% beträgt. Um diese Behauptung (Nullhypothese) auf dem Signifikanzniveau von 5% zu testen, werden 200 Kopien angefertigt. Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
b) Bei dem Test erweisen sich 13 Kopien als unbrauchbar. Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Sinne des von Ihnen in Teilaufgabe 6a) entworfenen Tests.
7. Die eingangs genannte Modellannahme, das Anfertigen von Kopien sei eine Bernoulli-Kette, kann in der Realität unzutreffend sein. Erläutern Sie dies anhand eines Beispiels.

Fotokopien-Aufgabe Bayern GK 2006 Lösungshinweise

Ein in die Jahre gekommenes Fotokopiergerät liefert brauchbare und unbrauchbare Kopien. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kopie unbrauchbar ist, beträgt 15% (Ausschussquote). Das Fertigen von Kopien soll als Bernoulli-Kette angesehen werden.

1. Es werden 20 Kopien gefertigt. Ermitteln Sie für jedes der drei angegebenen Ereignisse die Wahrscheinlichkeit.

A: Es sind mehr als drei Viertel der Kopien brauchbar. $P_{0,15}^{20}(X \leq 4) = P_{0,85}^{20}(Y > 15) = 83,0\%$

B: Es ist genau eine Kopie unbrauchbar und diese befindet sich unter den letzten fünf.

$$P_{0,15}^{15}(X = 0) \cdot P_{0,15}^5(X = 1) = 3,4\%$$

C: Von den Kopien sind genau drei unbrauchbar und diese folgen unmittelbar hintereinander.

$$18 \cdot 0,15^3 \cdot 0,85^{17} = 0,38\%$$

2. Es werden n Kopien gefertigt. Für welche Werte von n ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle n Kopien brauchbar sind, kleiner als 10%? $0,85^n < 0,1 \implies n \geq 15$

3. Von einem einseitigen Rundschreiben werden 170 brauchbare Kopien benötigt. Eine Sekretärin, der die Ausschussquote von 15% bekannt ist, fertigt zur Sicherheit gleich 200 Kopien. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält sie trotzdem weniger als die gewünschte Zahl von brauchbaren Kopien?

$$P_{0,85}^{200}(X < 170) = 45,1\%$$

4. Die unbrauchbaren Kopien entstehen im vorliegenden Fall dadurch, dass das Papier zerknittert oder das Druckbild fehlerhaft ist. Um zu klären, ob die beiden Ereignisse „Eine Kopie ist zerknittert“ und „Das Druckbild ist fehlerhaft“ unabhängig sind, werden die nächsten 1000 Kopien untersucht. 154 davon sind unbrauchbar, wobei 66 Kopien zerknittert sind und bei 115 das Druckbild fehlerhaft ist.

Welche Vermutung hinsichtlich der Unabhängigkeit der beiden Ereignisse lassen diese Werte zu? Die Antwort ist zu begründen.

(Hinweis: Die relativen Häufigkeiten können als brauchbare Näherungswerte für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.)

Z: „Eine Kopie ist zerknittert“

D: „Das Druckbild ist fehlerhaft“

$$P(\overline{D} \cap \overline{Z}) \neq P(\overline{D}) \cdot P(\overline{Z})$$

$$\text{oder } P(D \cap Z) \neq P(D) \cdot P(Z) \text{ mit } a = 27$$

$$\text{beachte: } a+b+c = 154, a+b = 115, a+c = 66$$

	Z	\overline{Z}	Summe
D	a	b	115
\overline{D}	c	846	885
Summe	66	934	1000

5. Ein Student fertigt von einem zehneitigen Vorlesungsskript eine Kopie bestehend aus zehn einseitig bedruckten Blättern an. Er heftet diese zehn Blätter aus Versehen in falscher Reihenfolge zusammen. Wie viele „falsche Reihenfolgen“ sind insgesamt möglich? Bei wie vielen davon ist die richtige Reihenfolge dadurch wieder herzustellen, dass genau zwei Blätter vertauscht werden? $10! - 1, \binom{10}{2}$

6. a) Das Kopiergerät wurde repariert. Die mit der Reparatur beauftragte Firma behauptet, dass die Ausschussquote jetzt nur noch höchstens 4% beträgt. Um diese Behauptung (Nullhypothese) auf dem Signifikanzniveau von 5% zu testen, werden 200 Kopien angefertigt. Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

$$P_{0,04}^{200}(X \geq k) \leq 0,05 \implies \overline{A} = \{14, \dots, 200\} \text{ (Ablehnungsbereich für die Nullhypothese)}$$

- b) Bei dem Test erweisen sich 13 Kopien als unbrauchbar. Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Sinne des von Ihnen in Teilaufgabe 6a) entworfenen Tests.

$$\text{Ergebnis ist nicht signifikant, } P_{0,04}^{200}(X \geq 13) = 6\%$$

7. Die eingangs genannte Modellannahme, das Anfertigen von Kopien sei eine Bernoulli-Kette, kann in der Realität unzutreffend sein. Erläutern Sie dies anhand eines Beispiels.

Die genannten Wahrscheinlichkeiten können sich mit zunehmender Kopienzahl verändern, aufeinanderfolgende Ereignisse können sich gegenseitig beeinflussen, ...