

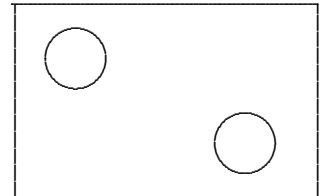
## Fußball-Aufgabe Bayern GK 2007

1. Eine Schulklasse besteht aus 18 Jungen und 14 Mädchen. Bei einem Preisausschreiben gewinnt die Klasse 25 Karten für ein Fußball-Länderspiel.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine 25-köpfige Gruppe zusammenzustellen, wenn

- genau 10 Mädchen in der Gruppe sein sollen,
  - genau 10 Mädchen in der Gruppe sein sollen, aber die beiden Freundinnen Lena und Petra entweder nur gemeinsam oder gar nicht mitfahren wollen?
2. Der Klassenleiter beschließt, die Karten zu verlosen. Er gibt dazu 25 Treffer und 7 Nieten in eine Urne und lässt jeden aus der Klasse einmal ziehen. Hans soll als Zweiter ein Los ziehen. Er beschwert sich, dass seine Wahrscheinlichkeit, einen Treffer zu erzielen, geringer sei als bei Jana, die als Erste ziehen wird. Widerlegen Sie die Behauptung von Hans durch Rechnung.

3. Vor dem Stadion befindet sich eine Torwand mit zwei Löchern. Jürgen ist ein geübter Torwand-Schütze und trifft, wenn er auf das obere Loch zielt, dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von 10%. Für das untere Loch hat er sogar eine Trefferwahrscheinlichkeit von 40%.



- Jürgen schießt zuerst einmal auf das untere und dann einmal auf das obere Loch. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $A$ : „Beide Schüsse treffen ihr Ziel nicht“ und  $B$ : „Genau ein Schuss trifft sein Ziel“.
  - Wie oft muss Jürgen auf das untere Loch mindestens schießen, damit er dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einmal trifft?
  - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jürgen, wenn er zuerst dreimal auf das untere und dann dreimal auf das obere Loch schießt, genau einmal sein Ziel trifft.
  - Uwe vermutet, dass die Trefferwahrscheinlichkeit von Jürgen nicht konstant ist. Er geht davon aus, dass sie unmittelbar nach einem Treffer um  $\frac{1}{10}$  des ursprünglichen Wertes ansteigt und unmittelbar nach einem Fehlschuss um  $\frac{1}{10}$  der ursprünglichen Trefferwahrscheinlichkeit absinkt. Jürgen schießt zweimal auf das untere Loch. Zeichnen Sie unter der Voraussetzung, dass Uwes Vermutung zutrifft, ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jürgen genau einmal sein Ziel trifft.
4. Der Stadionsprecher behauptet, dass seit der Fußball-WM im eigenen Land die Fußballbegeisterung in der Stadt gestiegen sei und mindestens 80% der Einwohner dieser Stadt für einen Ausbau des Stadions seien.
- Um diese Behauptung zu testen, befragen die Schüler in der Halbzeitpause 100 zufällig ausgewählte Zuschauer. Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Schüler die Behauptung des Stadionsprechers mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10% irrtümlich ablehnen wollen?
  - Bewerten Sie den von den Schülern durchgeführten Test hinsichtlich seiner Eignung, die Behauptung des Stadionsprechers zu überprüfen.

## Fußball-Aufgabe Bayern GK 2007

1. Eine Schulklasse besteht aus 18 Jungen und 14 Mädchen. Bei einem Preisausschreiben gewinnt die Klasse 25 Karten für ein Fußball-Länderspiel.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine 25-köpfige Gruppe zusammenzustellen, wenn

- a) genau 10 Mädchen in der Gruppe sein sollen,  $\binom{14}{10} \cdot \binom{18}{15} = 816816$   
 b) genau 10 Mädchen in der Gruppe sein sollen, aber die beiden Freundinnen Lena und Petra entweder nur gemeinsam oder gar nicht mitfahren wollen?

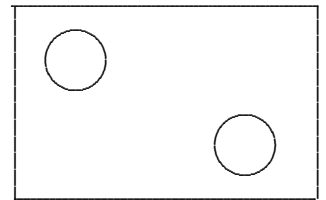
$$\binom{18}{15} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{12}{8} + \binom{18}{15} \cdot \binom{2}{0} \cdot \binom{12}{10} = 457776$$

2. Der Klassenleiter beschließt, die Karten zu verlosen. Er gibt dazu 25 Treffer und 7 Nieten in eine Urne und lässt jeden aus der Klasse einmal ziehen. Hans soll als Zweiter ein Los ziehen. Er beschwert sich, dass seine Wahrscheinlichkeit, einen Treffer zu erzielen, geringer sei als bei Jana, die als Erste ziehen wird. Widerlegen Sie die Behauptung von Hans durch Rechnung.

$$P(\text{Jana trifft}) = \frac{25}{32}$$

$$P(\text{Hans trifft beim zweiten Zug}) = \frac{25}{32} \cdot \frac{24}{31} + \frac{7}{32} \cdot \frac{25}{31} = \frac{25}{31} \cdot (\dots) = \frac{25}{32}$$

3. Vor dem Stadion befindet sich eine Torwand mit zwei Löchern. Jürgen ist ein geübter Torwand-Schütze und trifft, wenn er auf das obere Loch zielt, dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von 10%. Für das untere Loch hat er sogar eine Trefferwahrscheinlichkeit von 40%.



- a) Jürgen schießt zuerst einmal auf das untere und dann einmal auf das obere Loch. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $A$ : „Beide Schüsse treffen ihr Ziel nicht“ und  $B$ : „Genau ein Schuss trifft sein Ziel“.

$$P(A) = 54\%, \quad P(B) = 42\%$$

- b) Wie oft muss Jürgen auf das untere Loch mindestens schießen, damit er dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einmal trifft?

$$P_{0,4}^n(Z \geq 1) = 1 - P_{0,4}^n(Z = 0) = 1 - 0,6^n > 95\% \implies n \geq 6$$

- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jürgen, wenn er zuerst dreimal auf das untere und dann dreimal auf das obere Loch schießt, genau einmal sein Ziel trifft.

$$P = 3 \cdot 0,4 \cdot 0,6^2 \cdot 0,9^3 + 0,6^3 \cdot 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 = 36,7\%$$

- d) Uwe vermutet, dass die Trefferwahrscheinlichkeit von Jürgen nicht konstant ist. Er geht davon aus, dass sie unmittelbar nach einem Treffer um  $\frac{1}{10}$  des ursprünglichen Wertes ansteigt und unmittelbar nach einem Fehlschuss um  $\frac{1}{10}$  der ursprünglichen Trefferwahrscheinlichkeit absinkt.

Jürgen schießt zweimal auf das untere Loch. Zeichnen Sie unter der Voraussetzung, dass Uwes Vermutung zutrifft, ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jürgen genau einmal sein Ziel trifft.

$$P = 0,4 \cdot 0,56 + 0,6 \cdot 0,36 = 44\%$$

4. Der Stadionsprecher behauptet, dass seit der Fußball-WM im eigenen Land die Fußballbegeisterung in der Stadt gestiegen sei und mindestens 80% der Einwohner dieser Stadt für einen Ausbau des Stadions seien.

- a) Um diese Behauptung zu testen, befragen die Schüler in der Halbzeitpause 100 zufällig ausgewählte Zuschauer. Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Schüler die Behauptung des Stadionsprechers mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10% irrtümlich ablehnen wollen?

Die Nullhypothese lautet:  $p \geq 80\%$ .

$$P_{0,8}^{100}(X \leq k) \leq 10\% \implies k \leq 74$$

$$\bar{A} = \{0, \dots, 74\} \quad (\text{Ablehnungsbereich für die Nullhypothese})$$

- b) Bewerten Sie den von den Schülern durchgeführten Test hinsichtlich seiner Eignung, die Behauptung des Stadionsprechers zu überprüfen.

Der Stichprobenumfang ist zu klein.  
Die Stichprobe ist nicht repräsentativ.

## Sommerfest-Aufgabe Bayern GK 2007

1. Auf dem Sommerfest des örtlichen Gymnasiums wirbt der Förderverein um neue Mitglieder. Als Anreiz erhält jede Person, die dem Verein beiträgt, auf den Jahresbeitrag einen Rabatt, der durch zweimaliges Werfen eines Laplace-Würfels ermittelt wird. Die erzielte Augensumme ergibt dabei den Rabatt in Prozent.
  - a) Begründen Sie, dass ein Neumitglied mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{12}$  einen Rabatt von genau 10% bekommt.
  - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten genau 2 von 10 Neumitgliedern einen Rabatt von jeweils genau 10%?
  - c) Wie viele neue Mitglieder müssen mindestens würfeln, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 60% wenigstens ein Neumitglied eine Ermäßigung von genau 10% erhält?
  - d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt der Mittelwert der beiden von einem Ehepaar erwürfelten Rabatte genau 11%?
2. Der Vorstand des Fördervereins besteht aus 6 Frauen und 3 Männern.
  - a) Auf wie viele Arten können sich die Vorstandsmitglieder für ein Foto in einer Reihe nebeneinander aufstellen, wenn die drei Männer in der Mitte stehen sollen?
  - b) Zur Betreuung des Info-Standes auf dem Sommerfest teilen sich alle 9 Vorstandsmitglieder in 3 Dreiergruppen auf, die nacheinander in drei Schichten am Stand anwesend sind. Wie viele verschiedene Möglichkeiten zur Aufteilung der Personen auf die Schichten gibt es, wenn die beiden Vorstandsmitglieder Anne und Birgit zusammen mit einer weiteren Frau die erste Schicht übernehmen?
3. 40% der Besucher des Sommerfestes sind männlich; 30% der Besucher trinken nur Fruchtsaft; 42% der Besucher sind weiblich und trinken nicht nur Fruchtsaft.
  - a) Untersuchen Sie die Ereignisse  $F$ : „Ein zufällig ausgewählter Besucher trinkt nur Fruchtsaft“ und  $W$ : „Ein zufällig ausgewählter Besucher ist weiblich“ auf stochastische Unabhängigkeit.

Im Folgenden wird das Ereignis  $C$ : „Ein zufällig ausgewählter Besucher ist männlich oder trinkt nicht nur Fruchtsaft“ betrachtet.

    - b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $C$ .
    - c) Beschreiben Sie das Gegenereignis von  $C$  in Worten.
4. Die Vorsitzende des Fördervereins möchte der Schule einen neuen Schulgarten aus den Mitteln des Vereins finanzieren. Sie geht dabei von einer Zustimmungsquote von 60% unter den Schülern aus. Der Kassenwart spricht sich gegen die Finanzierung aus, da er mit einer Zustimmungsquote von höchstens 40% rechnet. Er schlägt eine Befragung von 50 zufällig ausgewählten Schülern vor. Seine Behauptung soll mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% irrtümlich verworfen werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art unter der Annahme, dass die Vorsitzende mit ihrer Behauptung bezüglich der Zustimmungsquote Recht hat.

## Sommerfest-Aufgabe Bayern GK 2007

1. Auf dem Sommerfest des örtlichen Gymnasiums wirbt der Förderverein um neue Mitglieder. Als Anreiz erhält jede Person, die dem Verein beiträgt, auf den Jahresbeitrag einen Rabatt, der durch zweimaliges Werfen eines Laplace-Würfels ermittelt wird. Die erzielte Augensumme ergibt dabei den Rabatt in Prozent.

- a) Begründen Sie, dass ein Neumitglied mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{12}$  einen Rabatt von genau 10% bekommt.

Augensumme 10: (6 | 4), (4 | 6), (5 | 5)

$$P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten genau 2 von 10 Neumitgliedern einen Rabatt von jeweils genau 10%?

$$P_{1/12}^{10}(X = 2) = 15,6\%$$

- c) Wie viele neue Mitglieder müssen mindestens würfeln, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 60% wenigstens ein Neumitglied eine Ermäßigung von genau 10% erhält?

$$P_{1/12}^n(Z \geq 1) = 1 - P_{1/12}^n(Z = 0) = 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^n > 60\% \implies n \geq 11$$

- d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt der Mittelwert der beiden von einem Ehepaar erwürfelten Rabatte genau 11%?

$$\text{Mittelwert} = \frac{F + M}{2} = 11$$

mögliche Wurfresultate: (11 | 11), (10 | 12), (12 | 10)

Augensumme 10: (6 | 4), (4 | 6), (5 | 5)

Augensumme 11: (5 | 6), (6 | 5)

Augensumme 12: (6 | 6)

$$P = \frac{2}{36} \cdot \frac{2}{36} + \frac{3}{36} \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \cdot \frac{3}{36} = 0,8\%$$

2. Der Vorstand des Fördervereins besteht aus 6 Frauen und 3 Männern.

- a) Auf wie viele Arten können sich die Vorstandsmitglieder für ein Foto in einer Reihe nebeneinander aufstellen, wenn die drei Männer in der Mitte stehen sollen?

$$3! \cdot 6! = 4320$$

- b) Zur Betreuung des Info-Standes auf dem Sommerfest teilen sich alle 9 Vorstandsmitglieder in 3 Dreiergruppen auf, die nacheinander in drei Schichten am Stand anwesend sind. Wie viele verschiedene Möglichkeiten zur Aufteilung der Personen auf die Schichten gibt es, wenn die beiden Vorstandsmitglieder Anne und Birgit zusammen mit einer weiteren Frau die erste Schicht übernehmen?

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{3} = 80$$

3. 40% der Besucher des Sommerfestes sind männlich; 30% der Besucher trinken nur Fruchtsaft; 42% der Besucher sind weiblich und trinken nicht nur Fruchtsaft.

- a) Untersuchen Sie die Ereignisse  $F$ : „Ein zufällig ausgewählter Besucher trinkt nur Fruchtsaft“ und  $W$ : „Ein zufällig ausgewählter Besucher ist weiblich“ auf stochastische Unabhängigkeit.

	$W$	$\bar{W}$	
$F$	0,18	0,12	0,3
$\bar{F}$	0,42	0,28	0,7
	0,6	0,4	

Die Ereignisse sind stochastisch unabhängig.

Im Folgenden wird das Ereignis  $C$ : „Ein zufällig ausgewählter Besucher ist männlich oder trinkt nicht nur Fruchtsaft“ betrachtet.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $C$ .  $1 - 0,18 = 82\%$

c) Beschreiben Sie das Gegenereignis von  $C$  in Worten.

„Ein zufällig ausgewählter Besucher ist weiblich und trinkt nur Fruchtsaft.“

4. Die Vorsitzende des Fördervereins möchte der Schule einen neuen Schulgarten aus den Mitteln des Vereins finanzieren. Sie geht dabei von einer Zustimmungsquote von 60% unter den Schülern aus. Der Kassenwart spricht sich gegen die Finanzierung aus, da er mit einer Zustimmungsquote von höchstens 40% rechnet. Er schlägt eine Befragung von 50 zufällig ausgewählten Schülern vor. Seine Behauptung soll mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% irrtümlich verworfen werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art unter der Annahme, dass die Vorsitzende mit ihrer Behauptung bezüglich der Zustimmungsquote Recht hat.

Die Nullhypothese lautet:  $p \leq 40\%$ .

$$P_{0,4}^{50}(Y \leq k) \geq 95\% \implies k \geq 26$$

$$\bar{A} = \{27, \dots, 50\} \quad (\text{Ablehnungsbereich für die Nullhypothese})$$

$$P_{0,6}^{50}(Y \leq 26) = 15,6\% \quad \text{Fehler 2. Art}$$