

## Insel-Camp-Aufgabe    Bayern GK 2008

Bei der neuen Fernsehshow „Insel-Camp“ nehmen 7 Frauen und 7 Männer als Kandidaten teil.

1. Für die Fahrt zur Insel stehen drei Boote zur Verfügung, eines für 8, eines für 4 und eines für 2 Personen.
  - a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die 14 Kandidaten so aufzuteilen, dass jedes der drei Boote voll besetzt ist?
  - b) Die Zuschauer haben aus den Kandidaten Judith für das 8er-Boot, Sabine für das 4er-Boot und Laura für das 2er-Boot als Bootsführer bestimmt. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die drei Bootsmannschaften für die gemeinsame Fahrt zur Insel zu vervollständigen, wenn in jedem Boot gleich viele Männer und Frauen sitzen sollen?
2. Beim Spiel „Schatzsuche“ muss ein Kandidat abgesperrte Truhen öffnen. Bei jeder Truhe stehen dafür 6 sehr ähnliche, aber dennoch verschiedene Schlüssel zur Auswahl, von denen 4 nicht zum Schloss passen. Mit jedem einzelnen der beiden anderen Schlüssel lässt sich das Schloss entriegeln. Pro Truhe darf der Kandidat 2 verschiedene Schlüssel ausprobieren, die er zufällig auswählt.
  - a) Bestätigen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms, dass bei einer Truhe die Wahrscheinlichkeit für das Öffnen 60% beträgt.
  - b) Wie viele Truhen müssen in diesem Spiel mindestens zur Verfügung gestellt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9% wenigstens eine Truhe geöffnet wird?
  - c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:  
A: „Von 15 Truhen werden genau 7 geöffnet.“  
B: „Von 15 Truhen werden mehr als 10 geöffnet.“
3. Beim Spiel „Perlentauchen“ darf ein Kandidat eine von 300 Muscheln öffnen. 55% der Muscheln sind außen golden gefärbt, der Rest ist außen schwarz. In 24% aller Muscheln ist eine Perle enthalten, die übrigen sind leer. 32% der Muscheln sind weder goldfarben, noch enthalten sie eine Perle.
  - a) Wie viele goldfarbene Muscheln enthalten keine Perle?
  - b) Eine Muschel wird zufällig ausgewählt. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse „goldfarben“ und „enthält Perle“ stochastisch unabhängig sind.
  - c) Ist es für den Kandidaten aussichtsreicher, eine goldene oder eine schwarze Muschel zu öffnen, um eine Perle zu finden? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung.
4. Der Produzent will eine Fortsetzung der Fernsehshow nur dann finanzieren, wenn mehr als 75% der „Insel-Camp“-Zuschauer dies befürworten. Die Entscheidung für oder gegen eine Fortsetzung soll mit Hilfe einer Umfrage unter 200 zufällig ausgewählten Zuschauern dieser Sendung gefällt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Sendung irrtümlich fortgesetzt wird, soll höchstens 5% betragen. Geben Sie die zugehörige Entscheidungsregel an, bei der zugleich die Wahrscheinlichkeit für ein irrtümliches Absetzen möglichst klein ist.

## Insel-Camp-Aufgabe    Bayern GK 2008    Lösungshinweise

Bei der neuen Fernsehshow „Insel-Camp“ nehmen 7 Frauen und 7 Männer als Kandidaten teil.

1. Für die Fahrt zur Insel stehen drei Boote zur Verfügung, eines für 8, eines für 4 und eines für 2 Personen.

- a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die 14 Kandidaten so aufzuteilen, dass jedes der drei Boote voll besetzt ist?

$$\binom{14}{8} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{2} = 45045$$

oder  $\frac{14!}{8! \cdot 4! \cdot 2!}$

- b) Die Zuschauer haben aus den Kandidaten Judith für das 8er-Boot, Sabine für das 4er-Boot und Laura für das 2er-Boot als Bootsführer bestimmt. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die drei Bootsmannschaften für die gemeinsame Fahrt zur Insel zu vervollständigen, wenn in jedem Boot gleich viele Männer und Frauen sitzen sollen?

$$\binom{7}{4} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{3}{2} = 420$$

oder (mit dem 2er-Boot beginnen)  $7 \cdot 4 \cdot \binom{6}{2}$

2. Beim Spiel „Schatzsuche“ muss ein Kandidat abgesperrte Truhen öffnen. Bei jeder Truhe stehen dafür 6 sehr ähnliche, aber dennoch verschiedene Schlüssel zur Auswahl, von denen 4 nicht zum Schloss passen. Mit jedem einzelnen der beiden anderen Schlüssel lässt sich das Schloss entriegeln. Pro Truhe darf der Kandidat 2 verschiedene Schlüssel ausprobieren, die er zufällig auswählt.

- a) Bestätigen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms, dass bei einer Truhe die Wahrscheinlichkeit für das Öffnen 60% beträgt.

$$\frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5}$$

- b) Wie viele Truhen müssen in diesem Spiel mindestens zur Verfügung gestellt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9% wenigstens eine Truhe geöffnet wird?  $n \geq 8$

- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: „Von 15 Truhen werden genau 7 geöffnet.“  $P_{0,6}^{15}(X = 7) = 11,8\%$

B: „Von 15 Truhen werden mehr als 10 geöffnet.“  $P_{0,6}^{15}(X > 10) = 21,7\%$

3. Beim Spiel „Perlentauchen“ darf ein Kandidat eine von 300 Muscheln öffnen. 55% der Muscheln sind außen golden gefärbt, der Rest ist außen schwarz. In 24% aller Muscheln ist eine Perle enthalten, die übrigen sind leer. 32% der Muscheln sind weder goldfarben, noch enthalten sie eine Perle.

- a) Wie viele goldfarbene Muscheln enthalten keine Perle?

	P	$\bar{P}$	Summe
<i>G</i>	33	<u>132</u>	165
$\bar{G}$	39	96	135
<i>Summe</i>	72	228	300

- b) Eine Muschel wird zufällig ausgewählt. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse „goldfarben“ und „enthält Perle“ stochastisch unabhängig sind. Die Ereignisse sind stochastisch abhängig.

- c) Ist es für den Kandidaten aussichtsreicher, eine goldene oder eine schwarze Muschel zu öffnen, um eine Perle zu finden? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung.

Anteil der Muscheln mit Perlen unter den goldenen (20%) ist kleiner als unter den schwarzen (28,9%).  
Es ist aussichtsreicher, eine schwarze Perle zu öffnen.

4. Der Produzent will eine Fortsetzung der Fernsehshow nur dann finanzieren, wenn mehr als 75% der „Insel-Camp“-Zuschauer dies befürworten. Die Entscheidung für oder gegen eine Fortsetzung soll mit Hilfe einer Umfrage unter 200 zufällig ausgewählten Zuschauern dieser Sendung gefällt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Sendung irrtümlich fortgesetzt wird, soll höchstens 5% betragen. Geben Sie die zugehörige Entscheidungsregel an, bei der zugleich die Wahrscheinlichkeit für ein irrtümliches Absetzen möglichst klein ist.

Die Nullhypothese lautet:  $p \leq 75\%$ .

Wenn sie durch einen Test widerlegt werden kann, wird die Finanzierung fortgesetzt.

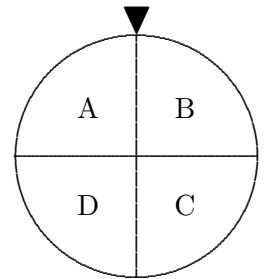
$$P_{0,75}^{200}(X \leq k) \geq 0,95\% \implies k \geq 160$$

Ab einschließlich 161 Befürwortern wird die Sendung fortgesetzt.

## Limonade-Aufgabe    Bayern GK 2008

Eine neue Limonade „BioFrucht“ erobert den Getränkemarkt. BioFrucht wird in vier Sorten hergestellt: Apfel (A), Brombeere (B), Citro (C) und Dattel (D).

1. Der Hersteller von BioFrucht hält eine Werbekampagne für unnötig, weil er vermutet, dass der Bekanntheitsgrad  $p$  seiner Limonade mindestens 40% beträgt. Um dies zu überprüfen, werden 200 zufällig ausgewählte Personen befragt. Der Hersteller will von seiner Vermutung  $p \geq 0,4$  abrücken und eine Werbekampagne mit kostenlosen Getränkeproben starten, wenn bei der Umfrage weniger als 70 Personen angeben, BioFrucht zu kennen.
  - a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Getränkeproben verteilt werden, obwohl der Bekanntheitsgrad von BioFrucht tatsächlich nur 30% beträgt?
  - b) Bestimmen Sie die maximale Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Hersteller unnötigerweise Getränkeproben verteilt.
  
2. In einer Stadt wird die Werbekampagne durchgeführt. Dafür werden an einen Werbestand in der Fußgängerzone gemischte BioFrucht-Getränkekästen angeliefert, die je 5 Flaschen der Sorten A, B, C und D enthalten. Ein Mitarbeiter der Herstellerfirma entnimmt rein zufällig 5 Flaschen aus einem zunächst vollen Kasten und verteilt diese an Passanten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er
  - a) zweimal Sorte A, zweimal Sorte B und einmal Sorte D entnommen hat?
  - b) von jeder Sorte mindestens eine Flasche entnommen hat?



3. Als weiterer Teil der Werbekampagne wird in der Fußgängerzone ein Glücksrad mit 4 gleich großen Sektoren aufgebaut. Dreht ein Passant das Glücksrad, so bekommt er eine Flasche BioFrucht der angezeigten Sorte geschenkt. 10 Personen drehen nacheinander je einmal das Glücksrad.
  - a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
    - $E$ : „Genau 3 Personen erhalten je eine Flasche der Sorte D.“
    - $F$ : „Mindestens 3 Personen erhalten eine Flasche der Sorte D.“
    - $G$ : „3 aufeinander folgende Personen erhalten eine Flasche der Sorte D, die restlichen Personen erhalten Flaschen anderer Sorten.“
  - b) Wie oft muss das Glücksrad mindestens gedreht werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens eine Flasche der Sorte C verschenkt wird?
  
4. Um den Beliebtheitsgrad der einzelnen Sorten herauszufinden, wurde eine bayernweite Befragung durchgeführt. Dabei erhielt man unter den Personen, die eine Liebessorte angeben konnten, folgendes Ergebnis:

Lieblingssorte	A	B	C	D
Häufigkeit der Nennung	12%	18%	28%	42%

- a) 204 Personen gaben als Liebessorte Apfel an. Wie viele Personen nannten Dattel als Liebessorte?
- b) Im Folgenden werden nur die befragten Personen betrachtet, die eine Liebessorte angegeben haben. Unterscheidet man diese Personen nach ihrem Geschlecht, so ergibt sich folgendes Bild: 10% sind weiblich und haben Dattel als Liebessorte. 25% sind männlich und haben eine andere Liebessorte als Dattel. Untersuchen Sie die beiden Ereignisse „Eine zufällig ausgewählte Person hat die Liebessorte Dattel“ und „Eine zufällig ausgewählte Person ist männlich“ auf stochastische Unabhängigkeit.

## Limonade-Aufgabe    Bayern GK 2008    Lösungshinweise

Eine neue Limonade „BioFrucht“ erobert den Getränkemarkt. BioFrucht wird in vier Sorten hergestellt: Apfel (A), Brombeere (B), Citro (C) und Dattel (D).

1. Der Hersteller von BioFrucht hält eine Werbekampagne für unnötig, weil er vermutet, dass der Bekanntheitsgrad  $p$  seiner Limonade mindestens 40% beträgt. Um dies zu überprüfen, werden 200 zufällig ausgewählte Personen befragt. Der Hersteller will von seiner Vermutung  $p \geq 0,4$  abrücken und eine Werbekampagne mit kostenlosen Getränkeproben starten, wenn bei der Umfrage weniger als 70 Personen angeben, BioFrucht zu kennen.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Getränkeproben verteilt werden, obwohl der Bekanntheitsgrad von BioFrucht tatsächlich nur 30% beträgt?

Die Nullhypothese lautet:  $p \geq 0,4\%$ .  
 $P_{0,3}^{200}(X \geq 70) = 7,3\%$  (Fehler 2. Art)

- b) Bestimmen Sie die maximale Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Hersteller unnötigerweise Getränkeproben verteilt.

$P_{0,4}^{200}(X \leq 69) = 6,4\%$

2. In einer Stadt wird die Werbekampagne durchgeführt. Dafür werden an einen Werbestand in der Fußgängerzone gemischte BioFrucht-Getränkekästen angeliefert, die je 5 Flaschen der Sorten A, B, C und D enthalten. Ein Mitarbeiter der Herstellerfirma entnimmt rein zufällig 5 Flaschen aus einem zunächst vollen Kasten und verteilt diese an Passanten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er

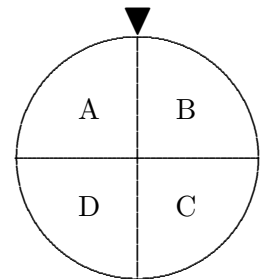
- a) zweimal Sorte A, zweimal Sorte B und einmal Sorte D entnommen hat?

$$\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{20}{5}} = 3,2\%$$

- b) von jeder Sorte mindestens eine Flasche entnommen hat?

$$\frac{4 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{20}{5}} = 32,2\%$$

3. Als weiterer Teil der Werbekampagne wird in der Fußgängerzone ein Glücksrad mit 4 gleich großen Sektoren aufgebaut. Dreht ein Passant das Glücksrad, so bekommt er eine Flasche BioFrucht der angezeigten Sorte geschenkt. 10 Personen drehen nacheinander je einmal das Glücksrad.



- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

$E$ : „Genau 3 Personen erhalten je eine Flasche der Sorte D.“  $P_{1/4}^{10}(X = 3) = 25\%$

$F$ : „Mindestens 3 Personen erhalten eine Flasche der Sorte D.“  $P_{1/4}^{10}(X \geq 3) = 47,4\%$

$G$ : „3 aufeinander folgende Personen erhalten eine Flasche der Sorte D, die restlichen Personen erhalten Flaschen anderer Sorten.“  $8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7 = 1,7\%$

Es gibt 8 verschiedene Reihenfolgen für die 3 Personen, die die Flasche mit der Sorte D bekommen.

- b) Wie oft muss das Glücksrad mindestens gedreht werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens eine Flasche der Sorte C verschenkt wird?

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0,95 \quad \implies \quad n \geq 11$$

4. Um den Beliebtheitsgrad der einzelnen Sorten herauszufinden, wurde eine bayernweite Befragung durchgeführt. Dabei erhielt man unter den Personen, die eine Lieblingssorte angeben konnten, folgendes Ergebnis:

Lieblingssorte	A	B	C	D
Häufigkeit der Nennung	12 %	18 %	28 %	42 %

- a) 204 Personen gaben als Lieblingssorte Apfel an. Wie viele Personen nannten Dattel als Lieblingssorte?  
 Anzahl der Befragten 1700  
 714 nannten Dattel als Lieblingssorte.
- b) Im Folgenden werden nur die befragten Personen betrachtet, die eine Lieblingssorte angegeben haben. Unterscheidet man diese Personen nach ihrem Geschlecht, so ergibt sich folgendes Bild: 10% sind weiblich und haben Dattel als Lieblingssorte. 25% sind männlich und haben eine andere Lieblingssorte als Dattel. Untersuchen Sie die beiden Ereignisse „Eine zufällig ausgewählte Person hat die Lieblingssorte Dattel“ und „Eine zufällig ausgewählte Person ist männlich“ auf stochastische Unabhängigkeit.

	$D$	$\bar{D}$	Summe
$w$	0,10	0,33	0,43
$m$	0,32	0,25	0,57
Summe	0,42	0,58	1

Die Ereignisse sind stochastisch abhängig.