

Müsli-Aufgabe Bayern GK 2009

1. Anlässlich einer Studie wurden 2000 Jugendliche im Alter von 18 Jahren zu ihren Ernährungsgewohnheiten befragt. Von den Befragten gaben 740 an, am Morgen nicht zu frühstücken. Von diesen 740 „Nichtfrühstückern“ waren 420 berufstätig. Unter den 1260 „Frühstückern“ waren 800 nicht berufstätig. Aus den Befragten wird eine Person zufällig ausgewählt. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse F : „Die Person frühstückt am Morgen“ und B : „Die Person ist berufstätig“ stochastisch abhängig sind.

Das Unternehmen „Müsli-4-U“ bietet über das Internet individuell zusammenstellbare Müslipackungen an. Für die Zusammenstellung kann aus 2 Basismischungen sowie aus 9 Frucht-, 4 Nuss- und 3 Getreidezusätzen gewählt werden.

2. Wie viele verschiedene Müslipackungen können zusammengestellt werden, wenn jede genau eine Basismischung und genau 4 verschiedene Zusätze enthalten soll?
3. Im Rahmen einer Aktion „Gesundes Frühstück“ konnte „Müsli-4-U“ an einem Gymnasium als Kooperationspartner gewonnen werden. Der Kooperationspartner liefert jeder Klasse täglich eine Gratis-Packung Müsli, das aus genau einer Basismischung und genau 2 Zusätzen zusammengestellt wird. Die beiden Zusätze stammen dabei jeweils aus zwei verschiedenen der Bereiche „Früchte“, „Nüsse“ beziehungsweise „Getreide“.
 - a) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass es 150 verschiedene Möglichkeiten gibt, eine solche Gratis-Packung zusammenzustellen.

Im Folgenden wird angenommen, dass jede dieser 150 Möglichkeiten gleich wahrscheinlich ist und die Lieferung der einzelnen Packungen unabhängig voneinander erfolgt.

- b) Es gibt Schüler, die aufgrund einer Allergie keine Nüsse essen dürfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Gratis-Packung keinen Nusszusatz enthält. [Ergebnis: 36 %]
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Klasse 8a an mindestens 4 von 5 Tagen einer Schulwoche die gelieferte Gratis-Packung keinen Nusszusatz enthält.
- d) Formulieren Sie ein zum Sachzusammenhang der Teilaufgabe 3c passendes Ereignis D , das die Wahrscheinlichkeit $P(D) = 0,36^2 \cdot \binom{3}{2} \cdot 0,36^2 \cdot 0,64$ besitzt.
- e) Wie viele Gratis-Packungen müssen mindestens zusammengestellt werden, damit mit mehr als 99% Wahrscheinlichkeit mindestens eine Packung ohne Nusszusatz dabei ist?
- f) Das Unternehmen „Müsli-4-U“ möchte bei seinen Produkten den Geschmack von Jugendlichen stärker berücksichtigen. Es vermutet, dass mindestens 50% der Jugendlichen ein Müsli ohne Nusszusatz bevorzugen. Um diese Vermutung zu testen, werden 100 zufällig ausgewählte Jugendliche befragt. Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Vermutung des Unternehmens mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10% irrtümlicherweise verworfen werden soll?

4. Den über das Internet bei „Müsli-4-U“ bestellten Müslipackungen wird jeweils mit der Wahrscheinlichkeit p ein Gutschein beigelegt.
- a) Zeigen Sie:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in genau 4 von 6 über das Internet bestellten Packungen jeweils ein Gutschein befindet, kann durch eine Funktion f mit dem Term $f(p) = 15(p^6 - 2p^5 + p^4)$, $p \in [0; 1]$, beschrieben werden.
- b) Bestimmen Sie die Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion f aus Teilaufgabe 4a. Interpretieren Sie jede dieser Nullstellen im Anwendungszusammenhang.

Müsli-Aufgabe Bayern GK 2009 Lösungshinweise

1. Anlässlich einer Studie wurden 2000 Jugendliche im Alter von 18 Jahren zu ihren Ernährungsgewohnheiten befragt. Von den Befragten gaben 740 an, am Morgen nicht zu frühstücken. Von diesen 740 „Nichtfrühstückern“ waren 420 berufstätig. Unter den 1260 „Frühstückern“ waren 800 nicht berufstätig. Aus den Befragten wird eine Person zufällig ausgewählt. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse F : „Die Person frühstückt am Morgen“ und B : „Die Person ist berufstätig“ stochastisch abhängig sind.

	B	\bar{B}	$Summe$
F	460	800	1260
\bar{F}	420	320	740
$Summe$	880	1120	2000

Die Ereignisse sind stochastisch abhängig.

Das Unternehmen „Müsli-4-U“ bietet über das Internet individuell zusammenstellbare Müslipackungen an. Für die Zusammenstellung kann aus 2 Basismischungen sowie aus 9 Frucht-, 4 Nuss- und 3 Getreidezusätzen gewählt werden.

2. Wie viele verschiedene Müslipackungen können zusammengestellt werden, wenn jede genau eine Basismischung und genau 4 verschiedene Zusätze enthalten soll? $\binom{2}{1} \cdot \binom{16}{4} = 3640$
3. Im Rahmen einer Aktion „Gesundes Frühstück“ konnte „Müsli-4-U“ an einem Gymnasium als Kooperationspartner gewonnen werden. Der Kooperationspartner liefert jeder Klasse täglich eine Gratis-Packung Müsli, das aus genau einer Basismischung und genau 2 Zusätzen zusammengestellt wird. Die beiden Zusätze stammen dabei jeweils aus zwei verschiedenen der Bereiche „Früchte“, „Nüsse“ beziehungsweise „Getreide“.
- a) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass es 150 verschiedene Möglichkeiten gibt, eine solche Gratis-Packung zusammenzustellen. $2 \cdot (9 \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 4 \cdot 3) = 150$

Im Folgenden wird angenommen, dass jede dieser 150 Möglichkeiten gleich wahrscheinlich ist und die Lieferung der einzelnen Packungen unabhängig voneinander erfolgt.

- b) Es gibt Schüler, die aufgrund einer Allergie keine Nüsse essen dürfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Gratis-Packung keinen Nusszusatz enthält. [Ergebnis: 36%]
- $$\frac{2 \cdot 9 \cdot 3}{150}$$
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Klasse 8a an mindestens 4 von 5 Tagen einer Schulwoche die gelieferte Gratis-Packung keinen Nusszusatz enthält. $P_{0,36}^5(X \geq 4) = 6,0\%$
- d) Formulieren Sie ein zum Sachzusammenhang der Teilaufgabe 3c passendes Ereignis D , das die Wahrscheinlichkeit $P(D) = 0,36^2 \cdot \binom{3}{2} \cdot 0,36^2 \cdot 0,64$ besitzt.

An den ersten beiden Tagen der Woche enthalten die gelieferten Gratis-Packungen keinen Nusszusatz und an den restlichen drei Tagen sind dies genau 2 Gratis-Packungen.

- e) Wie viele Gratis-Packungen müssen mindestens zusammengestellt werden, damit mit mehr als 99% Wahrscheinlichkeit mindestens eine Packung ohne Nusszusatz dabei ist?

$$1 - 0,64^n > 0,99 \quad \implies \quad n \geq 11$$

- f) Das Unternehmen „Müsli-4-U“ möchte bei seinen Produkten den Geschmack von Jugendlichen stärker berücksichtigen. Es vermutet, dass mindestens 50% der Jugendlichen ein Müsli ohne Nusszusatz bevorzugen. Um diese Vermutung zu testen, werden 100 zufällig ausgewählte Jugendliche befragt. Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Vermutung des Unternehmens mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10% irrtümlicherweise verworfen werden soll?

Die Nullhypothese lautet: $p \geq 50\%$.

$$P_{0,5}^{100}(X \leq k) \leq 10\% \implies k \leq 43$$

$$\bar{A} = \{0, \dots, 43\} \quad (\text{Ablehnungsbereich für die Nullhypothese})$$

4. Den über das Internet bei „Müsli-4-U“ bestellten Müsli-Packungen wird jeweils mit der Wahrscheinlichkeit p ein Gutschein beigelegt.

- a) Zeigen Sie:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in genau 4 von 6 über das Internet bestellten Packungen jeweils ein Gutschein befindet, kann durch eine Funktion f mit dem Term $f(p) = 15(p^6 - 2p^5 + p^4)$, $p \in [0; 1]$, beschrieben werden.

$$P = \binom{6}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^2$$

- b) Bestimmen Sie die Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion f aus Teilaufgabe 4a. Interpretieren Sie jede dieser Nullstellen im Anwendungszusammenhang.

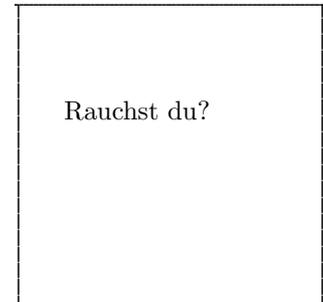
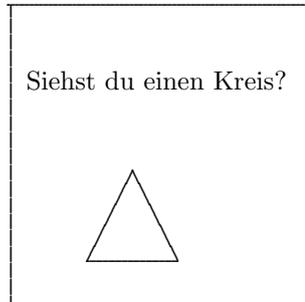
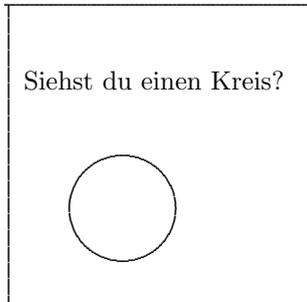
$$f'(p) = 30p^3 \cdot (3p^2 - 5p + 2)$$

$$\text{Nullstellen: } p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = \frac{2}{3} \quad (\text{Maximum})$$

$p_1 = 0$ bedeutet, dass das Unternehmen nie ein Gutschein beifügt,
 $p_2 = 1$ bedeutet, dass das Unternehmen immer ein Gutschein beifügt.

Das Ereignis aus 4a ist für $p_3 = \frac{2}{3}$ am wahrscheinlichsten.

5. Die SMV eines Gymnasiums möchte den Anteil der Raucherinnen unter den Schülerinnen der Mittelstufe an der eigenen Schule ermitteln. Sie führt deshalb eine Befragung durch. Dabei wird die so genannte Dunkelfeldmethode verwendet, die durch eine Anonymisierung der Daten ehrliche Antworten gewährleisten soll. Bei dieser Methode zieht die Befragte zufällig eine der drei abgebildeten, verdeckt liegenden Karten und beantwortet die Frage wahrheitsgemäß mit „Ja“ oder „Nein“. Der Interviewer notiert nur diese Antwort, ohne zu wissen, welche Karte jeweils gezogen wurde.



Von 357 auf diese Weise befragten Mädchen haben 138 mit „Ja“ geantwortet. Bestimmen Sie den Schätzwert für den Anteil der Raucherinnen unter den Schülerinnen, der sich aus diesen Angaben herleiten lässt.

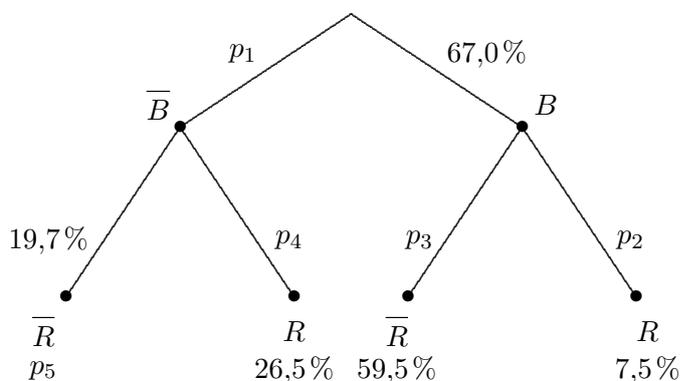
Rauchverbot Bayern GK 2009 Lösungshinweise

In den Jahren 2005, 2006 und 2007 wurde jeweils eine repräsentative Umfrage unter 2000 Menschen in Deutschland zum Thema „Rauchverbot in Restaurants“ durchgeführt. Im Jahr 2007 haben dabei 67,0% ein Rauchverbot befürwortet.

- Die Anzahl der Befürworter des Rauchverbots unter den Befragten ist im Jahr 2007 im Vergleich zum Jahr 2006 um 160 Personen, im Vergleich zum Jahr 2005 um 280 Personen größer. Berechnen Sie den prozentualen Anteil der Befürworter des Rauchverbots in den Jahren 2005 und 2006.

$$\text{Befürworter im Jahr 2007 } 1340, \quad P_{2006} = \frac{1340 - 160}{2000} = 59\%, \quad P_{2005} = \frac{1340 - 280}{2000} = 53\%$$

- Aus den Befragten des Jahres 2007 wird eine Person zufällig ausgewählt. Dabei werden die Ereignisse B : „Die Person befürwortet ein Rauchverbot in Restaurants“ und R : „Die Person ist Raucher“ betrachtet.



- Beschreiben Sie das Ereignis in Worten, dessen Wahrscheinlichkeit im obigen Baumdiagramm mit 7,5% angegeben ist. „Person befürwortet Rauchverbot und ist Raucher“
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3, p_4 und p_5 aus obigem Baumdiagramm in Prozent auf eine Nachkommastelle genau.
 $p_1 = 33\%, p_2 = 11,2\%, p_3 = 88,8\%, p_4 = 80,3\% p_5 = 6,5\%$
- Begründen Sie mit Hilfe entsprechender Wahrscheinlichkeiten, dass die Ereignisse B und R stochastisch abhängig sind. Teilbäume sind unterschiedlich.
- Bei welcher der folgenden Zahlen kann es sich um die Anzahl der Raucher unter den befragten Personen handeln? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$150 \quad 530 \quad 680 \quad 1340 \qquad \qquad \qquad 0,34 \cdot 2000 = 680$$

- Wie viel Prozent der Raucher haben das Rauchverbot befürwortet? 22,1% (bedingte W.)

- Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass in der Bevölkerung 67% das Rauchverbot in Restaurants befürworten.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 12 zufällig ausgewählten Personen höchstens 10 Befürworter befinden?
 $P_{0,67}^{12}(X \leq 10) = 94,4\%$
- Wie viele Personen müssen mindestens zufällig ausgewählt werden, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens ein Befürworter darunter befindet?

$$1 - 0,33^n > 0,99 \quad \implies \quad n \geq 5$$

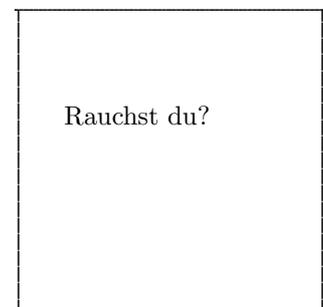
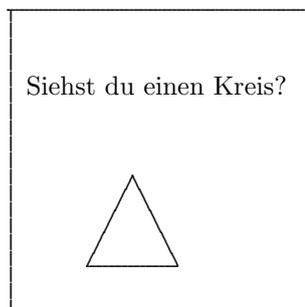
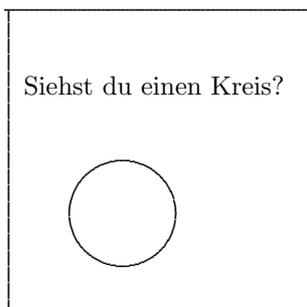
4. Es wird angezweifelt, dass der Anteil der Befürworter des Rauchverbots derzeit noch 67% beträgt. Vielmehr wird vermutet, dass der Prozentsatz gegenwärtig höchstens bei 60% liegt. Um diese Vermutung zu testen, wird eine Befragung von 100 zufällig ausgewählten Personen durchgeführt. Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Vermutung mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% irrtümlich abgelehnt werden soll?

Die Nullhypothese lautet: $p \leq 60\%$.

$$P_{0,6}^{100}(X \leq k) \geq 95\% \implies k \geq 68$$

$$\bar{A} = \{69, \dots, 100\} \quad (\text{Ablehnungsbereich für die Nullhypothese})$$

5. Die SMV eines Gymnasiums möchte den Anteil der Raucherinnen unter den Schülerinnen der Mittelstufe an der eigenen Schule ermitteln. Sie führt deshalb eine Befragung durch. Dabei wird die so genannte Dunkelfeldmethode verwendet, die durch eine Anonymisierung der Daten ehrliche Antworten gewährleisten soll. Bei dieser Methode zieht die Befragte zufällig eine der drei abgebildeten, verdeckt liegenden Karten und beantwortet die Frage wahrheitsgemäß mit „Ja“ oder „Nein“. Der Interviewer notiert nur diese Antwort, ohne zu wissen, welche Karte jeweils gezogen wurde.



Von 357 auf diese Weise befragten Mädchen haben 138 mit „Ja“ geantwortet. Bestimmen Sie den Schätzwert für den Anteil der Raucherinnen unter den Schülerinnen, der sich aus diesen Angaben herleiten lässt.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot p = \frac{138}{357} \implies p = 16,0\%$$