

Geraden-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2000

Gegeben sind im kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(6 | 0 | -2)$, $B(-2 | 4 | -2)$ und $S(2 | 2 | 3)$ und die beiden Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Beachten Sie: $B \in g$ und $S \in h$.

1. a) Begründen Sie, dass die Gerade g und der Punkt A eindeutig eine Ebene E festlegen und ermitteln Sie eine Gleichung von E in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem weist diese Ebene auf? [mögliches Ergebnis: $E: x_3 + 2 = 0$]
b) Weisen Sie nach, dass h parallel zu E liegt, und bestimmen Sie den Abstand der Geraden h von der Ebene E .
c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunkts F des Lots von S auf die Ebene E und zeigen Sie, dass F die Strecke $[AB]$ halbiert. [zur Kontrolle: $F(2 | 2 | -2)$]
d) Zeichnen Sie sämtliche Punkte und Geraden in ein Koordinatensystem ein. (Platzbedarf: halbe Seite)
2. a) Der Punkt A liegt auf einer Kugel K mit Mittelpunkt S . Ermitteln Sie den Radius der Kugel K und zeigen Sie, dass B ebenfalls auf dieser Kugel liegt.
b) Außer dem Punkt B liegt noch ein weiterer Punkt C der Geraden g auf der Kugel K . Ermitteln Sie seine Koordinaten und ergänzen Sie Ihre Zeichnung aus Aufgabe 1d) um Punkt C . [zur Kontrolle: $C(0 | -2 | -2)$]
c) Zeigen Sie, dass die Gerade FC Symmetrieachse im Dreieck ABC ist.
d) Bestimmen Sie den Rauminhalt der Pyramide $ABCS$.

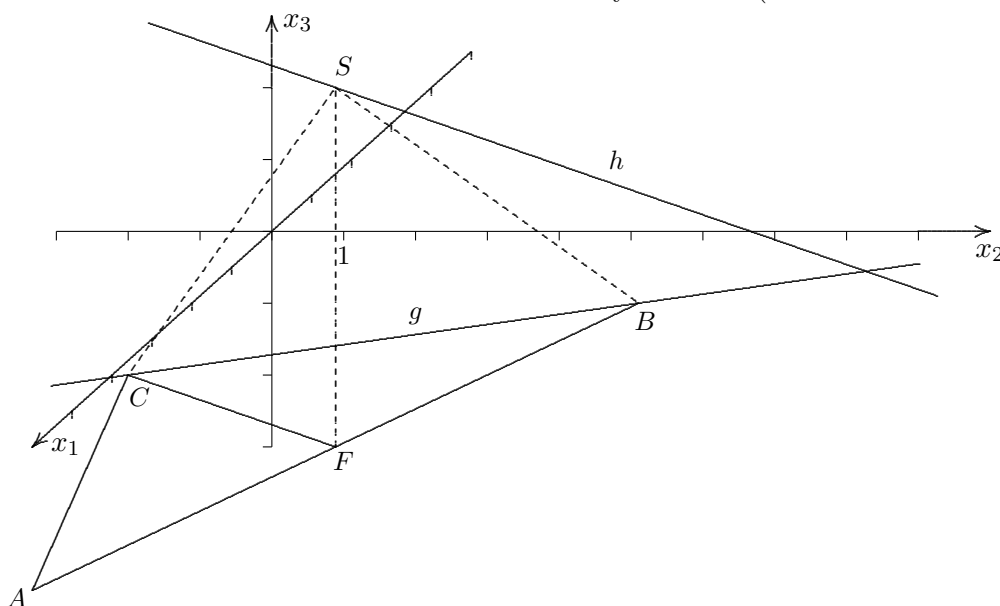
Geraden-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2000 Lösungen

Gegeben sind im kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(6 | 0 | -2)$, $B(-2 | 4 | -2)$ und $S(2 | 2 | 3)$ und die beiden Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Beachten Sie: $B \in g$ und $S \in h$.

1. a) Begründen Sie, dass die Gerade g und der Punkt A eindeutig eine Ebene E festlegen und ermitteln Sie eine Gleichung von E in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem weist diese Ebene auf? $A \notin g$ [mögliches Ergebnis: $E: x_3 + 2 = 0$]
- b) Weisen Sie nach, dass h parallel zu E liegt, und bestimmen Sie den Abstand der Geraden h von der Ebene E . $\vec{u}_h \perp \vec{n}_E, \quad d = 5 LE$
- c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunkts F des Lots von S auf die Ebene E und zeigen Sie, dass F die Strecke $[AB]$ halbiert. [zur Kontrolle: $F(2 | 2 | -2)$] $\vec{OF} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$
- d) Zeichnen Sie sämtliche Punkte und Geraden in ein Koordinatensystem ein. (Platzbedarf: halbe Seite)



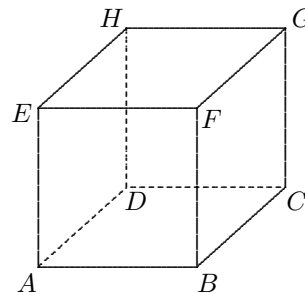
2. a) Der Punkt A liegt auf einer Kugel K mit Mittelpunkt S . Ermitteln Sie den Radius der Kugel K und zeigen Sie, dass B ebenfalls auf dieser Kugel liegt. $r = |\vec{AS}| = 3\sqrt{5}, \quad |\vec{BS}| = 3\sqrt{5}$
- b) Außer dem Punkt B liegt noch ein weiterer Punkt C der Geraden g auf der Kugel K . Ermitteln Sie seine Koordinaten und ergänzen Sie Ihre Zeichnung aus Aufgabe 1d) um Punkt C . [zur Kontrolle: $C(0 | -2 | -2)$] $K \cap g \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$
- c) Zeigen Sie, dass die Gerade FC Symmetrieachse im Dreieck ABC ist. $\vec{FC} \perp \vec{AB}$ siehe 1c) oder $|\vec{AC}| = |\vec{BC}| = \sqrt{40}$
- d) Bestimmen Sie den Rauminhalt der Pyramide $ABCS$.

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h, \quad G = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot |\vec{FC}| = \frac{1}{2} \sqrt{80} \cdot \sqrt{20} = 20, \quad h = 5 \text{ siehe 1b)}, \quad V = \frac{100}{3} \text{ VE}$$

oder $V = \frac{1}{6} |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AS})|$

Oktaeder-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2000

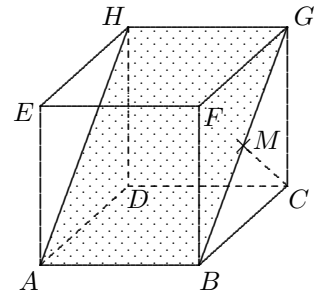
Gegeben sind im kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(2 \mid -1 \mid 0)$, $B(6 \mid 3 \mid -2)$ und $H(4 \mid 1 \mid 8)$. Die Punkte A , B und H sind Eckpunkte des Würfels $ABCDEFGH$.



1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene T , die durch das Dreieck ABH bestimmt ist, in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat T ?
[mögliches Ergebnis: $x_1 - x_2 - 3 = 0$]
- b) Das Dreieck ABH wird durch den Punkt G zu dem Rechteck $ABGH$ ergänzt. Berechnen Sie die Koordinaten von G .
[Ergebnis: $G(8 \mid 5 \mid 6)$]
2. Nun sollen die Koordinaten der übrigen Eckpunkte ermittelt werden.
 - a) Bestimmen Sie die Länge der Diagonalen $[BG]$ und begründen Sie, dass der Abstand des Punkts C von der Ebene T den Wert $3\sqrt{2}$ hat.
 - b) Die Gerade g steht senkrecht auf der Ebene T und halbiert die Diagonale $[BG]$. Stellen Sie eine Gleichung von g auf.
 - c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C und F . Verwenden Sie dabei, dass die x_1 -Koordinate von C kleiner ist als die von F .
[Ergebnis: $C(4 \mid 7 \mid 2)$, $F(10 \mid 1 \mid 2)$]
 - d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte D und E .
3. Die sechs Mittelpunkte der Seitenflächen des Würfels sind Eckpunkte eines regulären Oktaeders.
 - a) Begründen Sie anhand einer Skizze, dass die Kantenlänge des Oktaeders halb so lang ist wie die Diagonale einer Würfelseitenfläche.
 - b) Eine der Seitenflächen des Oktaeders liegt in der Ebene mit der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 - 7 = 0$ (Nachweis nicht erforderlich).
 Bestimmen Sie den Abstand d des Oktaedermittelpunkts von einer Seitenfläche des Oktaeders.
[zur Kontrolle: $d = \sqrt{3}$]
 - c) Geben Sie eine Gleichung der Inkugel des Oktaeders an.
 - d) Um wie viel Prozent (auf eine Dezimale genau) ist das Volumen der Inkugel des Oktaeders kleiner als das Volumen des Oktaeders?

Oktaeder-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2000 Lösungen

Gegeben sind im kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(2 | -1 | 0)$, $B(6 | 3 | -2)$ und $H(4 | 1 | 8)$. Die Punkte A , B und H sind Eckpunkte des Würfels $ABCDEFGH$.



1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene T , die durch das Dreieck ABH bestimmt ist, in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat T ?
 [mögliches Ergebnis: $x_1 - x_2 - 3 = 0$]
- b) Das Dreieck ABH wird durch den Punkt G zu dem Rechteck $ABGH$ ergänzt. Berechnen Sie die Koordinaten von G .
 [Ergebnis: $G(8 | 5 | 6)$]

2. Nun sollen die Koordinaten der übrigen Eckpunkte ermittelt werden.
- a) Bestimmen Sie die Länge der Diagonalen $[BG]$ und begründen Sie, dass der Abstand des Punkts C von der Ebene T den Wert $3\sqrt{2}$ hat.
 $|\vec{BG}| = 6\sqrt{2}$
- b) Die Gerade g steht senkrecht auf der Ebene T und halbiert die Diagonale $[BG]$. Stellen Sie eine Gleichung von g auf.

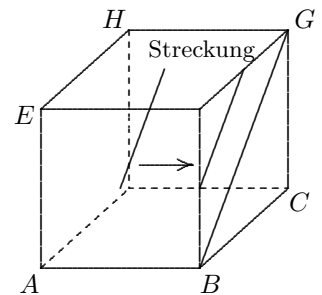
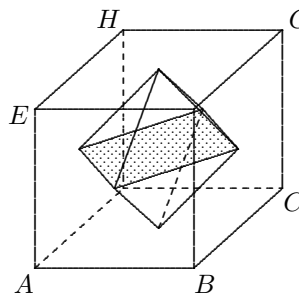
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C und F . Verwenden Sie dabei, dass die x_1 -Koordinate von C kleiner ist als die von F .
 [Ergebnis: $C(4 | 7 | 2)$, $F(10 | 1 | 2)$]

$$\vec{OC} = \vec{OM} - 3\sqrt{2} \cdot \vec{u}_g^\circ, \quad \vec{OF} = \vec{OM} + 3\sqrt{2} \cdot \vec{u}_g^\circ$$

- d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte D und E .
 $D(0 | 3 | 4)$, $E(6 | -3 | 4)$

3. Die sechs Mittelpunkte der Seitenflächen des Würfels sind Eckpunkte eines regulären Oktaeders.
- a) Begründen Sie anhand einer Skizze, dass die Kantenlänge des Oktaeders halb so lang ist wie die Diagonale einer Würfelseitenfläche.



- b) Eine der Seitenflächen des Oktaeders liegt in der Ebene mit der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 - 7 = 0$ (Nachweis nicht erforderlich).
 Bestimmen Sie den Abstand d des Oktaedermittelpunkts von einer Seitenfläche des Oktaeders.

$$[\text{zur Kontrolle: } d = \sqrt{3}] \quad M_{\text{Oktaeder}}(5 | 2 | 3)$$

- c) Geben Sie eine Gleichung der Inkugel des Oktaeders an.
 $[\vec{x} - \vec{OM}_{\text{Oktaeder}}]^2 = 3$

- d) Um wie viel Prozent (auf eine Dezimale genau) ist das Volumen der Inkugel des Oktaeders kleiner als das Volumen des Oktaeders?

$$V_{\text{Oktaeder}} = 2 \cdot \frac{1}{3} G \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{3} (3\sqrt{2})^2 \cdot 3 = 36 \text{ VE}$$

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} (\sqrt{3})^2 \pi = 21,77 \text{ VE} \quad 39,5\%$$