

Trapez-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2001

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die vier Punkte $A(-2 \mid 8 \mid 0)$, $B(0 \mid 0 \mid -2)$, $C(1 \mid 2 \mid 0)$ und $D(0 \mid 6 \mid 1)$ gegeben.

1. a) Weisen Sie nach, dass die vier Punkte A , B , C und D ein Trapez mit zwei gleich langen gegenüberliegenden Seiten, aber kein Parallelogramm (also ein gleichschenkliges Trapez) bilden.
- b) Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalschnittpunktes M . [zur Kontrolle: $M(0 \mid 4 \mid 0)$]
- c) Berechnen Sie den Abstand d des Punktes D von der Geraden AB . [zur Kontrolle: $d = 1,5\sqrt{2}$]
- d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des gleichschenkligen Trapezes $ABCD$.
- e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E , in der das Viereck $ABCD$ liegt, in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4 = 0$]

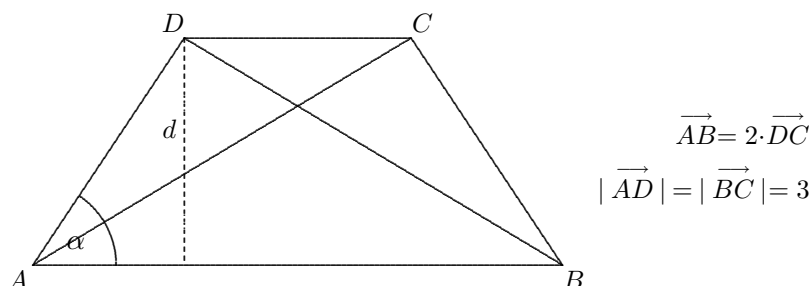
Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ bildet zusammen mit einem weiteren Punkt S eine Pyramide $ABCDS$. Der Punkt S liegt auf der Lotgeraden zur Ebene E durch den Punkt M und hat von der Ebene E den Abstand 15; der Koordinatenursprung und S liegen auf verschiedenen Seiten von E .

2. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von S . [zur Kontrolle: $S(10 \mid 9 \mid -10)$]
- b) Zeigen Sie, dass der Punkt $T(6 \mid 7 \mid -6)$ die Strecke $[MS]$ innen im Verhältnis 3:2 teilt.
- c) Bestimmen Sie eine Gleichung der zu E parallelen Ebene F , die durch den Punkt T verläuft, in Normalenform.
- d) Beim Schnitt der Ebene F mit der Pyramide $ABCDS$ entstehen zwei Teilkörper: ein Pyramidenstumpf und die zugehörige Ergänzungspyramide. Zeigen Sie, dass das Volumen der Ergänzungspyramide weniger als 7% des Volumens der Pyramide $ABCDS$ beträgt.

Trapez-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2001 Lösungen

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die vier Punkte $A(-2 | 8 | 0)$, $B(0 | 0 | -2)$, $C(1 | 2 | 0)$ und $D(0 | 6 | 1)$ gegeben.

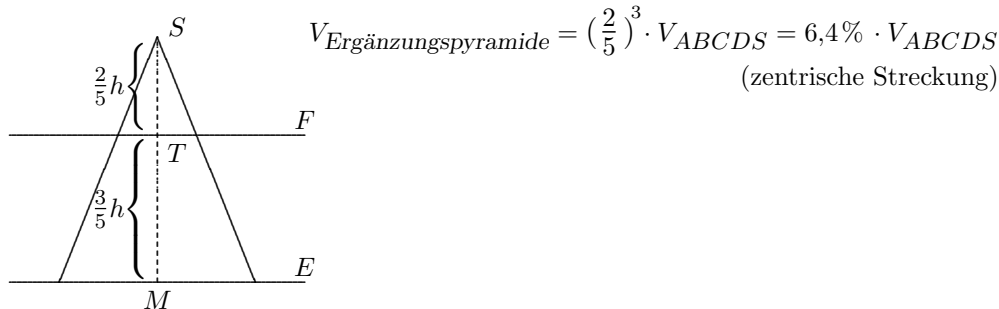
1. a) Weisen Sie nach, dass die vier Punkte A , B , C und D ein Trapez mit zwei gleich langen gegenüberliegenden Seiten, aber kein Parallelogramm (also ein gleichschenkliges Trapez) bilden.



- b) Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalschnittpunktes M . [zur Kontrolle: $M(0 | 4 | 0)$]
 c) Berechnen Sie den Abstand d des Punktes D von der Geraden AB . [zur Kontrolle: $d = 1,5\sqrt{2}$]
 $\alpha = 45^\circ$ mehrere Lösungswege
 d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des gleichschenkligen Trapezes $ABCD$. $A_{Trapez} = 13,5 \text{ FE}$ (elementar)
 e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E , in der das Viereck $ABCD$ liegt, in Normalenform.
 [mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4 = 0$]

Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ bildet zusammen mit einem weiteren Punkt S eine Pyramide $ABCDS$. Der Punkt S liegt auf der Lotgeraden zur Ebene E durch den Punkt M und hat von der Ebene E den Abstand 15; der Koordinatenursprung und S liegen auf verschiedenen Seiten von E .

2. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von S . [zur Kontrolle: $S(10 | 9 | -10)$]
 $\vec{OS} = \vec{OM} + 15 \cdot \vec{n}_E^\circ$
 b) Zeigen Sie, dass der Punkt $T(6 | 7 | -6)$ die Strecke $[MS]$ innen im Verhältnis 3:2 teilt.
 $\vec{MT} = \lambda \cdot \vec{TS} \implies \lambda = \frac{3}{2}$
 c) Bestimmen Sie eine Gleichung der zu E parallelen Ebene F , die durch den Punkt T verläuft, in Normalenform.
 $F: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 31 = 0$
 d) Beim Schnitt der Ebene F mit der Pyramide $ABCDS$ entstehen zwei Teilkörper: ein Pyramidenstumpf und die zugehörige Ergänzungspyramide. Zeigen Sie, dass das Volumen der Ergänzungspyramide weniger als 7% des Volumens der Pyramide $ABCDS$ beträgt.



Abroll-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2001

Gegeben ist in einem kartesischen Koordinatensystem die Ebene $E: 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 60$.
Ihr Schnittpunkt mit der x_1 -Achse heißt S_1 , mit der x_2 -Achse S_2 und mit der x_3 -Achse S_3 .

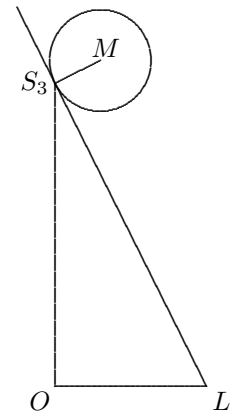
1. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von S_1 , S_2 und S_3 und geben Sie eine Gleichung der Geraden S_1S_2 an. [zur Kontrolle: $S_3(0 | 0 | 20)$]
- b) Vom Punkt S_3 wird ein Lot auf die Gerade S_1S_2 gefällt. Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes L . [zur Kontrolle: $L(3 | 9 | 0)$]
- c) Legen Sie ein Koordinatensystem an und tragen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ und die Gerade S_3L ein.
- d) Begründen Sie, dass L der Punkt der Geraden S_1S_2 ist, der den kürzesten Abstand zum Ursprung O hat, und berechnen Sie diesen Abstand. Ermitteln Sie die Winkel im Dreieck OLS_3 auf $0,1^\circ$ genau.

2. Eine Kugel mit Radius 7 berührt die Ebene E im Punkt S_3 .
 - a) Bestimmen Sie die Koordinaten der möglichen Kugelmittelpunkte.

Im Folgenden wird der Fall betrachtet, dass die Kugel zunächst den Mittelpunkt $M(2 | 6 | 23)$ hat (siehe Skizze) und dann auf der Ebene E so rollt, dass ihre Spur auf der Halbgeraden $[S_3L$ liegt.

- b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden m , auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt.

Die Kugel erreicht schließlich die x_1x_2 -Ebene und rollt auf dieser weiter.



Skizze nicht maßstabsgetreu

- c) Berechnen Sie den Schnittpunkt T der Geraden m (siehe Aufgabe 2b)) mit der zur x_1x_2 -Ebene parallelen Ebene, in der sich nun der Kugelmittelpunkt bewegt. [zur Kontrolle: $T(4,4 | 13,2 | 7)$]
- d) Bestimmen Sie den letzten Berührungspunkt B , den die Kugel bei dem beschriebenen Abrollvorgang mit der Ebene E hatte, und markieren Sie in der Zeichnung von Aufgabe 1c) mit Farbe die Spur, welche die Kugel auf der Ebene E hinterließ.

Abroll-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2001 Lösungen

Gegeben ist in einem kartesischen Koordinatensystem die Ebene $E: 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 60$.
Ihr Schnittpunkt mit der x_1 -Achse heißt S_1 , mit der x_2 -Achse S_2 und mit der x_3 -Achse S_3 .

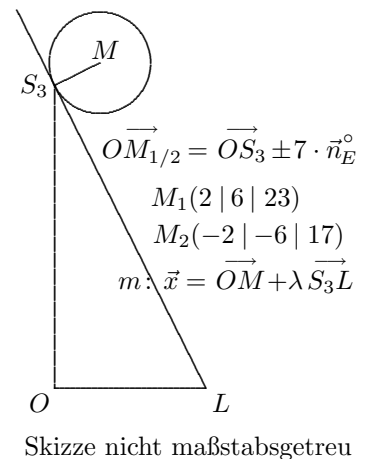
1. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von S_1 , S_2 und S_3 und geben Sie eine Gleichung der Geraden S_1S_2 an. [zur Kontrolle: $S_3(0 | 0 | 20)$] siehe Schrägbild
- b) Vom Punkt S_3 wird ein Lot auf die Gerade S_1S_2 gefällt. Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes L . [zur Kontrolle: $L(3 | 9 | 0)$]
- c) Legen Sie ein Koordinatensystem an und tragen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ und die Gerade S_3L ein.
- d) Begründen Sie, dass L der Punkt der Geraden S_1S_2 ist, der den kürzesten Abstand zum Ursprung O hat, und berechnen Sie diesen Abstand. Ermitteln Sie die Winkel im Dreieck OLS_3 auf $0,1^\circ$ genau. $\vec{OL} \perp \vec{S_1S_2}$, $|\vec{OL}| = 3\sqrt{10}$, $\angle S_3LO = 64,1^\circ$, $\angle OS_3L = 25,4^\circ$

2. Eine Kugel mit Radius 7 berührt die Ebene E im Punkt S_3 .
 - a) Bestimmen Sie die Koordinaten der möglichen Kugelmittelpunkte.

Im Folgenden wird der Fall betrachtet, dass die Kugel zunächst den Mittelpunkt $M(2 | 6 | 23)$ hat (siehe Skizze) und dann auf der Ebene E so rollt, dass ihre Spur auf der Halbgeraden $[S_3L$ liegt.

- b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden m , auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt.

Die Kugel erreicht schließlich die x_1x_2 -Ebene und rollt auf dieser weiter.



- c) Berechnen Sie den Schnittpunkt T der Geraden m (siehe Aufgabe 2b)) mit der zur x_1x_2 -Ebene parallelen Ebene, in der sich nun der Kugelmittelpunkt bewegt.

[zur Kontrolle: $T(4,4 | 13,2 | 7)$]
Schnitt der Ebene $x_3 = 7$ mit m

- d) Bestimmen Sie den letzten Berührungspunkt B , den die Kugel bei dem beschriebenen Abrollvorgang mit der Ebene E hatte, und markieren Sie in der Zeichnung von Aufgabe 1c) mit Farbe die Spur, welche die Kugel auf der Ebene E hinterließ.

