Trapez-Aufgabe   Abiturprüfung GK Bayern 2001

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die vier Punkte $A(-2\,|\,8\,|\,0)$, $B(0\,|\,0\,|\,-2)$, $C(1\,|\,2\,|\,0)$ und $D(0\,|\,6\,|\,1)$ gegeben.

1. a) Weisen Sie nach, dass die vier Punkte A, B, C und D ein Trapez mit zwei gleich langen gegenüberliegenden Seiten, aber kein Parallelogramm (also ein gleichschenkliges Trapez) bilden.

   b) Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M. [zur Kontrolle: $M(0\,|\,4\,|\,0)$]

   c) Berechnen Sie den Abstand d des Punktes D von der Geraden AB. [zur Kontrolle: $d = 1{,}5\sqrt{2}$]

   d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des gleichschenkligen Trapezes $ABCD$.

   e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Viereck $ABCD$ liegt, in Normalenform.
   [mögliches Ergebnis: $E\colon\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4 = 0$]

Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ bildet zusammen mit einem weiteren Punkt S eine Pyramide $ABCDS$. Der Punkt S liegt auf der Lotgeraden zur Ebene E durch den Punkt M und hat von der Ebene E den Abstand 15; der Koordinatenursprung und S liegen auf verschiedenen Seiten von E.

2. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von S. [zur Kontrolle: $S(10\,|\,9\,|\,-10)$]

   b) Zeigen Sie, dass der Punkt $T(6\,|\,7\,|\,-6)$ die Strecke $[MS]$ innen im Verhältnis 3:2 teilt.

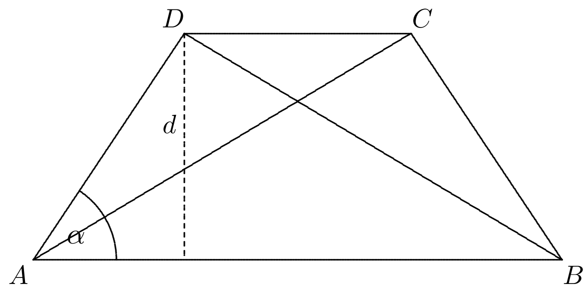
   c) Bestimmen Sie eine Gleichung der zu E parallelen Ebene F, die durch den Punkt T verläuft, in Normalenform.

   d) Beim Schnitt der Ebene F mit der Pyramide $ABCDS$ entstehen zwei Teilkörper: ein Pyramidenstumpf und die zugehörige Ergänzungspyramide. Zeigen Sie, dass das Volumen der Ergänzungspyramide weniger als 7% des Volumens der Pyramide $ABCDS$ beträgt.

Trapez-Aufgabe   Abiturprüfung GK Bayern 2001   Lösungen

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die vier Punkte $A(-2\,|\,8\,|\,0)$, $B(0\,|\,0\,|\,-2)$, $C(1\,|\,2\,|\,0)$ und $D(0\,|\,6\,|\,1)$ gegeben.

1. a) Weisen Sie nach, dass die vier Punkte A, B, C und D ein Trapez mit zwei gleich langen gegenüberliegenden Seiten, aber kein Parallelogramm (also ein gleichschenkliges Trapez) bilden.



$\overrightarrow{AB} = 2\cdot\overrightarrow{DC}$

$|\,\overrightarrow{AD}\,| = |\,\overrightarrow{BC}\,| = 3$

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M. [zur Kontrolle: $M(0\,|\,4\,|\,0)$]

c) Berechnen Sie den Abstand d des Punktes D von der Geraden AB. [zur Kontrolle: $d = 1{,}5\sqrt{2}$]

$\alpha = 45^\circ$ mehrere Lösungswege

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des gleichschenkligen Trapezes $ABCD$. $A_{Trapez} = 13{,}5\ FE$ (elementar)

e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Viereck $ABCD$ liegt, in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: $E:\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4 = 0$]

Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ bildet zusammen mit einem weiteren Punkt S eine Pyramide $ABCDS$. Der Punkt S liegt auf der Lotgeraden zur Ebene E durch den Punkt M und hat von der Ebene E den Abstand 15; der Koordinatenursprung und S liegen auf verschiedenen Seiten von E.

2. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von S. [zur Kontrolle: $S(10\,|\,9\,|\,-10)$]

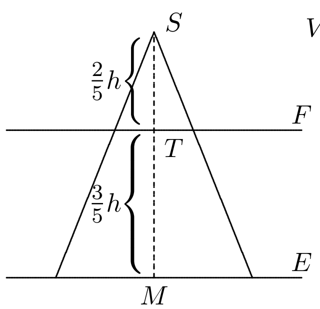
$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + 15\cdot\vec{n}_E^{\circ}$

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $T(6\,|\,7\,|\,-6)$ die Strecke $[MS]$ innen im Verhältnis 3:2 teilt.

$\overrightarrow{MT} = \lambda\cdot\overrightarrow{TS} \implies \lambda = \frac{3}{2}$

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der zu E parallelen Ebene F, die durch den Punkt T verläuft, in Normalenform. $F:\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 31 = 0$

d) Beim Schnitt der Ebene F mit der Pyramide $ABCDS$ entstehen zwei Teilkörper: ein Pyramidenstumpf und die zugehörige Ergänzungspyramide. Zeigen Sie, dass das Volumen der Ergänzungspyramide weniger als 7 % des Volumens der Pyramide $ABCDS$ beträgt.



$V_{Ergänzungspyramide} = \left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot V_{ABCDS} = 6{,}4\,\%\cdot V_{ABCDS}$

(zentrische Streckung)

Abroll-Aufgabe   Abiturprüfung GK Bayern 2001

Gegeben ist in einem kartesischen Koordinatensystem die Ebene $E\colon\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 60$.
Ihr Schnittpunkt mit der x_1-Achse heißt S_1, mit der x_2-Achse S_2 und mit der x_3-Achse S_3.

1. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von S_1, S_2 und S_3 und geben Sie eine Gleichung der Geraden S_1S_2 an.
   [zur Kontrolle: $S_3(0\,|\,0\,|\,20)$]

   b) Vom Punkt S_3 wird ein Lot auf die Gerade S_1S_2 gefällt. Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes L.
   [zur Kontrolle: $L(3\,|\,9\,|\,0)$]

   c) Legen Sie ein Koordinatensystem an und tragen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ und die Gerade S_3L ein.

   d) Begründen Sie, dass L der Punkt der Geraden S_1S_2 ist, der den kürzesten Abstand zum Ursprung O hat, und berechnen Sie diesen Abstand. Ermitteln Sie die Winkel im Dreieck OLS_3 auf $0{,}1°$ genau.

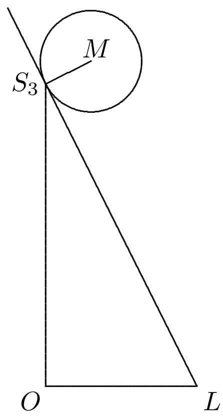
2. Eine Kugel mit Radius 7 berührt die Ebene E im Punkt S_3.

   a) Bestimmen Sie die Koordinaten der möglichen Kugelmittelpunkte.

   Im Folgenden wird der Fall betrachtet, dass die Kugel zunächst den Mittelpunkt $M(2\,|\,6\,|\,23)$ hat (siehe Skizze) und dann auf der Ebene E so rollt, dass ihre Spur auf der Halbgeraden $[S_3L$ liegt.

   b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden m, auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt.

   Die Kugel erreicht schließlich die x_1x_2-Ebene und rollt auf dieser weiter.



Skizze nicht maßstabsgetreu

   c) Berechnen Sie den Schnittpunkt T der Geraden m (siehe Aufgabe 2b)) mit der zur x_1x_2-Ebene parallelen Ebene, in der sich nun der Kugelmittelpunkt bewegt.
   [zur Kontrolle: $T(4{,}4\,|\,13{,}2\,|\,7)$]

   d) Bestimmen Sie den letzten Berührpunkt B, den die Kugel bei dem beschriebenen Abrollvorgang mit der Ebene E hatte, und markieren Sie in der Zeichnung von Aufgabe 1c) mit Farbe die Spur, welche die Kugel auf der Ebene E hinterließ.

Abroll-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2001 Lösungen

Gegeben ist in einem kartesischen Koordinatensystem die Ebene $E\colon\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 60$.
Ihr Schnittpunkt mit der x_1-Achse heißt S_1, mit der x_2-Achse S_2 und mit der x_3-Achse S_3.

1. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von S_1, S_2 und S_3 und geben Sie eine Gleichung der Geraden S_1S_2 an. [zur Kontrolle: $S_3(0\,|\,0\,|\,20)$] siehe Schrägbild

   b) Vom Punkt S_3 wird ein Lot auf die Gerade S_1S_2 gefällt. Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes L. [zur Kontrolle: $L(3\,|\,9\,|\,0)$]

   c) Legen Sie ein Koordinatensystem an und tragen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ und die Gerade S_3L ein.

   d) Begründen Sie, dass L der Punkt der Geraden S_1S_2 ist, der den kürzesten Abstand zum Ursprung O hat, und berechnen Sie diesen Abstand. Ermitteln Sie die Winkel im Dreieck OLS_3 auf 0,1° genau.

   $\overrightarrow{OL} \perp \overrightarrow{S_1S_2}$, $|\overrightarrow{OL}| = 3\sqrt{10}$, $\measuredangle S_3LO = 64{,}1°$, $\measuredangle OS_3L = 25{,}4°$

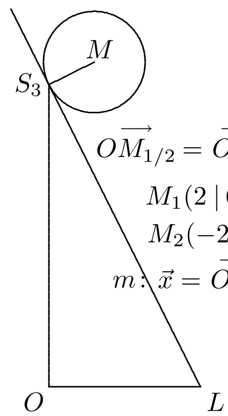
2. Eine Kugel mit Radius 7 berührt die Ebene E im Punkt S_3.

   a) Bestimmen Sie die Koordinaten der möglichen Kugelmittelpunkte.

   Im Folgenden wird der Fall betrachtet, dass die Kugel zunächst den Mittelpunkt $M(2\,|\,6\,|\,23)$ hat (siehe Skizze) und dann auf der Ebene E so rollt, dass ihre Spur auf der Halbgeraden $[S_3L$ liegt.

   b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden m, auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt.

   Die Kugel erreicht schließlich die x_1x_2-Ebene und rollt auf dieser weiter.



$\overrightarrow{OM}_{1/2} = \overrightarrow{OS_3} \pm 7 \cdot \vec{n}_E^{\circ}$

$M_1(2\,|\,6\,|\,23)$

$M_2(-2\,|\,-6\,|\,17)$

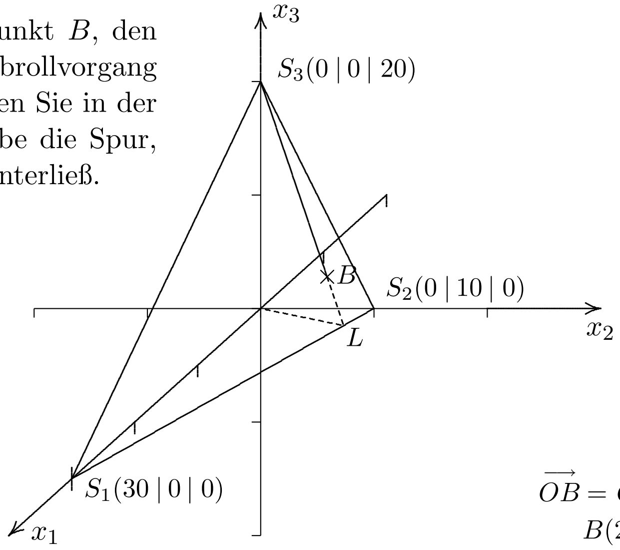
$m\colon \vec{x} = \overrightarrow{OM} + \lambda\,\overrightarrow{S_3L}$

Skizze nicht maßstabsgetreu

   c) Berechnen Sie den Schnittpunkt T der Geraden m (siehe Aufgabe 2b)) mit der zur x_1x_2-Ebene parallelen Ebene, in der sich nun der Kugelmittelpunkt bewegt. [zur Kontrolle: $T(4{,}4\,|\,13{,}2\,|\,7)$]

   Schnitt der Ebene $x_3 = 7$ mit m

   d) Bestimmen Sie den letzten Berührpunkt B, den die Kugel bei dem beschriebenen Abrollvorgang mit der Ebene E hatte, und markieren Sie in der Zeichnung von Aufgabe 1c) mit Farbe die Spur, welche die Kugel auf der Ebene E hinterließ.



$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OT} - 7 \cdot \vec{n}_E^{\circ}$

$B(2{,}4\,|\,7{,}2\,|\,4)$