Doppelpyramide-Aufgabe   Abiturprüfung GK Bayern 2002

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1 \mid 3 \mid -2)$, $B(-1 \mid -3 \mid 4)$ und $C(7 \mid -5 \mid 2)$ gegeben.

1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.

   b) $M(3 \mid -1 \mid 0)$ ist der Mittelpunkt der Strecke [AC]. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D, für den M die Strecke $[BD]$ innen im Verhältnis 2:1 teilt. [zur Kontrolle: $D(5 \mid 0 \mid -2)$]

   c) Besitzt das Viereck $ABCD$ einen Umkreis? Begründen Sie Ihre Antwort.

   d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$.

2. a) Geben Sie in Normalenform eine Gleichung der Ebene E an, in der das Dreieck ABC liegt. [mögliches Ergebnis: $E\colon\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1 = 0$]

   b) Auf der Lotgeraden zur Ebene E durch M liegen zwei Punkte S und S', die mit den Punkten A und C ein Quadrat bilden. Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Punkte S und S'; benennen Sie dabei den mit S, der die größere x_1-Koordinate besitzt. [zur Kontrolle: $S(5 \mid 3 \mid 4)$]

   c) Das Quadrat $ASCS'$ bildet die Grundfläche einer Pyramide mit Spitze B. Berechnen Sie den Winkel, den die Kanten $[AB]$ und $[SB]$ einschließen, und begründen Sie damit, dass alle Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind.

   d) Es soll ein Kantenmodell der Doppelpyramide $ASCS'BD$ aus Draht hergestellt werden. Beim Verlöten der Drahtstücke gehen 20% der eingesetzten Drahtlänge verloren. Die Längeneinheit sei $1\,cm$. Welche Länge Draht, gerundet auf mm, wird benötigt?

   e) Berechnen Sie das Volumen der Doppelpyramide $ASCS'BD$.

Doppelpyramide-Aufgabe   Abiturprüfung GK Bayern 2002   Lösungen

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1\,|\,3\,|\,-2)$, $B(-1\,|\,-3\,|\,4)$ und $C(7\,|\,-5\,|\,2)$ gegeben.

1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{72}, \quad |\overrightarrow{AC}| = 12$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

b) $M(3\,|\,-1\,|\,0)$ ist der Mittelpunkt der Strecke [AC]. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D, für den M die Strecke $[BD]$ innen im Verhältnis 2:1 teilt. [zur Kontrolle: $D(5\,|\,0\,|\,-2)$]

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB})$$

c) Besitzt das Viereck $ABCD$ einen Umkreis? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{CM}| = 6, \quad |\overrightarrow{DM}| = 3$$

D liegt nicht auf dem Umkreis vom Dreieck ABC.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$. $A = 54$ *(FE)*

2. a) Geben Sie in Normalenform eine Gleichung der Ebene E an, in der das Dreieck ABC liegt.

[mögliches Ergebnis: $E:\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1 = 0$]

b) Auf der Lotgeraden zur Ebene E durch M liegen zwei Punkte S und S', die mit den Punkten A und C ein Quadrat bilden. Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Punkte S und S'; benennen Sie dabei den mit S, der die größere x_1-Koordinate besitzt. [zur Kontrolle: $S(5\,|\,3\,|\,4)$]

$$\overrightarrow{OS^{(\prime)}} = \overrightarrow{OM} \pm 6 \cdot \vec{n}^{\circ}$$
$$S'(1\,|\,-5\,|\,-4)$$

c) Das Quadrat $ASCS'$ bildet die Grundfläche einer Pyramide mit Spitze B. Berechnen Sie den Winkel, den die Kanten $[AB]$ und $[SB]$ einschließen, und begründen Sie damit, dass alle Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind. $\alpha = 60^\circ$

d) Es soll ein Kantenmodell der Doppelpyramide $ASCS'BD$ aus Draht hergestellt werden. Beim Verlöten der Drahtstücke gehen 20% der eingesetzten Drahtlänge verloren. Die Längeneinheit sei $1\,cm$. Welche Länge Draht, gerundet auf mm, wird benötigt?

$$L_{\text{Doppelpyramide}} = 94{,}71\,cm$$

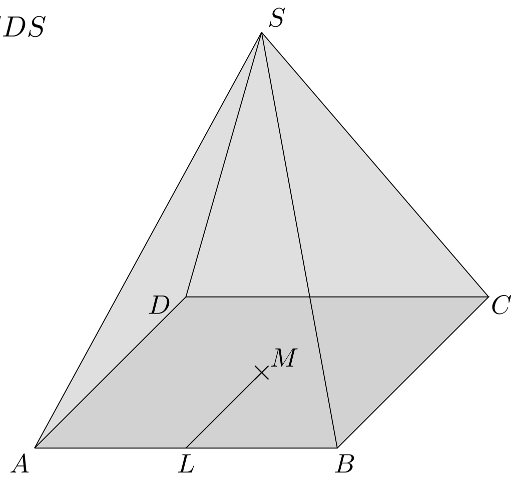
benötigte Drahtlänge $1184\,mm$

e) Berechnen Sie das Volumen der Doppelpyramide $ASCS'BD$. $V = 216$ *(VE)*

Pyramide-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2002

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt $M(-2\,|\,6\,|\,1)$ sowie die Ebenen $E\colon\ x_3 - 1 = 0$ und $H\colon\ 8x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 5 = 0$ gegeben.

1. In Aufgabe 1 sollen die Eckpunkte einer Pyramide $ABCDS$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ (siehe Skizze) schrittweise bestimmt werden. Das Quadrat $ABCD$ mit Diagonalenschnittpunkt M liegt in der Ebene E, die Seitenfläche ABS in der Ebene H.



   a) Die Ebenen E und H schneiden sich in der Geraden g, auf der A und B liegen. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g.
   [mögliches Ergebnis: $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$]

   b) Berechnen Sie den Fußpunkt L des Lotes von M auf die Gerade g.
   [zur Kontrolle: $L(2\,|\,4\,|\,1)$]

   c) Bestimmen Sie die Eckpunkte A und B des Quadrats $ABCD$. Derjenige der beiden Punkte mit der kleineren x_1-Koordinate wird mit A bezeichnet.
   [zur Kontrolle: $A(0\,|\,0\,|\,1)$]

   d) Bestimmen Sie jetzt die Eckpunkte C und D des Quadrats $ABCD$.
   [zur Kontrolle: $D(-8\,|\,4\,|\,1)$]

   e) Die Spitze S der Pyramide liegt in der Ebene H. Der Fußpunkt des Lotes von S auf die Grundfläche ist der Punkt M. Bestimmen Sie den Punkt S.
   [zur Kontrolle: $S(-2\,|\,6\,|\,9)$]

2. Der Punkt P ist Mittelpunkt der Pyramidenkante $[CS]$, der Punkt Q Mittelpunkt der Kante $[DS]$.

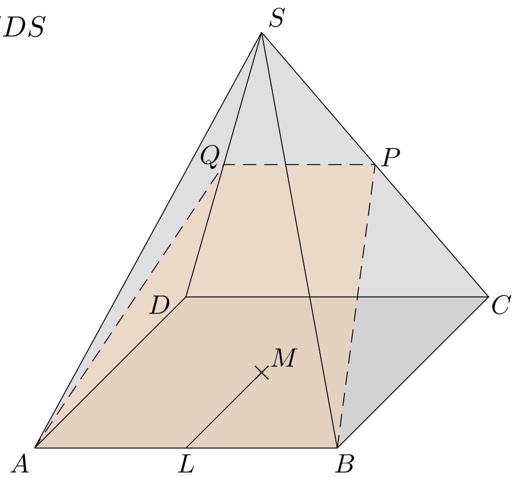
   a) Berechnen Sie die Innenwinkel des Trapezes $ABPQ$.

   b) Das Trapez $ABPQ$ zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper. Es wird der Teilkörper betrachtet, der die Spitze S enthält. Der Flächeninhalt des Trapezes $ABPQ$ soll als bekannt vorausgesetzt werden.Beschreiben Sie mit Worten, welche Schritte auszuführen sind, um das Volumen des betrachteten Teilkörpers zu berechnen. Der konkrete Wert des Volumens soll dabei nicht ermittelt werden.

Pyramide-Aufgabe   Abiturprüfung GK Bayern 2002   Lösungen

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt $M(-2\,|\,6\,|\,1)$ sowie die Ebenen $E\colon\ x_3 - 1 = 0$ und $H\colon\ 8x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 5 = 0$ gegeben.

1. In Aufgabe 1 sollen die Eckpunkte einer Pyramide $ABCDS$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ (siehe Skizze) schrittweise bestimmt werden. Das Quadrat $ABCD$ mit Diagonalenschnittpunkt M liegt in der Ebene E, die Seitenfläche ABS in der Ebene H.



a) Die Ebenen E und H schneiden sich in der Geraden g, auf der A und B liegen. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g.

[mögliches Ergebnis: $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$]

Stützvektor unmittelbar ersichtlich, Richtungsvektor als Vektorprodukt der Normalenvektoren

b) Berechnen Sie den Fußpunkt L des Lotes von M auf die Gerade g.

[zur Kontrolle: $L(2\,|\,4\,|\,1)$]

c) Bestimmen Sie die Eckpunkte A und B des Quadrats $ABCD$. Derjenige der beiden Punkte mit der kleineren x_1-Koordinate wird mit A bezeichnet.

[zur Kontrolle: $A(0\,|\,0\,|\,1)$]
$B(4\,|\,8\,|\,1)$

d) Bestimmen Sie jetzt die Eckpunkte C und D des Quadrats $ABCD$.

[zur Kontrolle: $D(-8\,|\,4\,|\,1)$]
$C(-4\,|\,12\,|\,1)$

e) Die Spitze S der Pyramide liegt in der Ebene H. Der Fußpunkt des Lotes von S auf die Grundfläche ist der Punkt M. Bestimmen Sie den Punkt S.

[zur Kontrolle: $S(-2\,|\,6\,|\,9)$]

2. Der Punkt P ist Mittelpunkt der Pyramidenkante $[CS]$, der Punkt Q Mittelpunkt der Kante $[DS]$.

a) Berechnen Sie die Innenwinkel des Trapezes $ABPQ$.

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OS}), \quad P(-3\,|\,9\,|\,5)$

$Q(-5\,|\,5\,|\,5), \quad \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ}) = 74{,}0°, \quad \angle(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QP}) = 106{,}0°$

b) Das Trapez $ABPQ$ zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper. Es wird der Teilkörper betrachtet, der die Spitze S enthält. Der Flächeninhalt des Trapezes $ABPQ$ soll als bekannt vorausgesetzt werden. Beschreiben Sie mit Worten, welche Schritte auszuführen sind, um das Volumen des betrachteten Teilkörpers zu berechnen. Der konkrete Wert des Volumens soll dabei nicht ermittelt werden.

Als Zwischenschritt ist der Abstand von S zur Ebene E_{ABPQ} zu berechnen (HNF).