Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Windenergie

Seit Beginn der 90er Jahre erlebte Deutschland einen Boom im Bereich der Nutzung der Windenergie zur Stromerzeugung. Durch den Bau neuer Anlagen wird jährlich ein Zuwachs der jeweils am Jahresende insgesamt installierten Leistung aller Windenergieanlagen erreicht.[1]

a) Im Jahr 1994 betrug der *Zuwachs* der Leistung der Windenergieanlagen noch 300 Megawatt pro Jahr (MW/Jahr), bis 2002 steigerte er sich jährlich durchschnittlich um ca. 34%.
Angesetzt wird eine Funktionsvorschrift $f(t)$ für den jährlichen Zuwachs der Leistung der Windenergieanlagen im t-ten Jahr nach 1994.
Begründen Sie, dass die Funktion f mit der Gleichung $f(t) = 300e^{0,293 \cdot t}$, t in Jahren ($t = 0$ entspricht Ende 1994) und $f(t)$ in MW pro Jahr zu den gegebenen Daten passt.
Erläutern Sie die zu Grunde liegenden Annahmen und die Grenzen der Modellierung.

Verwenden Sie für b) und c) die Modellierung aus a)

b) Skizzieren Sie den Graphen von f mit $f(t)$ im Bereich $0 \le t \le 14$.
Bestimmen Sie den Zuwachs für 2008.
Berechnen Sie die Zeit, in der sich der Zuwachs verdoppelt.
Erläutern Sie, was in diesem Zusammenhang der Wert von $2^4 \cdot 300$ angibt und berechnen Sie diesen Wert sowie den zugehörigen Zeitpunkt t.
Markieren Sie alle in diesem Aufgabenteil berechneten Werte in ihrem Graphen.

c) Gegeben ist die Funktion L mit $L(x) = \int_0^x f(t)dt$.
Geben Sie eine Stammfunktion von f an und berechnen Sie $L(5)$.
Zeichnen Sie $L(5)$ in den Graphen aus b) ein.
Es ist bekannt, dass bis Ende 1994 Windenergieanlagen mit einer Gesamtleistung von 650 MW errichtet wurden. Geben Sie einen Funktionsterm $G(x)$ an, der die Gesamtleistung der Windenergieanlagen in Deutschland zum Zeitpunkt x näherungsweise vorhersagen kann, wenn sich die Bedingungen nicht ändern. $x = 0$ soll dabei für Ende 1994 stehen.

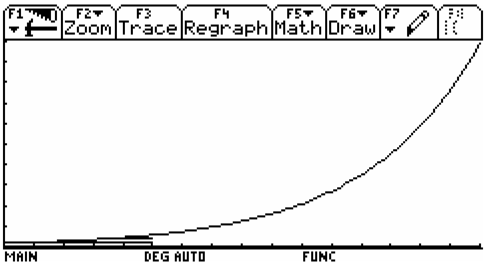
d) Da absehbar ist, dass der Boom im Bereich der Windenergie nicht unbegrenzt weitergeht, wurde für Prognosezwecke folgende Funktionsvorschrift $w(t)$ für die gesamte jeweils zum Zeitpunkt t vorhandene Leistung aller Windenergieanlagen aufgestellt (sie erfasst die bisherigen Gesamtleistungen jeweils am Jahresende hinreichend gut):
$w(t) = \dfrac{29000}{1 + 43,6e^{-0,421t}}$, t in Jahren ($t = 0$ entspricht Ende 1994), $w(t)$ in MW.
Ermitteln Sie das Jahr, in dem nach dieser Modellierung eine Gesamtleistung von 28000 MW erreicht wird.

e) Geben Sie $w'(t)$ an und bestimmen Sie $w'(14,5)$.
Interpretieren Sie $w'(14,5)$ in Bezug auf die Prognose.

f) Bestimmen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} w(t)$ und skizzieren Sie den Graphen von $w(t)$ für $t > 0$. Berücksichtigen Sie dabei, dass $w''(8,967) = 0$ und $w'''(8,967) \ne 0$.
Erläutern Sie, was der Graph in Bezug auf $\lim\limits_{t \to \infty} w'(t)$ aussagt.
Interpretieren Sie $\lim\limits_{t \to \infty} w(t)$, $\lim\limits_{t \to \infty} w'(t)$ und $P(8,967 / w(8,967))$ in Bezug auf die Prognosen.

[1] Die folgenden Prognosewerte beziehen sich nur auf Windenergieanlagen an Land, Wollte man auch Windkraftanlagen auf See betrachten, müssten sie gesondert betrachtet werden.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 1**

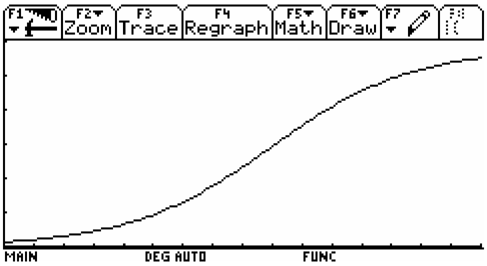
	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
1a	Unter der Annahme exponentiellen Wachstums ergibt sich mit dem gegebenen $f(0)=300$ und dem Wachstumsfaktor von $1{,}34$ $f(t)=300\cdot 1{,}34^t=300\cdot e^{\ln 1{,}34\cdot t}\approx 300\cdot e^{0{,}293\cdot t}$. Annahme: Exponentielles Wachstum, d.h. jedes Jahr gleich bleibende Zunahme um 34%, also gleich bleibender Wachstumsfaktor von $1{,}34$. Grenzen der Modellierung: Wachstum kann nicht unbegrenzt weitergehen (sowohl Bedarf als auch Möglichkeiten des Ausbaus sind irgendwann erschöpft), zusätzlich: gleich bleibende Wachstumsrate ist Idealisierung	2	2	
1b	 Das Jahr 2008 entspricht $t=14$, $f(14)\approx 18138{,}3$ Verdopplungszeit: $2=e^{0{,}293t_d}\Rightarrow t_d\approx 2{,}4$. $2^4\cdot 300=4800$ gibt den Wert nach 4 Verdopplungszeiten an, also bei $t\approx 4\cdot 2{,}4=9{,}6$. *Die zugehörigen Punkte müssen in der Skizze korrekt markiert sein.*	6	2	
1c	$\int_0^5 f(t)dt=\left[300\cdot\frac{1}{0{,}293}\cdot e^{0{,}293\cdot t}\right]_0^5\approx 3407{,}04\approx 3410$ in MW. *Der Wert darf auch im Graphmenü ermittelt werden.* Markierung von $L(5)$ als Schraffur der Fläche zwischen x-Achse und Graphen in der Skizze in b). $L(5)$ berechnet die nach 5 Jahren vorhandene Gesamtleistung, wenn zum Zeitpunkt 0 keine Leistung vorhanden war. $G(x)=650+\int_0^x f(t)dt=1024e^{0{,}293\cdot x}-374$ (bzw. $G(x)=650+\int_{0{,}5}^{x+0{,}5} f(t)dt=1024e^{0{,}293\cdot(x+0{,}5)}-536$)	2	1	1
1d	$28000=\frac{29000}{1+43{,}6\cdot e^{-0{,}421t}}\Rightarrow t=\frac{\ln\frac{29-28}{28\cdot 43{,}6}}{-0{,}421}\approx 16{,}9$, *der Wert darf auch im Graphmenü oder über den solver ermittelt werden*. Nach ca. 17 Jahren wird nach dieser Prognose der Wert von 28000 MW erreicht, d.h. gegen Ende 2011.	1	4	

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1e</td><td>

$w'(t)=\dfrac{532312,4e^{-0,421t}}{\left(1+43,6e^{-0,421t}\right)^2}$, $w'(14,5)\approx 987$

$w'(14,5)$ gibt an, mit welchem Leistungszuwachs pro Jahr Mitte 2009 zu rechnen ist.

</td><td>1</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>1f</td><td>



$\lim\limits_{t\to\infty} w(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{29000}{1+43,6e^{-0,421\cdot t}}=29000$

$t_P\approx 8,967$ erfüllt die hinreichende Bedingung für eine Wendestelle mit $w(8,967)\approx 14500$. *Der Wendepunkt P muss in der Skizze deutlich markiert sein.*

$g(t)=29000$ ist eine Asymptote von w für $t\to\infty$, somit gilt $\lim\limits_{t\to\infty} w'(t)=0$, die Zuwachsrate geht gegen Null.

Da P ein Wendepunkt ist, gibt $t_P\approx 9$ (Ende 2003) den Zeitpunkt an, ab dem die Zuwachsraten sinken.

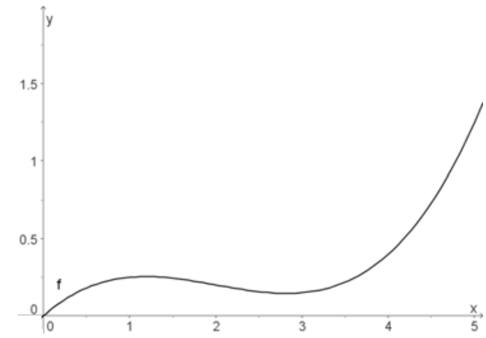
$\lim\limits_{t\to\infty} w(t)=29000$ gibt in MW den Grenzwert an, über den die Gesamtleistung der Windenergieanlagen nach dieser Prognose nicht steigen wird.

</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>13</td><td>17</td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Spielfigur

Ein Metall verarbeitender Betrieb will eine Spielfigur in Serienproduktion herstellen. Diese Spielfigur wird in einer Fräsmaschine gefertigt, indem ein zylinderförmiges Stück Metall unter einem messerartigen Fräswerkzeug rotiert. Das Werkzeug bewegt sich dabei von links nach rechts mal höher, mal tiefer entlang einer in die Maschine eingegebenen mathematischen Funktion. Diese Funktion gibt also für jeden Querschnitt der Spielfigur Ihren Radius an. Die entstehende waagerecht liegende Spielfigur wird später so aufgestellt, dass sich das linke Ende als Kopf der Figur oben und das rechte Ende als Fuß unten befindet.



a) Am Kopf der $5cm$ hohen Spielfigur ist der Radius mit $0cm$ am kleinsten, während er am Fußende mit $1{,}25cm$ am größten ist. Am Übergang vom Kopf zum Hals der Spielfigur bei $x = 2cm$ beträgt der Radius $0{,}2cm$. Die Funktion f, deren Graph das Messer in der Maschine durchläuft, soll eine ganzrationale Funktion dritten Grades sein. Um eine bestimmte Form des Kopfes zu erhalten, wird das Krümmungsverhalten am Übergang vom Kopf zum Hals durch $f''(2) = 0$ festgelegt.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von x.

Die Maschine ist in der Lage $5cm$ große Spielfiguren mit den Randfunktionen f_k mit der Gleichung

$$f_k(x) = \frac{1}{20}x^3 - kx^2 + \frac{1}{2}x$$

herzustellen. Dabei kann k aus dem Intervall $I = [0{,}27;\ 0{,}31]$ vorgewählt werden.

Die Aufgabenteile b) bis d) sollen stets für beliebige k aus dem Intervall I gelöst werden.

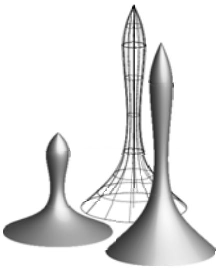
b) Skizzieren Sie die Kurvenschar f_k für $k = 0{,}27, k = 0{,}28;\ k = 0{,}29$ und $k = 0{,}31$ in ihrem wesentlichen Verlauf, indem Sie die von Ihrem Rechner dargestellten Grafen in das vorgegebene Koordinatensystem übertragen.
Erläutern Sie, welche Bedeutung k für die Form und das Volumen der Spielfigur hat.

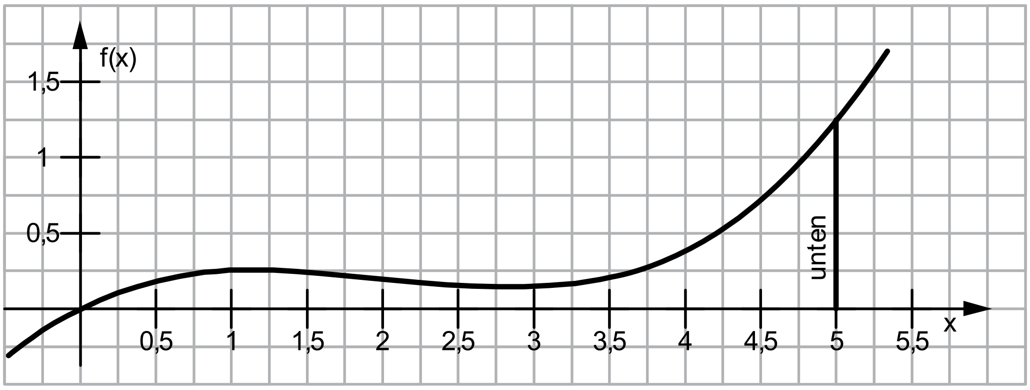
c) Berechnen Sie den Radius der Spielfigur sowohl an ihrem Fußpunkt als auch an der Stelle $x = 2$.
Bestimmen Sie an diesen Punkten jeweils den größten und kleinsten Wert des Radius, der aufgrund des Intervalls I für k möglich ist.

d) An der Stelle $x_W = \frac{20}{3}k$ befindet sich der Übergang vom Kopf der Spielfigur zu ihrem Hals. Hier beträgt der Radius $f_k(x_W) = -\frac{800k^3}{27} + \frac{10k}{3}$. Zeigen Sie, dass an dieser Stelle ein Wendepunkt vorliegt.

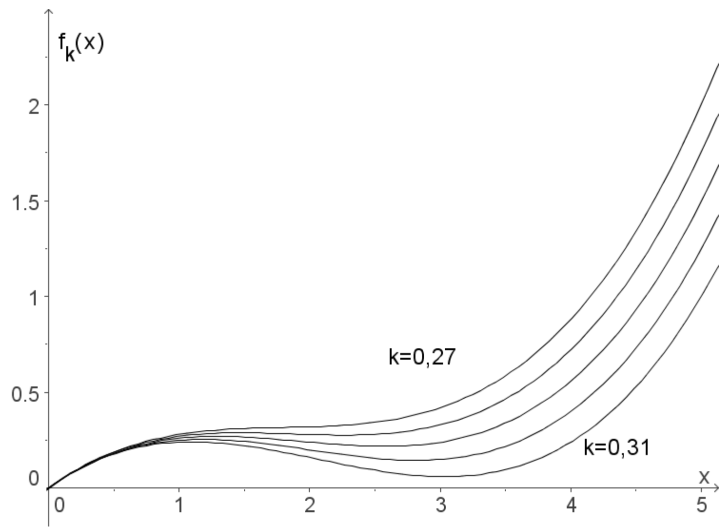
e) Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte (vgl. Teil d)) der Kurvenschar f_k auf dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = -\frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{2}x$ liegen.

f) Der Betrieb möchte den Abfall bei der Herstellung der Spielfiguren abschätzen.
Ermitteln Sie das Volumen der Spielfigur für $k = 0,30$.
Die Spielfiguren werden aus einem Metallzylinder mit einem Radius von $1,25cm$ und einer Länge von $5cm$ hergestellt. Bestimmen Sie den Abfall.
Vergleichen Sie die beiden Volumina miteinander.





Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 2**

	Lösungsskizze	Bewertung		
		I	II	III
2a	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $f'(x)=3ax^2+2bx+c$; $f''(x)=6ax+2b$ Drei vorgegebene Punkte liefern $f(0)=0$ und somit $d=0$, $f(5)=1,25=125a+25b+5c$ sowie $f(2)=0,2=8a+4b+2c$ Das Krümmungsverhalten ergibt $f''(2)=0=12a+2b$. Zu lösen bleibt das LGS $\begin{bmatrix} 1,25 & = & 125a+25b+5c \\ 0,2 & = & 8a+4b+2c \\ 0 & = & 12a+2b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & = & \frac{1}{20} \\ b & = & -\frac{3}{10} \\ c & = & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ Funktionsgleichung: $f(x)=\frac{1}{20}x^3-\frac{3}{10}x^2+\frac{1}{2}x$.	3	7	
2b	Koordinatensystem:  Der Radius am Hals nimmt mit sinkendem k zu, bis er schließlich beinahe den Radius des Kopfes erreicht. Für größeres k sinkt das Volumen.	5	2	
2c	$f_k(2)=\frac{7}{5}-4k$ und $f_k(5)=\frac{35}{4}-25k$, also beträgt der Radius an der Stelle $x=2$ zwischen $0,16cm$ und $0,32cm$ und am Fußende zwischen $1cm$ und $2cm$.	4		

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
2d	Für die Wendestelle muss gelten: $f_k''(x_W) = \frac{3}{10}x_W - 2k = 0$, woraus $x_W = \frac{20}{3}k$ folgt. Über die dritte Ableitung $f_k'''(x) = \frac{3}{10} \neq 0$ lässt sich nachweisen, dass an dieser Stelle ein Wendepunkt existiert. Der Radius berechnet sich zu $f_k(\frac{20}{3}k) = -\frac{800}{27}k^3 + \frac{10}{3}k$.	1	3	
2e	Die Wendepunkte $\mathrm{W}(\frac{20}{3}\mathrm{k} \mid -\frac{800\mathrm{k}^3}{27} + \frac{10\mathrm{k}}{3})$ liegen auf der durch $\mathrm{h(x)} = -\frac{1}{10}\mathrm{x}^3 + \frac{1}{2}\mathrm{x}$ beschriebenen Kurve, da $-\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{20}{3}k\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{20}{3}k\right) = -\frac{800}{27}k^3 + \frac{10}{3}k$.		3	
2f	$V_S = \pi \cdot \int_0^5 (\frac{1}{20}x^3 - \frac{3}{10}x^2 + \frac{1}{2}x)^2 \, dx \approx 2{,}57$ Das Volumen der Spielfigur ist $2{,}57\,cm^3$ groß. $V_Z - V_S = [\pi \cdot 1{,}5625 \cdot 5] - 2{,}57 = 24{,}54 - 2{,}57 = 21{,}97$ Das Volumen des Abfalls ist mit $21{,}97\,cm^3$ mehr als achtmal so groß wie das der Spielfigur.		2	3
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Aufgabe 3 - zum Themenbereich Lineare Algebra und Analytische Geometrie,
Vertiefung Lineare Algebra

Verteilung von Einkaufswagen

Ein Supermarkt verteilt seine insgesamt 400 Einkaufswagen auf drei Plätze: im Eingangsbereich E, auf dem Parkplatz P und bei den Glascontainern G. An diesen Plätzen können sie mitgenommen bzw. abgestellt werden. Ein Schüler soll dafür sorgen, dass an allen drei Plätzen ausreichend Einkaufswagen zur Verfügung stehen. Statt die Wagen hin und her zu schieben will der mathematisch interessierte Schüler eine Übergangsmatrix aufstellen. Er markiert morgens die Wagen an den drei Plätzen so, dass er abends erkennen kann, von welchem Platz jeder einzelne Wagen stammt.

Nach einigen Tagen stellte er folgende Tabelle für die Übergangsanteile am Ende eines Tages auf:

von / nach	Eingangsbereich (E)	Parkplatz (P)	Glascontainer (G)
Eingangsbereich (E)	$0,3$	$0,2$	$0,3$
Parkplatz (P)	$0,6$	$0,6$	$0,7$
Glascontainer (G)	$0,1$	$0,2$	$0,0$

a) Erstellen Sie zu der sich aus der Tabelle ergebenden Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,6 & 0,6 & 0,7 \\ 0,1 & 0,2 & 0,0 \end{pmatrix}$ das zugehörige Übergangsdiagramm.
Interpretieren Sie die Werte $0,3$, $0,7$ und $0,0$ aus der dritten Spalte in diesem Zusammenhang.

b) Wie viele Einkaufswagen wird der Schüler am 1., 2. und 3. Abend an den einzelnen Plätzen gezählt haben, wenn sich zu Beginn seiner Untersuchung 200 Einkaufswagen im Eingangsbereich E und je 100 an den anderen beiden Plätzen P und G befanden? Berechnen Sie dazu ausgehend von $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ die Verteilungen $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, runden Sie auf ganze Zahlen.

c) Berechnen Sie für die 400 Einkaufswagen die so genannte stationäre Verteilung $\vec{v}_s$ von M.

d) Die stationäre Verteilung $\vec{v}_s$ aus c) ist die Grenzverteilung von M, d. h. es gilt:
$\vec{v}_s = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{v}_n = \lim\limits_{n\to\infty}(M^n * \vec{v}) = \lim\limits_{n\to\infty} M^n * \vec{v}$ für jede Anfangsverteilung $\vec{v}$.
Bestimmen Sie die Grenzmatrix $G = \lim\limits_{n\to\infty} M^n$ experimentell. Geben Sie die Komponenten von G auf drei Nachkommastellen gerundet an und interpretieren Sie diese in Bezug auf die 400 Einkaufswagen.

Nach Beseitigung der Glascontainer wurde der Platz G eingespart. Am ersten Morgen danach wurden je 200 Einkaufswagen an die beiden Plätze E und P gestellt. Abends befanden sich 80 bei E und 320 bei P.
Der Schüler stellte daraufhin die Vermutung auf, dass $U = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,7 & 0,9 \end{pmatrix}$ die neue Übergangsmatrix darstellt,
da gilt: $U * \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 320 \end{pmatrix}$.

e) Bestätigen Sie, dass $\vec{u}_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix}$ eine geeignete stationäre Verteilung von U ist.

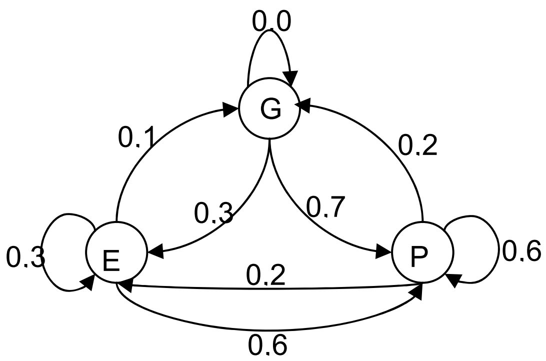
f) Wenn U korrekt gewählt wurde, so muss für die Verteilung $\vec{u}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ der Einkaufswagen am Abend nach n Tagen gelten: $x_n = 0,2 \cdot x_{n-1} + 40$.
Leiten Sie diese Berechnungsformel und eine für y_n her und bestätigen Sie durch Berechnung der jeweiligen Grenzwerte $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ und $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$, dass die stationäre Verteilung von e) wie erwartet die Grenzverteilung ist.

Gleich am ersten Abend verteilte der Schüler die Einkaufswagen gemäß dieser Grenzverteilung und war sehr erstaunt, dass er am folgenden Abend 95 Einkaufswagen bei E und 305 bei P vorfand.

g) Nun ist der Schüler überzeugt, dass er - sofern die täglichen Übergangswahrscheinlichkeiten tatsächlich immer gleich bleiben - die korrekte Übergangsmatrix S aufstellen kann. Er macht folgenden Ansatz:
$S * \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 320 \end{pmatrix}$ und $S * \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 \\ 305 \end{pmatrix}$. Erläutern Sie seinen Ansatz und berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten der Matrix S.
Geben Sie eine Verteilung an, auf die sich die Einkaufswagen vermutlich einpendeln werden.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 3**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3a</td><td>Übergangsdiagramm:



Von den bei den Glascontainern mitgenommenen Einkaufswagen stehen an jedem Abend 30% im Eingangsbereich, 70% beim Parkplatz und 0% wieder bei den Glascontainern.</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3b</td><td>Mit TR: $\vec{v}_1 = M * \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 110 \\ 250 \\ 40 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = M * \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 95 \\ 244 \\ 61 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = M * \vec{v}_2 \approx \begin{pmatrix} 96 \\ 246 \\ 58 \end{pmatrix}$.</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3c</td><td>Die Gleichung $M * \vec{v}_s = \vec{v}_s$ für 400 Einkaufswagen führt z.B. auf die erweiterte

Matrix $\left(\begin{array}{ccc|c} -0,7 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,6 & -0,4 & 0,7 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 400 \end{array}\right)$ und über deren Zeilennormalform (z.B. mit dem

„rref“-Befehl) zu der auf ganze Zahlen gerundeten Lösung $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 95 \\ 246 \\ 59 \end{pmatrix}$.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>3d</td><td>Experimentelle Bestimmung:

$M^{10} = M^{15} = \begin{pmatrix} 0,239 & 0,239 & 0,239 \\ 0,615 & 0,615 & 0,615 \\ 0,147 & 0,147 & 0,147 \end{pmatrix}$ und

$\begin{pmatrix} 0,239 & 0,239 & 0,239 \\ 0,615 & 0,615 & 0,615 \\ 0,147 & 0,147 & 0,147 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 95 \\ 246 \\ 59 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 95 \\ 246 \\ 59 \end{pmatrix}$.

Aus der Matrix-Vektormultiplikation folgt: $0,239 \cdot 400 \approx 95$, $0,615 \cdot 400 \approx 246$ und $0,147 \cdot 400 \approx 59$. Da in jeder Zeile dreimal der gleiche Wert steht, ist das der Anteil von 400 Einkaufswagen, der langfristig an dem zugehörigen Platz abgestellt wird.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>3e</td><td>Es reicht aus zu zeigen, dass $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,7 & 0,9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix}$ gilt und

$50 + 350 = 400$ ist.</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
3f	Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_n + y_n = 400$, daher folgt 1. $x_n = 0,3x_{n-1} + 0,1y_{n-1} = 0,3x_{n-1} + 0,1 \cdot (400 - x_{n-1}) = 0,2x_{n-1} + 40$ und 2. $y_n = 0,7x_{n-1} + 0,9y_{n-1} = 0,7 \cdot (400 - y_{n-1}) + 0,9y_{n-1} = 0,2y_{n-1} + 280$ für $n \geq 1$. ● Entweder Lösungsansatz über Iterationsfolgen: In beiden Fällen handelt es sich um eine Iterationsfolge an einer linearen Funktion mit der positiven Steigung $0,2 < 1$, daher konvergieren beide Folgen gegen den Fixpunkt der jeweiligen Iterationsfunktion, also gegen $x^* = 50$ bzw. $y^* = 350$. ● oder Lösungsansatz über geometrische Reihen: $x_n = 0,2x_{n-1} + 40 = 0,2(0,2x_{n-2} + 40) + 40 = ...$ $= 0,2^n \cdot x_0 + 40 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 0,2^k = 0,2^n \cdot x_0 + 40 \cdot \frac{1 - 0,2^n}{0,8}$, daher gilt: $\lim_{n\to\infty} x_n = 50$. Da $y_n = 400 - x_n$, folgt $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(400 - x_n) = 400 - \lim_{n\to\infty} x_n = 350$, oder analog zu x_n $y_n = 0,2y_{n-1} + 280 = ... = 0,2^n \cdot y_0 + 280 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 0,2^k = 0,2^n \cdot x_0 + 280 \cdot \frac{1 - 0,2^n}{0,8}$, daher gilt $\lim_{n\to\infty} y_n = 350$. Also ergibt sich $\lim_{n\to\infty} \vec{u}_n = \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix} = \vec{u}_s$.	1	6	
3g	Der Ansatz ergibt sich aus den beiden aufeinander folgenden Verteilungen aus e) und f). Mit $S = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$ ergibt sich $S * \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200p + 200 - 200q \\ 200 - 200p + 200q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 320 \end{pmatrix}$ und $S * \begin{pmatrix} 50 \\ 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50p + 350 - 350q \\ 50 - 50p + 350q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 \\ 305 \end{pmatrix}$, zusammen folgt: $\begin{bmatrix} 200p - 200q = -120 \\ 50p - 350q = -255 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p - q = -0,6 \\ p - 7q = -5,1 \end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} p - q = -0,6 \\ -6q = -5,1 + 0,6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p = 0,15 \\ q = 0,75 \end{bmatrix}$, also $S = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,25 \\ 0,85 & 0,75 \end{pmatrix}$. Da z.B. $S^{20} * \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 90,9 \\ 309,1 \end{pmatrix}$, werden sich die 400 Einkaufswagen so verteilen, dass langfristig 91 bei E und 309 bei P stehen werden.	1	1	3
	Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**

Aufgabe 4 - zum Themenbereich Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Vertiefung Analytische Geometrie

Kunstraub

Die Abbildung (siehe nächste Seite) zeigt den Entwurf einer Kulisse für einen Spielfilm. Es ist eine Ausstellungshalle mit einem Kunstobjekt dargestellt. Im Spielfilm soll das Kunstobjekt $K(1|7{,}5|0)$ von einem Dieb entwendet werden. Der Kunstgegenstand ist durch eine Barriere von Laserstrahlen geschützt. Der Dieb startet vom Ausgang $A(21|3|0)$. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

Die Geradengleichungen

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \text{ und } g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}, \; r, s \in \mathbb{R}$$

beschreiben den Verlauf zweier sich kreuzender Laserstrahlen.

a) Markieren Sie die beiden Laserstrahlen in der Zeichnung, deren Verlauf durch die Geraden g_1 und g_2 beschrieben wird.
Zeigen Sie, dass diese beiden Laserstrahlen entlang windschiefer Geraden verlaufen.

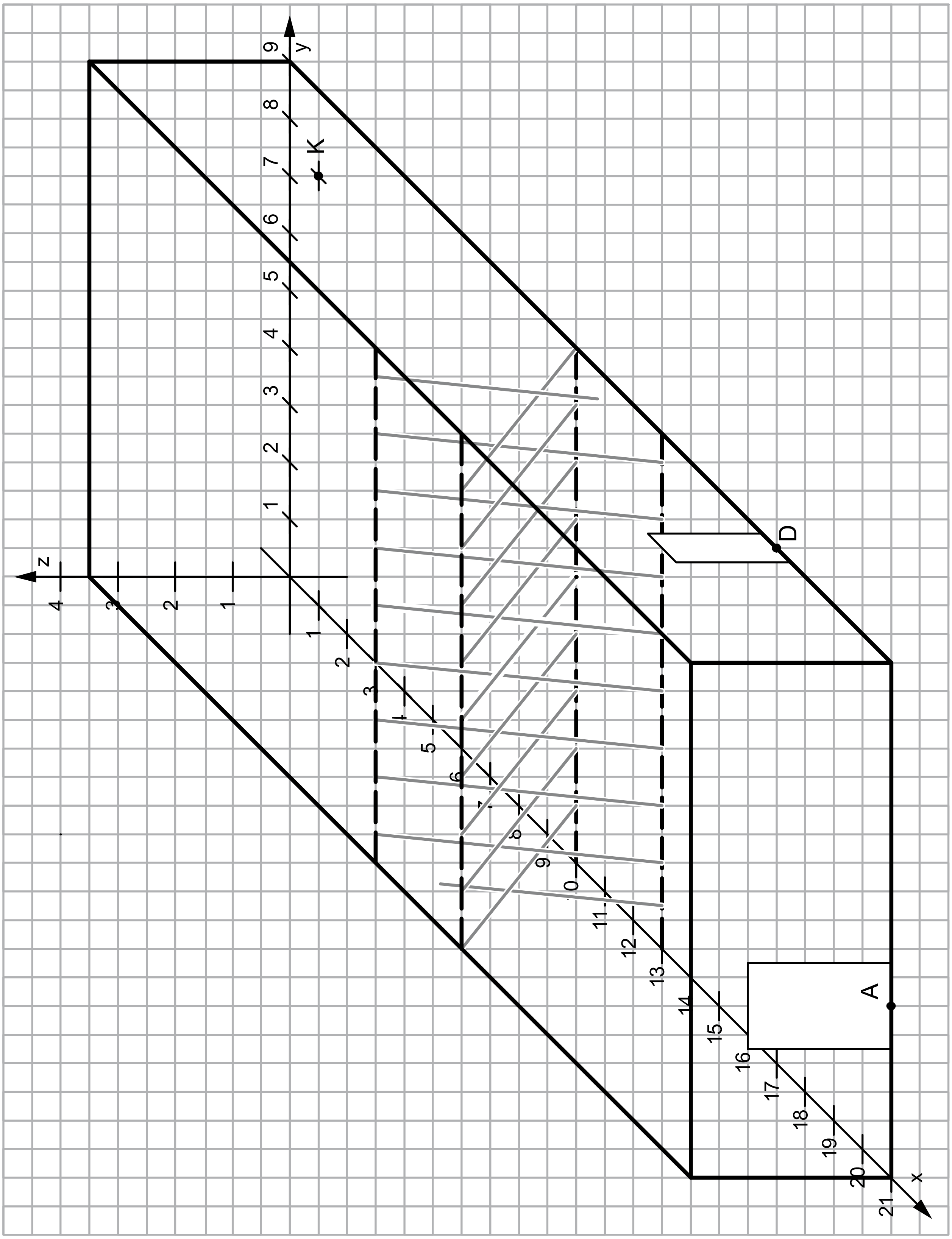
b) In dem Spielfilm prüft der Dieb, ob er sich zwischen den Strahlen hindurchzwängen kann.
Bestimmen Sie zwei parallele Ebenen E_1 und E_2 in Normalenform, wobei die Ebene E_1 die Gerade g_1 und die Ebene E_2 die Gerade g_2 enthalten soll.
Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.
Ermitteln Sie den Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2 mit der xy-Ebene.
(Falls Sie für E_1 und E_2 keine Gleichung angeben konnten, verwenden Sie zur Bestimmung des Winkels: $E: 14y + 4z = 77$.)

c) Der Dieb interessiert sich für die Stelle, an der die Laserstrahlen den geringsten Abstand haben.
F bezeichne die Ebene , die g_1 enthält und die senkrecht auf den parallelen Ebenen E_1 und E_2 steht.
Erläutern Sie ohne Rechnung, wie mit Hilfe der Ebene F die Punkte minimalen Abstands P_1 auf der Geraden g_1 und P_2 auf der Geraden g_2 bestimmt werden können.

d) In dem Spielfilm wird der Kunstdieb die Laserbarriere überwinden und bei der Berührung des Kunstgegenstandes K zum Zeitpunkt $t = 0$ die akustische Alarmanlage auslösen (Zeit t in Sekunden). Nach dem ersten Schreck befindet sich der Dieb zum Zeitpunkt $t = 2$ im Punkt K und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit ohne Beachtung der Laserstrahlen auf den Ausgang A zu. Er erreicht den Ausgang zum Zeitpunkt $t = 4{,}5$. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit der Dieb läuft, d.h. welchen Weg er pro Sekunde zurücklegt.

Der Wachmann war bei Auslösung des Alarms im Nachbarraum, läuft zum Zeitpunkt $t = 3$ durch den Durchgang $D(17|9|0)$ und anschließend mit konstanter Geschwindigkeit von 4 Metern pro Sekunde ebenfalls direkt auf den Ausgang A zu.
Entscheiden Sie, ob der Dieb entkommen wird.
Begründen Sie ihre Entscheidung mit einer geeigneten Rechnung.

Material zur Aufgabe Kunstraub



Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 4**

	Lösungsskizze	Bewertung		
		I	II	III
4a	Einzeichnen der Laserstrahlen. Nachweis der linearen Unabhängigkeit der Richtungsvektoren. Daher sind die Geraden nicht parallel. Der Ansatz $\begin{pmatrix}10\\5\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\3{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\5{,}5\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\\3{,}5\end{pmatrix}$ führt mit den ersten beiden Zeilen zu $r=\frac{1}{4}$ und $s=\frac{3}{4}$, was zum Widerspruch mit der dritten Zeile führt. Es gibt also keinen Schnittpunkt und die Geraden sind windschief.	3	3	
4b	Ein Normalenvektor $\vec{n}$ der parallelen Ebenen steht senkrecht auf den Richtungsvektoren der beiden Geraden. Dies liefert: $3x_n-y_n+3{,}5z_n=0$ und $-3x_n-y_n+3{,}5z_n=0$. Ein möglicher Normalenvektor ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}$. Einsetzen der Koordinaten der Stützvektoren der Geraden in den Ansatz $7y+2z=d$ liefert die Ebenen $E_1: 7y+2z=35$ und $E_2: 7y+2z=\frac{77}{2}$ bzw. in Normalenform wie z.B. $E_1:\frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\frac{35}{\sqrt{53}}=0$ bzw. $E_2:\frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\frac{77}{2\sqrt{53}}=0$. Der Abstand berechnet sich z.B. mit E_2 und Punkt $P_1(10\|5\|0)$: $Abst(E_2;P_1)=\left\|\frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}10\\5\\0\end{pmatrix}-\frac{77}{2\sqrt{53}}\right\|=\frac{7}{2\sqrt{53}}\approx 0{,}48$, also ca. 48 cm. Schnittwinkelberechnung mittels Normalenvektoren der Ebenen: $\cos\alpha=\frac{\left\|\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{2}{\sqrt{53}}$, $\alpha\approx 74°$.	6	5	2
4c	Die Punkte minimalen Abstands heißen P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2. Den Punkt P_2 erhält man als Schnittpunkt von g_2 und F. Wenn man eine Geradengleichung mit P_2 als Stützpunkt und dem Normalenvektor der parallelen Ebenen E_1 und E_2 als Richtungsvektor aufstellt, ergibt sich der Punkt P_1 als Schnittpunkt zwischen dieser neuen Geraden und der Ebene E_1.		3	1

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
4d	Der Dieb legt die Strecke $\overline{KA}$ mit einer Länge von $\left\lvert\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OK}\right\rvert = \left\lVert\begin{pmatrix}20\\-4,5\\0\end{pmatrix}\right\rVert = 20,5$ Metern in $2,5$ Sekunden zurück und läuft damit mit einer Geschwindigkeit von $8,2$ Metern pro Sekunde. Der Wärter läuft die Strecke $\overline{DA}$ mit einer Länge von $\left\lvert\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}\right\rvert = \left\lVert\begin{pmatrix}4\\-6\\0\end{pmatrix}\right\rVert = 2\sqrt{13} \approx 7,21$ Metern mit einer Geschwindigkeit von 4 Metern pro Sekunde, benötigt dafür also $\frac{2\sqrt{13}m}{4\frac{m}{s}} \approx 1,8s$. Er ist zum Zeitpunkt $t \approx 4,8$ am Ausgang, ist also erst knapp nach dem Dieb am Ausgang. Da der Dieb schneller ist als der Wachmann, wird er entkommen.	4	6	
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Aufgabe 5 - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

HIV-Tests

Man geht davon aus, dass in der BRD von den ca. 40 Millionen sexuell aktiven Personen im Alter von 18 bis 60 Jahren etwa 50 000 mit HIV infiziert sind. Zum Nachweis der Krankheit dienen Untersuchungen von Blutproben. Ist das Ergebnis des Bluttests „HIV-infiziert", so spricht man von einem positiven Testergebnis.

In den letzten Jahren wurde ein Test entwickelt, der zwar nicht absolut sicher ist, für den aber immerhin folgendes gilt:

Wird eine Person getestet, die tatsächlich infiziert ist, so ist die Wahrscheinlichkeit $99{,}8\%$, dass der Test dann auch positiv reagiert.

Wird hingegen eine nicht infizierte Person getestet, so ist die Wahrscheinlichkeit 99%, dass der Test dann auch negativ reagiert.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine beliebig herausgegriffene Person nicht infiziert ist und positiv getestet wird.

b) Bestätigen Sie durch Rechnung das erstaunliche Ergebnis, dass eine als positiv getestete Person nur mit ca. 11% Wahrscheinlichkeit tatsächlich infiziert ist.

In so genannten Risikogruppen ist der Anteil der HIV-Infizierten deutlich höher als im Bundesdurchschnitt. Bestimmen Sie für eine Risikogruppe, bei der ein Anteil von 1% HIV-Infizierten vorliegt, die Wahrscheinlichkeit, dass eine als positiv getestete Person tatsächlich infiziert ist.
Erläutern Sie, inwiefern die Tatsache, dass ein Patient zu einer Risikogruppe gehört, für die Deutung eines positiven Ergebnisses eine Rolle spielt.

Es gibt seit einiger Zeit ein Medikament auf dem Markt, das bei 40% der Aids-Erkrankten nach spätestens einem Monat positiv wirkt.

c) Erläutern Sie, inwiefern man unter mathematischen Gesichtspunkten die Beobachtung von Patienten, die das Mittel einnehmen, als binomialverteilten Zufallsversuch auffassen kann und geben Sie die Zufallsvariable der Verteilung an.

Ein Pharma-Konzern hat ein neues Medikament entwickelt, von dem er behauptet, dass der Krankheitsverlauf bei mehr Personen nachweisbar positiv beeinflusst wird als bei dem bisher auf dem Markt befindlichen Medikament. In einer klinischen Studie an 100 an Aids erkrankten Personen, die das Medikament einnehmen, soll eine Wirksamkeit über 40% mit einem Signifikanztest nachgewiesen werden.

d) Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel, die angibt, wann die Hypothese H_0: „Das neue Medikament ist nicht besser als das alte." auf dem $5\%-$Signifikanzniveau verworfen werden kann.

e) Bei Medikamenten ist es üblich, auf dem Signifikanzniveau von 1% zu testen. Erläutern Sie die Bedeutung, die das Signifikanzniveau und der Fehler 1. Art (α-Fehler) in diesem Zusammenhang haben. Nennen Sie einen Grund, der für ein Signifikanzniveau von 5% sprechen kann.

f) Bei einem Signifikanztest auf dem $1\%-$Niveau ist der Verwerfungsbereich V für die Hypothese H_0 $V=\{52,...,100\}$. Bestimmen Sie zu diesem Verwerfungsbereich die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art (β-Fehler), wenn man annimmt, dass der Anteil der Patienten, bei denen das neue Mittel wirkt, tatsächlich 43% beträgt.
Erläutern Sie, warum diese Fehlerwahrscheinlichkeit so groß ist.
Leiten Sie aus den Eigenschaften der Binomialverteilung her, wie man diesen Fehler verringern kann.
Veranschaulichen Sie Ihre Argumentationen mit Skizzen geeigneter Verteilungen.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 5**

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>5a</td><td>$p(\text{ infiziert }) = 0,00125$; $p(\text{ nicht infiziert }) = 0,99875$
$p(\text{ nicht infizierte Person wird positiv getestet }) = 0,99875 \cdot 0,01 \approx 1\%$</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5b</td><td>Mit Baumdiagramm oder Vierfeldertafel und Bestimmung der entsprechenden Pfad bzw. Feldwahrscheinlichkeiten (oder Bayes-Formel) und den Angaben zu Testspezifität und Testsensitivität ergibt sich
$P(I\,|+) \approx 11{,}1\%$ („I“ steht für „infiziert“, „+“ für „positiv getestet“)
Mit $p(\text{ infiziert }) = 0,01$ erhält man $P(I\,|+) \approx 0,502 = 50,2\%$.
Mögliche Erläuterung:
Da der Anteil der Infizierten größer ist, ist auch der Anteil der richtig positiv Getesteten an den insgesamt positiv Getesteten größer bzw. der Anteil der falsch positiv Getesteten an den insgesamt positiv Getesteten kleiner.
Damit ist der diagnostische Wert eines positiven Ergebnisses höher, die Wahrscheinlichkeit einer Erkrankung (traurigerweise) größer</td><td>5</td><td>5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5c</td><td>Mögliche Erläuterung:
Stufen des Versuchs: 1.Patient, 2.Patient, ...
Es gibt zwei mögliche Ausfälle auf jeder Stufe: Es wird ein Patient betrachtet, bei dem das Mittel wirkt bzw. nicht wirkt.
Die Tatsache, dass auf einer Stufe ein Patient betrachtet wird, bei dem das Mittel wirkt / nicht wirkt, beeinflusst die Ausfälle auf den anderen Stufen nicht,
oder
die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person betrachtet wird, bei der das Mittel wirkt / nicht wirkt, ist bei jedem Patienten gleich.
X: Anzahl der unter Beobachtung stehenden Patienten, bei denen das Mittel wirkt.</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>5d</td><td>X: Anzahl der Personen, bei denen das Mittel positiv wirkt
X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p_0 = 0,4$, siehe c).
Rechtsseitiger Test, also ist das kleinste k gesucht, für das $P(X \geq k) \leq 5\%$ gilt.
Mit Taschenrechner oder Tabelle folgt $k = 49$, da
$P(X \geq 49) = 1 - P(X \leq 48) < 5\%$, aber $P(X \geq 48) = 1 - P(X \leq 47) > 5\%$
Entscheidungsregel: Wenn bei 49 oder mehr Patienten das Mittel Wirkung zeigt, nehmen wir an, dass H_0 „Das neue Medikament ist nicht besser als das alte“ widerlegt ist.</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5e</td><td>Der Fehler 1. Art besagt, dass man das neue Medikament nicht als besser ansieht, obwohl das tatsächlich häufiger wirkt als das alte. Das Signifikanzniveau legt fest, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieser Fehler höchstens eintreten darf. Für 5% spricht z.B.: Im Interesse der Kranken sollte man die Gefahr, dass ein etwas besseres Mittel nicht erkannt wird, verringern.
Interessen hinter den Argumentationen sollten deutlich werden.</td><td>1</td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>5f</td><td>

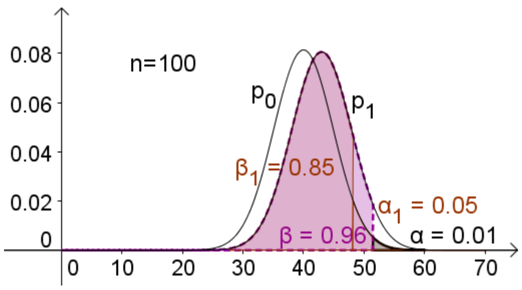
$P(\beta-\text{Fehler}) = P_{100;0,43}(X \le 51) = \sum_{k=0}^{51}\binom{100}{k}\cdot 0,43^k \cdot 0,57^{100-k} = 0,9564$ (mit Taschenrechner oder Tabelle).

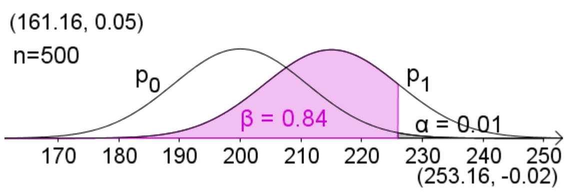
Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art beträgt bei den gegebenen Voraussetzungen ca. $95,6\%$.

Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers ist so groß, weil p_0 und p_1 so nahe beieinander liegen und sich die Verteilungen damit stark überlappen. Er könnte verringert werden, indem man das Signifikanzniveau oder n vergrößert.

In der Argumentation sowie in der Skizze sollte deutlich werden:
der Zusammenhang von α und β
und
dass bei binomialverteilten Zufallsgrößen sich die Versuchsausfälle bei wachsendem n relativ zu n gesehen zunehmend um den Erwartungswert konzentrieren. Damit werden bei kleinerem n die Bereiche, in denen sich die Histogramme der Verteilungen zu p_0 und z.B. p_1 überlappen, größer.

Genaue Zeichnungen wie in den folgenden Grafiken sind nicht nötig.





</td><td>1</td><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>14</td><td>16</td><td>3</td></tr>
</table>