Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Ausbreitung eines Internetvirus

Der *Code Red Worm* ist ein Internetvirus. Das Virus richtet nur auf zentralen Computern (Servern) einen Schaden an. Von einem Virus befallene Server sind nicht mehr einsatzfähig.
Der *Code Red Worm* hat am $13.07.2001$ innerhalb einiger Stunden von insgesamt $280\,000$ Servern viele befallen. Die Anzahl der befallenen Server wird vom CERT * über ein Meldesystem ausgezählt. Mit Hilfe der Daten werden mathematische Modelle entwickelt, um Vorhersagen über die Ausbreitung von ähnlichen Viren zu machen. Anhand des Internetvirus *Code Red Worm* sollen Sie mathematische Modelle überprüfen.

Die Tabelle gibt die Anzahl der am $13.07.2001$ befallenen Server zu einer bestimmten Zeit an, die in Stunden ab 10 Uhr gemessen wird:

Vergangene Zeit ab 10 Uhr in Stunden	0	2	4	6	8
Anzahl der infizierten Server	$20\,000$	$100\,000$	$205\,000$	$250\,000$	$277\,500$

a) Eine Modellierung der Ausbreitung des Virus wird mit Hilfe der Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(t) = 280\,000 - 260\,000 \cdot e^{-0{,}5805 \cdot t},\ t \geq 0$$

beschrieben. t ist die ab 10 Uhr vergangene Zeit in Stunden, $f(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t von Viren befallenen Server.

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f für $0 \leq t \leq 8$ mit Hilfe von fünf Punkten für $t = 0;2;4;6;8$ in ein Koordinatensystem. Runden Sie auf ganze Zahlen. Tragen Sie die in der Tabelle angegebenen fünf Punkte zum Vergleich ein.

Bestimmen Sie den Funktionswert, der die stärkste prozentuale Abweichung in Bezug auf die Messwerte aufweist. Berechnen und bewerten Sie diese Abweichung.

Geben Sie den Ableitungsterm $f'(t)$ an und begründen Sie, dass die Funktion f streng monoton wächst.

Bestimmen Sie das kleinste Intervall, in dem alle Funktionswerte für $t \geq 0$ liegen und interpretieren Sie die Bedeutung der Intervallgrenzen in Bezug auf den Wachstumsprozess.

(9 Punkte)

Ein weiterer Ansatz verwendet zur Modellierung die Funktion g mit der Funktionsgleichung

$$g(t) = \frac{5{,}6 \cdot 10^9}{20\,000 + 260\,000 \cdot e^{-0{,}9509 \cdot t}},\ t \geq 0\,.$$

t ist wiederum die ab 10 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t von Viren befallenen Server.

b) Bestimmen Sie den Anfangswert und $\lim\limits_{t \to \infty} g(t)$ mit Begründung.

Erläutern Sie die Bedeutung des Werts $\lim\limits_{t \to \infty} g(t)$ für den Sachzusammenhang.

* CERT: Computer Emergency Response Team, Notfalldienst für Computerstörungen aller Art

Skizzieren Sie den Graphen von g für $0 \le t \le 8$ mit den bisherigen Ergebnissen und vier weiteren Punkten für $t = 2; 4; 6; 8$ in das Koordinatensystem aus Teil a).

(6 Punkte)

c) Bestimmen Sie g' unter Angabe des Rechenwegs. (Zur Kontrolle: $g'(t) = \dfrac{1{,}38451 \cdot 10^{15} \cdot e^{-0{,}9509 \cdot t}}{(20000 + 260000 \cdot e^{-0{,}9509 \cdot t})^2}$)

Geben Sie $g'(0)$ und $\lim\limits_{t \to \infty} g'(t)$ an. Erläutern Sie die Bedeutung der Werte im Sachzusammenhang.

Berechnen Sie, wie viele Server zum Zeitpunkt $t = 2{,}6974$ infiziert sind und erläutern Sie die Bedeutung des zugehörigen Punktes für den Verlauf des Graphen von g. Runden Sie auf eine ganze Zahl.

Beschreiben Sie ein Verfahren, die Wendestellen von g zu bestimmen, ohne den Graphmodus des Taschenrechners zu verwenden.

(10 Punkte)

d) Berechnen Sie den Wert $\frac{1}{8}\int_0^8 g'(t)dt$ ohne Verwendung der Integraltaste des Taschenrechners und erläutern Sie die Bedeutung des Ergebnisses im Sachzusammenhang.

Begründen Sie, weshalb der Wert $\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} g'(k) \approx 33107$ und $\frac{1}{8}\int_0^8 g'(t)dt$ inhaltlich die gleiche Interpretation zulassen.

(4 Punkte)

e) Eine Funktion h mit der Funktionsgleichung

$$h(t) = \frac{a \cdot S}{a + (S-a) \cdot e^{-S \cdot k \cdot t}}, \; t \ge 0 \text{ und } 0 < a < S, \; k > 0$$

beschreibt einen so genannten logistischen Wachstumsprozess. Dabei sind $a = h(0)$ der Anfangswert und $S = \lim\limits_{t \to \infty} h(t)$ die Sättigungsgrenze.

Geben Sie für $a = 20000$, $S = 280000$ und $k = 3{,}188 \cdot 10^{-6}$ den Funktionsterm $h(t)$ in einer zu $g(t)$ vergleichbaren Form an.

Vergleichen Sie die Infektionsprozesse, die von der zuvor verwendeten Funktion g und von h beschrieben werden, indem Sie auch die Wendepunkte heranziehen.

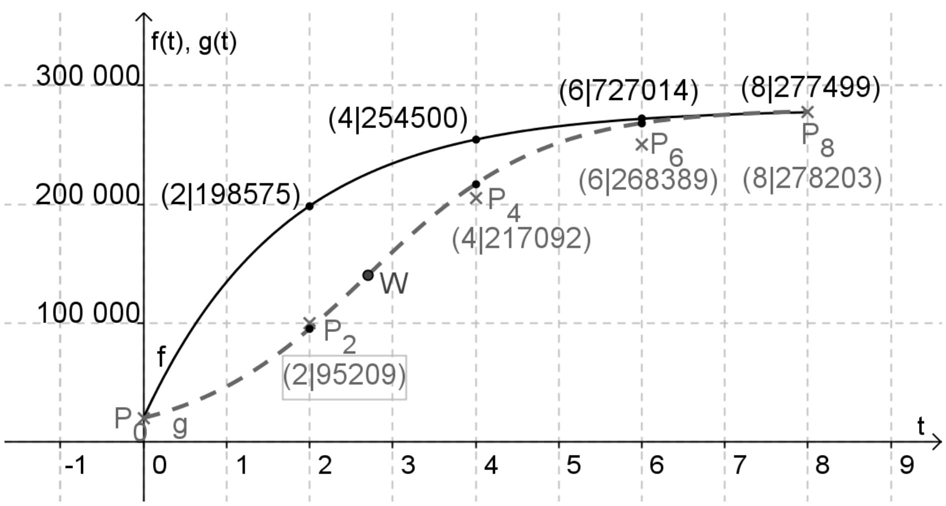
(4 Punkte)

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 1**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III

1a

Legende zur Abbildung: Skizze des Graphen zu f mit den geforderten Wertepaaren, die Punkte P_i entsprechen den Tabellenwerten zum Zeitpunkt $t = i$.
Hellgrau gestrichelt ist der Graph von g mit den vier Punkten für Aufgabenteil b), Punkt W wurde nicht verlangt.



Abweichungen Funktionswerte / Messwerte:
Der Skizze oder einem Vergleich der Werte entnimmt man, dass für $t = 2$ nicht nur die absolute sondern auch die relative Abweichung am größten ist:
$f(2) \approx 198575$

Relative Abweichung: $\dfrac{f(2) - 100000}{100000} \approx 0{,}9858 = 98{,}58\%$

Die relative Abweichung von 98,58% bedeutet, dass der Wert zur Zeit $t = 2$ fast doppelt so groß ist wie der Messwert. Der Wert weicht so stark ab, dass das Modell ungeeignet erscheint.

$f'(t) = 150930 \cdot e^{-0{,}5805 \cdot t}$. Für alle $t \geq 0$ ist $f'(t) > 0$, daher wächst f streng monoton.

Wegen der strengen Monotonie ist $f(0) = 20000$ der kleinste Funktionswert und $S = \lim\limits_{t \to \infty} f(t) = 280000$ der Wert, der gerade nicht mehr erreicht wird, die Funktionswerte liegen im Intervall $\left[20000; 280000\right[$. Zu Beginn sind 20000 Server infiziert, auf lange Sicht gesehen werden nicht mehr als 280000 Server infiziert.

		I	II	III
		5	3	1

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1b</td><td>Der Anfangswert ist: $g(0)=\frac{5,6\cdot10^9}{20000+260000}=20000$

$S=\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=\frac{5,6\cdot10^9}{20000}=280000$, da $\lim\limits_{t\to\infty}(260000\cdot e^{-0,9509\cdot t})=0$.

Der Grenzwert ist der "Sättigungswert", d.h. die Anzahl Server, die auf lange Sicht maximal infiziert werden könnten.

Skizze des Graphen von g im Koordinatensystem von a), siehe oben.</td><td>1</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>1c</td><td>Ableitung unter Angabe des
$u(t)=5,6\cdot10^9;\ u'(t)=0$
Rechenwegs $v(t)=20000+260000\cdot e^{-0,9509\cdot t};\ v'(t)=-0,9509\cdot260000\cdot e^{-0,9509\cdot t}$.
$g'(t)=\frac{5,6\cdot10^9\cdot260000\cdot0,9509\cdot e^{-0,9509\cdot t}}{(20000+260000\cdot e^{-0,9509\cdot t})^2}=\frac{1,3845104\cdot10^{15}\cdot e^{-0,9509\cdot t}}{(20000+260000\cdot e^{-0,9509\cdot t})^2}$

$g'(0)\approx17660$ momentan infizierte Server pro Stunde zum Zeitpunkt $t=0$.
$\lim\limits_{t\to\infty}g'(t)=0$, auf lange Sicht geht die Zunahme der Infizierungen gegen null.

$g(2,6974)\approx140001\approx140000$ liefert den Wendepunkt $W(2,6974\,|\,140000)$. Im Wendepunkt hat der Graph seine maximale Steigung. Bis zum Wendepunkt nimmt die Steigung zu, danach nimmt sie wieder ab. Es ist die Hälfte aller Server infiziert.

Wendestelle: $g''(t)=0$ liefert alle möglichen Wendestellen t_w. Ist $g'''(t_w)\neq0$ so handelt es sich tatsächlich um eine Wendestelle.</td><td>6</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1d</td><td>$\frac{1}{8}\int\limits_0^8 g'(t)dt=\frac{1}{8}(g(8)-g(0))\approx\frac{(278203-20000)}{8}=\frac{258203}{8}\approx32275$ In den acht Zeitintervallen von je einer Stunde haben sich insgesamt 258203 Server infiziert, im Durchschnitt also 32275 Server pro Stunde.

$\frac{1}{8}\sum\limits_{k=0}^{7}g'(k)\approx33107$ ist der Mittelwert der acht Werte $g'(0)$, $g'(1)$, …, $g'(7)$, also die durchschnittlich pro Stunde infizierten Rechner.

Daher sind die Werte ähnlich.</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1e</td><td>$h(t)=\frac{20000\cdot280000}{20000+(280000-20000)\cdot e^{-280000\cdot3,188\cdot10^{-6}\cdot t}}=\frac{5,6\cdot10^9}{20000+260000\cdot e^{-0,89264\cdot t}}$.

Zum Beispiel: Beide Funktionsgraphen haben prinzipiell den gleichen Verlauf: Sie haben den gleichen Anfangswert und die gleiche Sättigungsgrenze, an den Wendestellen haben beide den Funktionswert $140\,000$, aber die Wendestelle von g liegt links von der Wendestelle von h. Der von h beschriebene Infektionsprozess verläuft somit langsamer.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>13</td><td>17</td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Pralinen

Das kleine Unternehmen „Pralinera" produziert Pralinen.

Der „Pralinera" entstehen unterschiedliche Gesamtkosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge der Pralinen bei fest stehender Lieferzeit. Je größer die Menge der produzierten Pralinen ist, desto höher fallen die Gesamtkosten aus, wobei der Gesamtkostenzuwachs mit jeder zusätzlich produzierten Einheit unterschiedlich ist. Bei größeren Produktionsmengen können die Gesamtkosten besonders stark steigen, z.B. durch Überstunden, Nachtarbeit und zusätzlichen Maschinenbedarf.

a) Der „Pralinera" entstehen bei der Produktion für einen Auftrag folgende Gesamtkosten: Bei einer Produktionsmenge von null kg belaufen sich die Gesamtkosten auf 100 €. Bei einer Produktionsmenge von 50 kg betragen die Gesamtkosten 1400 €. Bei einer Produktionsmenge von 100 kg betragen die Gesamtkosten 3000 €. Bei einer Produktionsmenge von 50 kg beträgt die lokale (momentane) Änderungsrate der Gesamtkosten 18 € pro kg.

   Bestimmen Sie aus den Angaben eine ganzrationale Funktion *K* mit möglichst kleinem Grad, wobei x die Produktionsmenge (in kg) und $K(x)$ die Gesamtkosten (in €) in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x beschreiben und begründen Sie ihren Ansatz. (6 Punkte)

Für verschiedene Aufträge entstehen für die „Pralinera" bei einer Produktionsmenge von x verschiedene Gesamtkosten $K_t(x)$ in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x (x in kg, $K_t(x)$ in €).
Diese können durch die Funktionen K_t mit $K_t(x) = 0{,}0044x^3 - 0{,}2tx^2 + 5t^2x + 100,\ 0 \le x \le 100$

und $t \in [0;3]$ beschrieben werden, wobei t bestimmte Eigenschaften der Aufträge berücksichtigt.

Die „Pralinera" möchte unabhängig vom Auftrag die Pralinen zum Preis von 20 € pro kg verkaufen.
Die Einnahmen, welche als das Produkt aus Menge und Preis definiert sind, werden dann durch die Funktion E mit $E(x) = 20 \cdot x$ für jede Produktionsmenge x beschrieben (x in kg, $E(x)$ in €).

b) Die Funktion G mit $G(x) = -0{,}0044x^3 + 0{,}4x^2 - 100$ gibt mit $t = 2$ für jede Produktionsmenge x den zugehörigen Gewinn $G(x)$ in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x an (x in kg, $G(x)$ in €).
   Begründen Sie diese Aussage

   Skizzieren Sie die Graphen von K_2, E und G in ein Koordinatensystem.

   Die Kostenfunktion K_2 hat keine Extremstellen. Erläutern Sie die Bedeutung dieser Aussage für den Verlauf des Graphen von K_2. Interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang. (7 Punkte)

c) Entscheiden Sie, ob die „Pralinera" für $t = 2$ bei einer Produktionsmenge von 24 kg einen Gewinn oder einen Verlust erwirtschaftet.

   Bestimmen Sie für $t = 2$ ein Intervall für die Produktionsmengen, in dem die „Pralinera" einen Gewinn erwirtschaftet und begründen Sie Ihren Ansatz. (4 Punkte)

d) Ermitteln Sie in dem Intervall $[0;100]$ für $t = 2$ die Produktionsmenge, mit der der größte Gewinn erwirtschaftet wird, und geben Sie diesen größten Gewinn an.

   Die „Pralinera" produziert genau diese optimierte Produktionsmenge. Aufgrund einer Mieterhöhung steigen die Gesamtkosten für jede Produktionsmenge um den gleichen Betrag. Ein Unternehmensmitglied behauptet, dass man nun mehr produzieren sollte, um den Gewinn zu vergrößern.

   Entscheiden Sie, ob diese Aussage richtig oder falsch ist und begründen Sie Ihre Antwort. (5 Punkte)

e) Einem Kunden ist der Preis zu hoch. Die „Pralinera“ will den Preis senken und ein Lockangebot für den Kunden abgeben.

Ermitteln Sie mit Hilfe von K_t bei einer Produktionsmenge von 50 kg in Abhängigkeit von t den Preis, bei dem die „Pralinera“ weder Gewinn noch Verlust erwirtschaftet. (4 Punkte)

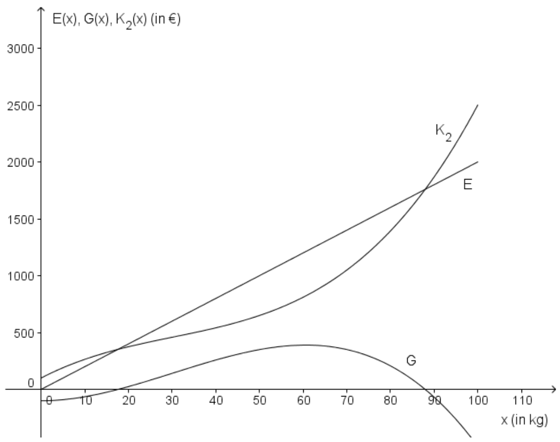
f) Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt von K_t bei einer Produktionsmenge von $\frac{500}{33}t$ kg liegt und berechnen Sie die entstehenden Kosten bei dieser Produktionsmenge.

Begründen Sie mit Hilfe des Verlaufs von K_2, warum bei dieser Funktion in der Nähe der Wendestelle eine Produktionserhöhung sinnvoll ist.

Aufgrund der besonderen Bedeutung des Wendepunktes für die „Pralinera“ soll für die unterschiedlichen Aufträge eine Funktion ermittelt werden, auf deren Graph alle Wendepunkte liegen.

Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte der Kurvenschar K_t auf dem Graphen einer Funktion f liegen und geben Sie die zugehörige Funktionsvorschrift an. (7 Punkte)

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 2**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
2a	Aus dem Text lassen sich vier Informationen entnehmen, welche zu vier Gleichungen führen. Deshalb wird eine allgemeine ganzrationale Funktion 3. Grades als Ansatz gewählt: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $K(0) = 100$ und somit $d = 100$ $K(50) = 125000a + 2500b + 50c + d = 1400$ $K(100) = 1000000a + 10000b + 100c + d = 3000$ $K'(50) = 7500a + 100b + c = 18$ $\left[\begin{array}{cccc\|c} 125000 & 2500 & 50 & 1 & 1400 \\ 1000000 & 10000 & 100 & 1 & 3000 \\ 7500 & 100 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0,0044 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right]$ $K(x) = 0,0044x^3 - 0,6x^2 + 45x + 100$	3	3	
2b	Der Gewinn berechnet sich aus der Differenz der Einnahmen und der Gesamtkosten, d.h. $G(x) = E(x) - K_2(x) = -0,0044x^3 + 0,4x^2 - 100$.  Da K_2 keine Extremstellen besitzt, ist die Kostenfunktion streng monoton. Da $0,0044$ ein positiver Wert ist, ist sie streng monoton steigend. Dies ist charakteristisch für die betriebliche Kostenentwicklung, da bei Erhöhung der Produktionsmenge stets mit erhöhten Kosten zu rechnen ist.	2	5	
2c	Da $G(24) \approx 69,57 > 0$, wird ein Gewinn erwirtschaftet. Für Produktionsmengen $x \in [17,6;88]$ erwirtschaftet die „Pralinera“ einen Gewinn ($G(x) \geq 0$). Eine mögliche Begründung: Die Nullstellen der Funktion G kennzeichnen den Wechsel vom Verlust zum Gewinn und umgekehrt, deshalb folgt $G(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx -14,7 \vee x \approx 17,6 \vee x \approx 88$. Die Stelle $x \approx -14,7$ liegt nicht im Definitionsbereich.	2	2	

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2d</td><td>$G'(x) = -0,0132x^2 + 0,8x$. Es gilt $-0,0132x^2 + 0,8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2000}{33}$.

Ein Vergleich der Funktionswerte an den Stellen und den Randstellen des Intervalls ergibt $G(0) = -100$, $G(\frac{2000}{33}) \approx 389,75$ und $G(100) = -500$. Bei $\frac{2000}{33}$ kg wird das absolute Maximum des Gewinns mit ca. $389,75$ € erzielt.

Nein, das Unternehmensmitglied hat nicht Recht. Mögliche Begründung: Der Graph der Gesamtkostenfunktion verschiebt sich um den Betrag der Mieterhöhung in Richtung der y - Achse. Da die Einnahmen gleich bleiben, verringert sich der maximale Gewinn, aber die Produktionsmenge mit dem maximalen Gewinn bleibt $\frac{2000}{33}$ kg.</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>2e</td><td>Eine mögliche Lösung: Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge von 50 kg betragen $(650 - 500t + 250t^2)$ €.
Die Einnahmen werden mit dem gesuchten Preis a durch $E(50) = a \cdot 50$ beschrieben. Es gilt insgesamt:
$a \cdot 50 - (650 - 500t + 250t^2) = 0 \Leftrightarrow a = 13 - 10t + 5t^2$.
Mit einem Preis von $(13 - 10t + 5t^2)$ € pro kg wird bei einer Produktionsmenge von 50 kg weder Gewinn noch Verlust erwirtschaftet.</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2f</td><td>Es gilt $K_t''(x) = 0,0264x - 0,4t$.
Da $K_t''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{500}{33}t$ ist und jede Funktion dritten Grades eine Wendestelle besitzt, ist $x = \frac{500}{33}t$ eine Wendestelle von K_t. $K_t(\frac{500}{33}t) \approx 45,15t^3 + 100$, also entstehen bei einer Produktionsmenge von $\frac{500}{33}t$ kg Gesamtkosten von ca. $(45,15t^3 + 100)$ €.

In der Nähe der Wendestelle ist eine Produktionserhöhung sinnvoll, da bis zum Wendepunkt der Gesamtkostenkurve die Zunahme der Gesamtkosten immer geringer wird, während sie nach dem Wendepunkt zunächst langsam, dann immer stärker ansteigt.

Die Wendepunkte $W(\frac{500}{33}t \,/\, 45,15t^3 + 100)$ liegen auf der durch $f(x) = \frac{649}{50000}x^3 + 100$ beschriebenen Kurve, da $f(\frac{500}{33}t) = \frac{649}{50000}(\frac{500}{33}t)^3 + 100 \approx 45,15t^3 + 100$.</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>13</td><td>17</td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe 3 - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

Mehrwegflaschen

Mehrwegflaschen haben eine sehr hohe Rücklaufquote. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Flasche zurückgegeben wird, heißt Rückgabewahrscheinlichkeit. Bei Milchflaschen liegt sie bei 90%, bei Bierflaschen und Mineralwasserflaschen zwischen 96% und 98%.

a) Es werden zunächst Mehrweg-Mineralwasserflaschen betrachtet. Rechnen Sie im Folgenden mit einer Rückgabewahrscheinlichkeit pro Flasche von $p_W = 0,97$.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 16 einzeln verkauften Flaschen

- genau 15 Flaschen zurückgegeben werden.
- mindestens 15 Flaschen zurückgegeben werden.
- weniger als 14 Flaschen zurückgegeben werden.

Geben Sie die Voraussetzungen an, auf denen Ihre Berechnung beruht.
Runden Sie Ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen. (7 Punkte)

b) Jetzt betrachten wir Mehrweg-Milchflaschen mit einer Rückgabewahrscheinlichkeit von $p_M = 0,9$ pro Flasche.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 10 einzeln verkauften Milchflaschen mindestens eine nicht zurückgegeben wird.

Ermitteln Sie, ab wie vielen verkauften Milchflaschen die Wahrscheinlichkeit, dass alle Flaschen zurückkommen, höchstens 5% beträgt.

Berechnen Sie, wie viele nicht zurückgegebene Milchflaschen ein Supermarkt pro 100 Flaschen im Mittel erwarten kann. (7 Punkte)

c) Bei den Milch-Mehrwegflaschen handelt es sich um Literflaschen. Jede zurückgegebene Flasche wird wieder gefüllt und verkauft.

- Erklären Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms, warum die Wahrscheinlichkeit, dass mit einer Flasche mindestens 5 Liter Milch verkauft werden, $0,9^4 = 65,61\%$ beträgt.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich mit einer Flasche genau 5 Liter Milch verkaufen lassen.
- Ermitteln Sie eine allgemeine Berechnungsvorschrift für den Verkauf von genau k Litern Milch in einer Mehrweg – Literflasche und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen mit $(k / P(X = k))$ im Bereich von $k = 1$ bis $k = 20$

Wir nehmen an, dass nach 30 Füllungen eine Flasche wegen möglicher Beschädigungen aussortiert wird[1].

- Bestimmen Sie unter dieser Annahme eine Berechnungsvorschrift für den Erwartungswert für die Menge Milch, die mit einer Mehrwegflasche verkauft wird. Bedenken Sie dabei, dass mehr als 30 Füllungen nicht möglich sind. (Der Wert muss nicht berechnet werden. Ergebnis: ca. $9,6$ Liter)

(10 Punkte)

[1] Die Angaben zur Zahl der durchschnittlich möglichen Füllungen schwanken zwischen 20 und 40.

d) Eine Zufallsgröße X heißt geometrisch verteilt mit dem Parameter p, wenn gilt:
$P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p; \quad k \geq 1$. Zeigen Sie unter Verwendung der Formel

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a^{i-1} = 1+2a+3a^2+...+na^{n-1}+... = \frac{1}{(1-a)^2} \quad \text{falls} \quad -1<a<1 \;,$$

dass für diese Zufallsgröße gilt: $E(X)=\frac{1}{p}$.

(3 Punkte)

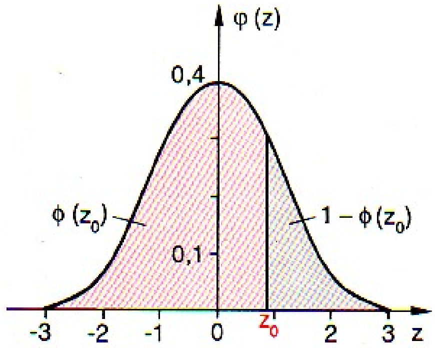
e) Eine schwedische Firma hat für Milch standfeste Einweg-Schlauchverpackungen mit sehr guter Öko-Bilanz entwickelt (Material aus 40% Kreide, wenig Energieverbrauch und Abfallmenge, ...). Eine große Lebensmittelkette überlegt, Bio-Milch in Schlauchverpackungen einzuführen.
Um den Anteil der Schlauchverpackungen an der verkauften Bio-Milchmenge abzuschätzen, werden 180 Kundinnen und Kunden, die Bio-Milch eingekauft haben, befragt, ob sie die Milch eher in der Schlauch- oder in der Glasverpackung kaufen würden. 117 von ihnen erklären, dass sie die Schlauchverpackung wählen würden.
Bestimmen Sie das 90% - Konfidenzintervall für den Anteil der Bio-Milch-Kunden, die Schlauchverpackungen kaufen werden.

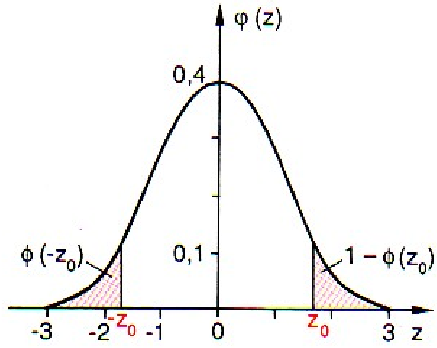
(6 Punkte)

Material zur Aufgabe Mehrwegflaschen: ***Tabelle zur Normalverteilung***

$\phi(z) = 0,\ldots$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$





z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7703	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998

Beispiele für den Gebrauch der Tabelle:

$\phi(2{,}37) = 0{,}9911$; $\phi(-2{,}37) = 1 - \phi(2{,}37) = 1 - 0{,}9911 = 0{,}0089$;

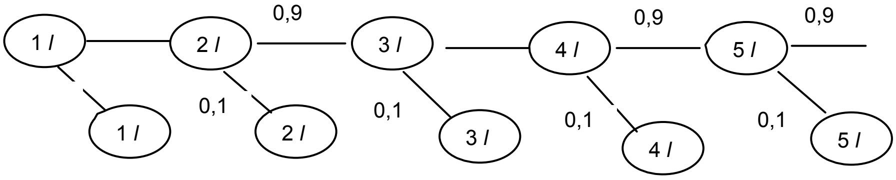
$\phi(z) = 0{,}7910 \Rightarrow z = 0{,}81$; $\phi(z) = 0{,}2090 = 1 - 0{,}7910 \Rightarrow z = -0{,}81$

Für die Wahrscheinlichkeit von σ-Umgebungen um den Erwartungswert μ gilt:

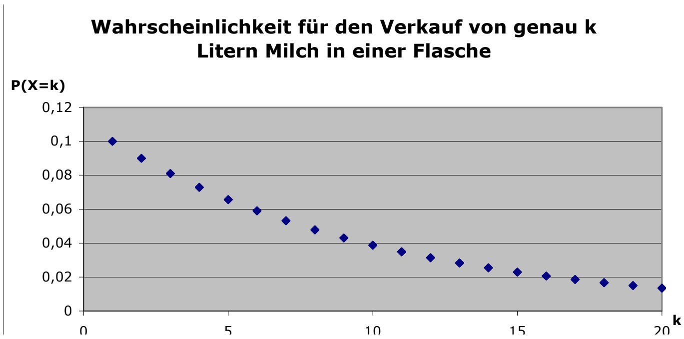
$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90\%$

$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 95\%$

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 3**

	Lösungsskizze	Bewertung		
		I	II	III
3a	X: Anzahl der Flaschen, die zurück gegeben werden $n = 16$ $p = 0,97$ X ist binomialverteilt mit n und p (zwei mögliche Ergebnisse pro „Versuchsstufe“ (zurück gegeben /nicht zurück gegeben), unabhängige Ausfälle auf jeder Stufe, da einzeln verkauft) $P(X = 15) \approx 0,304$ $P(X \geq 15) = P(X = 15) + P(X = 16) \approx 0,918$ $P(X < 14) = 1 - P(X \geq 14) \approx 0,011$	6	1	
3b	Y: Anzahl der verkauften Flaschen Milch, die nicht zurück gegeben werden $n = 10;\ \ p = 0,1$ Da Y (analog zu a) binomialverteilt ist, gilt: $P(Y \geq 1) \approx 0,651$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 65% wird mindestens eine von 10 Milchflaschen nicht zurückgegeben. X: Anzahl der Flaschen, die zurück gegeben werden n unbekannt, $p = 0,9$: $P(X = n) = 0,9^n \leq 5\% \Rightarrow n = 29$ (Sowohl Probierlösungen als auch exakte Rechnungen sind zulässig.) Es müssen mindestens 29 Milchflaschen verkauft werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% alle Flaschen zurück kommen. Y wie oben, $n = 100;\ \ p = 0,1$: Der Erwartungswert für binomial verteilte Zufallsgrößen ergibt sich aus $\mu = n \cdot p = 10$ Also sind im Mittel 10 nicht zurück gegebene Flaschen zu erwarten.	3	4	
3c	X: Anzahl der mit einer Flasche verkauften Liter Milch, wenn die Flasche nach 30 Füllungen aussortiert wird. Baumdiagramm:  Am Baumdiagramm sieht man, dass der Pfad zum Ereignis „Mindestens 5 Liter werden mit einer Flasche verkauft“ die Wahrscheinlichkeit $0,9^4$ hat. $P(X = 5) \approx 0,6561 \cdot 0,1 = 0,06561$ $P(X = k) = 0,9^{k-1} \cdot 0,1$	4	6	

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>



$$E(X)=1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1+\ldots+29\cdot 0{,}9^{28}\cdot 0{,}1+30\cdot 0{,}9^{29}$$
$$=\sum_{k=1}^{29} k\cdot 0{,}9^{k-1}\cdot 0{,}1+30\cdot 0{,}9^{29}$$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3d</td><td>

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot P(X=k)=1\cdot(1-p)^0\cdot p+2\cdot(1-p)^1\cdot p+3\cdot(1-p)^2\cdot p+\ldots$$
$$=p(1+2\cdot(1-p)^1+3\cdot(1-p)^2+\ldots)$$
$$=p\cdot\frac{1}{(1-(1-p))^2}=\frac{1}{p}$$

</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>3e</td><td>

X: Anzahl der Befragten, die Milch in der Schlauchpackung kaufen; $n=180$

X ist binomialverteilt mit n und unbekanntem p, also ist $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ näherungsweise normalverteilt (Bedingung: $\sigma>3$ wegen relativ großem n für einen Bereich von $0{,}1\le p\le 0{,}9$ auf jeden Fall erfüllt).

Befragungsergebnis: $\frac{X}{n}=\frac{117}{180}=0{,}65$

90% – Konfidenzintervall: $\Phi(z)=0{,}95 \Rightarrow z\approx 1{,}64$
$\Phi(z)=0{,}05 \Rightarrow z\approx -1{,}64$

also $|0{,}65-p|=1{,}64\frac{\sigma}{n}$
(oder ähnliche Begründungen des Ansatzes entsprechend der Behandlung im Unterricht)

$\Rightarrow p_1=0{,}7057\approx 70{,}6\%$
$p_2=0{,}5899\approx 59{,}0\%$

Da $0{,}3\le\frac{X}{n}\le 0{,}7$, kann auch mit der Näherungsmethode gerechnet werden:

$$|0{,}65-p|\approx 1{,}64\frac{\sigma}{n}=1{,}64\sqrt{\frac{0{,}65\cdot 0{,}35}{180}}\approx 0{,}0583 \quad\Rightarrow 0{,}5917\le p\le 0{,}7083$$

Es ist mit einem Anteil an „Schlauchmilch-Käuferinnen oder -Käufern“ zwischen 59% und 71% zu rechnen.

</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>13</td><td>17</td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe 4 - zum Themenbereich Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Vertiefung Lineare Algebra

Waschbären

Zwei Waschbärenpaare wurden 1934 erstmalig in Deutschland am Edersee in Hessen ausgesetzt. Bis dahin waren die Waschbären in Deutschland nicht heimisch.

Inzwischen haben sich die Waschbären stark verbreitet und ihren Lebensraum sowohl in Wäldern als auch in Städten gefunden. Da sich die Tiere sehr erfolgreich an den Menschen anpassen können, sind sie in einigen Städten schon zur Plage geworden. Die Waschbären können Dachböden besiedeln, sie machen sich über Mülltonnen und auch über Hunde- und Katzenfutter her.

Wie in der Populationsdynamik üblich, werden in dieser Aufgabe nur weibliche Waschbären (Fähen) betrachtet. Diese werden in drei Altersklassen eingeteilt:

- w Anzahl nicht geschlechtsreifer weiblicher Tiere, von der Geburt bis zu einem Jahr (Welpen).
- j Anzahl junger, gerade geschlechtsreifer Fähen, von einem bis zwei Jahren (Junge).
- r Anzahl reifer Fähen, zwei Jahre und älter (Reife).

Eine Population von Fähen wird zum Beobachtungsbeginn durch einen Populationsvektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} w \\ j \\ r \end{pmatrix}$ dargestellt, mit Matrix-Vektor-Multiplikation soll der Populationsvektor für das Folgejahr berechnet werden.

Für eine im Wald lebende Population gilt:

- Junge, gerade geschlechtsreife Fähen bringen in jedem Jahr im Schnitt $1,9$ weibliche Welpen zur Welt, reifere Fähen dagegen nur $1,4$.
- Ca. 54% der Welpen sterben noch in ihrem ersten Lebensjahr, von den Jungen sterben jährlich ca. 43% und von den Reifen ca. 58%.

a)

- Geben Sie für die Überlebens- und Geburtenraten ein Übergangsdiagramm an.
- Entscheiden Sie, welche der drei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,46 & 0 \\ 1,9 & 0 & 0,57 \\ 1,4 & 0 & 0,42 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1,9 & 1,4 \\ 0,46 & 0 & 0 \\ 0 & 0,57 & 0,42 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1,9 & 1,4 \\ 0,54 & 0 & 0 \\ 0 & 0,43 & 0,58 \end{pmatrix}.$$

dem Übergangsdiagramm entspricht, so dass für eine Anfangspopulation $\vec{v}_0$ mit der Matrix-Vektor-Multiplikation eine Vorhersage über die Entwicklung der Waschbärenpopulation gemacht werden kann.
Begründen Sie mit jeweils einem Argument, warum die beiden anderen Matrizen nicht geeignet sind.

(6 Punkte)

In den Städten sind die Lebensbedingungen für die extrem anpassungsfähigen Waschbären noch besser. Die folgende Matrix P beschreibt das Wachstum der städtischen Waschbären relativ gut.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1,5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,45 \end{pmatrix}$$

b)

- Begründen Sie ohne Rechnung, dass ein durch P dargestelltes Populationswachstum bessere Lebensbedingungen voraussetzt als das in a) beschriebene.
- Geben Sie P^2 an und erläutern Sie die Werte in der ersten Zeile und die in der ersten Spalte bezogen auf das vorliegende Problem.

(7 Punkte)

c) Rechnen Sie im Folgenden bei den Matrizenpotenzen mit einer Genauigkeit von zwei Nachkommastellen und geben Sie die gefragten Waschbärenpopulationen ganzzahlig an.

Gehen Sie davon aus, dass sich eine Waschbärenpopulation in einer Stadt S von anfänglich zwei Waschbärenpaaren (mit je einer jungen und einer reifen Fähe) über einen Zeitraum von mehr als 20 Jahren gemäß der Matrix P ausbreiten kann.

- Berechnen Sie, wie sich die weiblichen Waschbären nach 20 und nach 21 Jahren in dieser Stadt auf die drei Generationen verteilen werden und berechnen Sie die Gesamtzahlen.
- Bestimmen Sie in beiden Fällen auch die prozentualen Verteilungen. Runden Sie die Werte auf ganze Prozentpunkte und vergleichen Sie diese miteinander.
- Berechnen Sie die prozentuale Zunahme der Gesamtpopulation sowie die der einzelnen Generationen vom $20.$ zum $21.$ Jahr.
- Leiten Sie aus Ihren Ergebnissen eine Vermutung über das zukünftige Wachstum der Population her, wenn die Lebensbedingungen unverändert bleiben.

(7 Punkte)

d) Die Matrix P besitzt den dominanten Eigenwert $k = \frac{5}{4} = 1,25$.

- Erläutern Sie den die Aussage "$\vec{v}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert k der Matrix P" und berechnen Sie alle Eigenvektoren von $k = 1,25$.
- Berechnen Sie auch die zugehörige stabile prozentuale Verteilung $\vec{v}_s$.
- Aufgrund von Beobachtungen geht man davon aus, dass in Städten ca. 45 weibliche Waschbären pro Quadratkilometer leben können. Die Stadt S aus Teil c) hat eine ungefähre Ausdehnung von $100\,\mathrm{km}^2$. Bereits nach 20 Jahren wurde in S eine stabile Verteilung mit 251 Fähen erreicht. Berechnen Sie, nach wie vielen weiteren Jahren die Tiere erstmalig in das ländliche Umland abwandern müssen, da der städtische Lebensraum überfüllt ist.

(7 Punkte)

Forschungsberichte über Waschbären betonen, dass die Weibchen bisher alle Versuche, die Waschbärenpopulation durch Jagd oder Fallenstellen zu verringern, einfach durch eine höhere Geburtenrate ausgeglichen haben. Gehen Sie jetzt davon aus, dass die Jäger die Überlebenschancen der gebärfähigen Fähen stark reduziert haben, nämlich auf $p_2 = \frac{5}{16} = 0,3125$ und $p_3 = \frac{1}{4} = 0,25$. Die reifen Fähen bringen daraufhin in jedem Jahr im Schnitt zwei Welpen ($g_3 = 2$) zur Welt. Die den neuen Bedingungen angepasste Übergangsmatrix ergibt sich zu

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & g_2 & g_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g_2 & 2 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3125 & 0,25 \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristische Polynom $p(x) = x^3 - 0,25x^2 - 0,5g_2\,x + 0,125g_2 - 0,3125$.

e)

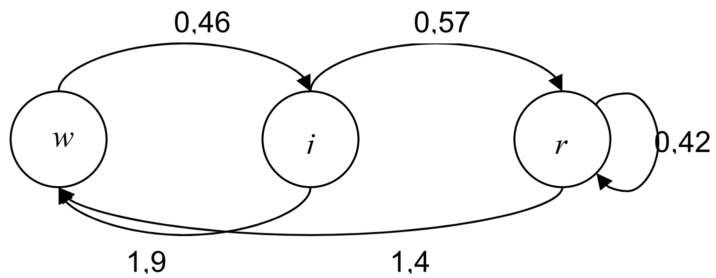
- Bestimmen Sie die Anzahl der Welpen, die die jungen Fähen jedes Jahr im Schnitt gebären müssen, damit sich eine Waschbärenpopulation mit stabiler Verteilung weiterhin mit dem Faktor $k_1 = 1,25$ vermehrt.
- Zeigen Sie, dass unter diesen Bedingungen eine Population mit 65% Welpen, 26% Jungen und 8% Reifen fast stabil ist.

(6 Punkte)

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 4**

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4a</td><td>

- Übergangsdiagramm mit Überlebens- und Geburtenraten:



- Zum Beispiel:
B ist korrekt, die Matrix-Vektor-Multiplikation ergibt die im Diagramm dargestellte neue Aufteilung, A ist als Transponierte von B nicht geeignet für Matrix-Vektor-Multiplikation, C enthält die angegebenen Sterberaten.

</td><td>4</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>4b</td><td>

- Da in P sowohl beide Geburtenraten als auch die Überlebensraten aller drei Generationen größer sind als die aus Aufgabenteil a), setzt das durch P beschriebene Wachstum bessere Lebensbedingungen voraus.
- $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{10} & \frac{27}{40} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{10} & \frac{27}{100} & \frac{81}{400} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,675 \\ 0 & 1 & 0,75 \\ 0,3 & 0,27 & 0,2025 \end{pmatrix}$

In kurzer Darstellung sollten die folgenden Inhalte im Wesentlichen erfasst sein:
Die Werte in der ersten Zeile geben die Anzahlen der weiblichen Welpen an, die nach zwei Jahren von einer Welpe (im Durchschnitt eine), von einer jungen (im Durchschnitt $0,9$) bzw. von einer reifen Fähe (im Durchschnitt $0,675$) abstammen.
Der Wert in Spalte eins, Zeile zwei ist die auf zwei Jahre bezogene Übergangsrate von Welpe zu Jungtier, sie beträgt 0%, denn nach zwei Jahren werden die überlebenden Welpen zu reifen Fähen und ihr Nachwuchs hat erst den Welpenstatus erreicht.
In Spalte eins, Zeile drei bedeutet der Wert $0,3$, dass 30% der Welpen zwei Jahre überleben und zu reifen Fähen werden.

</td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>4c</td><td>

Geringe Abweichungen in den Ergebnissen treten auf je nachdem, wie gerechnet oder wann gerundet wird.

- $\vec{v}_{20} = P^{20} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 148,07 \\ 59,25 \\ 44,42 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 148 \\ 59 \\ 44 \end{pmatrix}$, mit 251 insgesamt.

$\vec{v}_{21} = P^{21} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 185,12 \\ 74,03 \\ 55,54 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 185 \\ 74 \\ 56 \end{pmatrix}$, mit 315 insgesamt.

(oder $\vec{v}_{21} \approx P * \begin{pmatrix} 148 \\ 59 \\ 44 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 184 \\ 74 \\ 55 \end{pmatrix} \approx 313 \begin{pmatrix} 0,59 \\ 0,24 \\ 0,18 \end{pmatrix}$, mit 313 insgesamt.)

- Die prozentualen Aufteilungen $\vec{v}_{20} \approx 251 \begin{pmatrix} 0,59 \\ 0,24 \\ 0,18 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_{21} \approx 315 \begin{pmatrix} 0,59 \\ 0,23 \\ 0,18 \end{pmatrix}$ sind mit

</td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	**Bewertung** I	**Bewertung** II	**Bewertung** III
	59% Welpen, 24% bzw. 23% Jungen und 18% Reifen fast gleich. ● $\frac{315}{251} \approx 1,25$, die Population wächst um ca. 25%. Da die prozentualen Aufteilungen (s.o.) in beiden Jahren (fast) gleich sind, wachsen auch die einzelnen Generationen um 25%, so dass gilt: $\vec{v}_{21} \approx 1,25 \cdot \vec{v}_{20}$. ● Vermutung: Mit $\vec{v}_{20}$ ist eine stabile Verteilung erreicht, da aus $\vec{v}_{21} = P * \vec{v}_{20} = 1,25 \cdot \vec{v}_{20}$ auch für zukünftige Verteilungen folgt: $\vec{v}_{22} = P * \vec{v}_{21} = P * (1,25 \cdot \vec{v}_{20}) = 1,25 \cdot P * \vec{v}_{20} = 1,25 \cdot \vec{v}_{21}$ usw. Die Vermutung darf auch experimentell bestätigt werden, z. B. durch $\vec{v}_{30} = P^{30} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1379 \\ 552 \\ 414 \end{pmatrix} \approx \frac{1}{2345} \begin{pmatrix} 0,59 \\ 0,24 \\ 0,18 \end{pmatrix}$.			
4d	● $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ heißt Eigenvektor vom Eigenwert k einer Matrix P, wenn gilt: $P * \vec{v} = k \cdot \vec{v}$ bzw. $P * \vec{v} - k \cdot \vec{v} = (P - k \cdot E_3) * \vec{v} = \vec{0}$. Zu $k = 1,25$ und der gegebenen Matrix P gehört die erweiterte Matrix $\left(\begin{array}{ccc\|c} -1,25 & 2 & 1,5 & 0 \\ 0,5 & -1,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & -0,8 & 0 \end{array}\right)$, mit der rref-Funktion ergibt sich die Lösung zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$. ● Für $r = \frac{3}{17}$ ergibt sich die stabile prozentuale Verteilung. $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} \frac{10}{17} \\ \frac{4}{17} \\ \frac{3}{17} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,59 \\ 0,24 \\ 0,18 \end{pmatrix}$ ● Die Waschbärenkapazität der Stadt S beträgt ca. 4500 Fähen. Bleibt die Zunahme unverändert, so müssen einige Waschbären erstmalig nach ca. 13 weiteren Jahren ins Umland übersiedeln, da sich die Population mit dem dominanten Eigenwert vermehrt: $251 \cdot 1,25^n = 4500 \Leftrightarrow n \approx 12,9$.	2	5	
4e	● $k_1 = \frac{5}{4}$ ist Eigenwert bedeutet $p(1,25) = 0$. Daher gilt $0 = 1,25^3 - 0,25 \cdot 1,25^2 - 0,5 \cdot 1,25 \cdot g_2 + 0,125 g_2 - 0,3125 = -0,5 g_2 + 1,25$ und somit $g_2 = 2,5$. ● Die Stabilität ist erreicht, da die prozentuale Aufteilung in etwa einem Eigenvektor von $k_1 = 1,25$ entspricht: $Q * \begin{pmatrix} 0,65 \\ 0,26 \\ 0,08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2,5 & 2 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3125 & 0,25 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,65 \\ 0,26 \\ 0,08 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,810 \\ 0,325 \\ 0,101 \end{pmatrix}$ und $1,25 \cdot \begin{pmatrix} 0,65 \\ 0,26 \\ 0,08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8125 \\ 0,325 \\ 0,1 \end{pmatrix}$.	1	2	3
	Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**

Aufgabe 5 - zum Themenbereich Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Vertiefung Analytische Geometrie

Marktplatz

Die Abbildung auf der nächsten Seite zeigt eine Karte des Marktplatzes in Bremen mit dem Rathaus, dem Dom und weiteren sehenswürdigen Gebäuden. Legt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung in die Mitte des Marktplatzes, so dass die x_1-Achse nach Süden, die x_2-Achse nach Osten und die x_3-Achse senkrecht zum Himmel zeigt, ergeben sich die im Folgenden angegebenen Punkte und Vektoren.
Alle Koordinaten sind dabei in Meter angegeben.

Die Vorderseite des Rathauses steht auf der Strecke $\overline{AB}$ mit den Punkten $A(-51|27|1)$ und $B(-23|51|1)$.

a) Von der Obernstraße her führen Straßenbahngleise durch den Punkt $P(-42|20|1)$ genau parallel zur Vorderseite am Rathaus vorbei.
Geben Sie eine Gleichung für die Gerade g an, die den Verlauf dieser Gleise beschreibt.
Vor dem Dom knickt das Straßenbahngleis nach rechts ab, am Dom vorbei zur Domsheide. Dieser zweite Teil der Gleise wird durch die Gerade h mit der Gleichung $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 84 \\ 98 \\ 0,5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 91 \\ 42 \\ -0,6 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$ beschrieben.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, an dem das Straßenbahngleis in die neue Richtung abknickt (Dass der „Knick" in Wirklichkeit abgerundet ist, soll vernachlässigt werden). (7 Punkte)

b) Von dem Straßenbahngleis vor dem Rathaus nimmt die Höhe des Marktplatzes nach Südwesten leicht ab. Dieser schräge Teil des Marktplatzes soll durch eine Ebene E beschrieben werden, die die Gerade g und den Mittelpunkt des Platzes $O(0|0|0)$ enthält.
Bestimmen Sie eine Ebenengleichung in Parameterform und Koordinatenform für die Ebene E.
(Hinweis: Für g kann die Form $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -56 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$ benutzt werden) (7 Punkte)

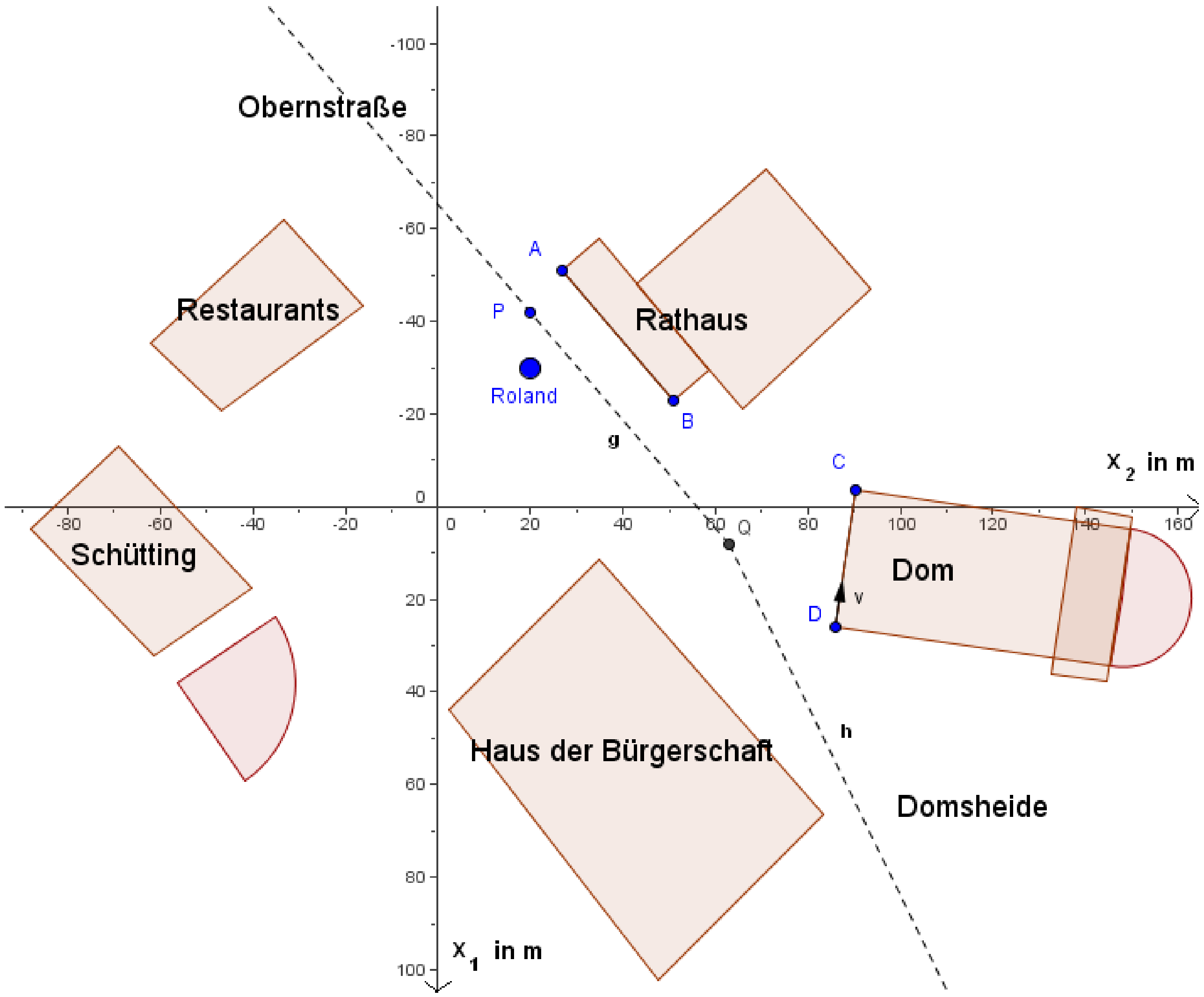
c) Die Turmseite des Domes steht auf der Strecke $\overline{CD}$ mit dem rechten Fußpunkt $D(26|86|1)$. Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zeigt von D in Richtung auf den linken Fußpunkt C, ist jedoch kürzer als $\overrightarrow{DC}$.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C, wenn diese Seite des Domes $30m$ lang ist. (5 Punkte)

d) In einem Prospekt wird ein $15m$ breiter Weg zwischen Straßenbahngleis und Dom erwähnt. Zeigen Sie, dass diese Angabe sehr ungenau ist, indem Sie den Abstand der Domecke D von der Geraden h berechnen. (8 Punkte)

e) Vor dem Rathaus steht das Denkmal „Roland von Bremen" mit standhaftem Blick auf den Dom. Sein Fußpunkt ist $R(-30|20|z)$.
Bestimmen Sie z derart, dass R in der Ebene E liegt (Falls Sie die Ebenengleichung in Teil b nicht gefunden haben, benutzen Sie stattdessen $E: \frac{6}{7}x_1 - x_2 + 56x_3 = 0$).
Der Roland wurde genau vertikal, d.h. senkrecht auf der x_1-x_2-Ebene errichtet.
Ermitteln Sie den Neigungswinkel der Figur gegen den leicht abschüssigen Marktplatz. (6 Punkte)

Material zur Aufgabe Marktplatz

Abbildung des Marktplatzes



Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 5**

	Lösungsskizze	Bewertung I	II	III
5a	Mit P als Stützvektor und $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor ergibt sich die Geradengleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-42\\20\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}28\\24\\0\end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$. Der Ansatz $\begin{pmatrix}-42\\20\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}28\\24\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}84\\98\\0,5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}91\\42\\-0,6\end{pmatrix}$ führt zu $s = -\frac{5}{6}$ und $t = \frac{43}{24}$. Einsetzen führt zu dem Schnittpunkt $Q(\frac{49}{6}\|63\|1)$.	3	4	
5b	Wählt man den Ortsvektor des Ursprungspunktes als Stützvektor, den Richtungsvektor von g und $\overrightarrow{PO}$ als Spannvektoren, so erhält man die Parametergleichung $E: \vec{x} = s\begin{pmatrix}42\\-20\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}7\\6\\0\end{pmatrix}; \quad s,t \in \mathbb{R}$. Auflösen zweier Komponentengleichungen nach s und t, und Einsetzen in die dritte Komponentengleichung führt zu einer Koordinatenform der Ebene: $E: 6x_1 - 7x_2 + 392x_3 = 0$.	4	3	
5c	Mit $\overrightarrow{DC} = 30 \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{30}{\sqrt{50}}\begin{pmatrix}-7\\1\\0\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}-29,7\\4,2\\0\end{pmatrix}$ ergibt sich aus $\vec{c} = \vec{d} + \overrightarrow{DC} \approx \begin{pmatrix}-3,7\\90,2\\1\end{pmatrix}$ näherungsweise der Punkt $C(-3,7\|90,2\|1)$	2	2	1
5d	Es gibt zahlreiche Wege zur Lösung dieser Aufgabe. Hier exemplarisch nur einer davon: Zunächst wird eine Gleichung der Ebene F bestimmt, die senkrecht auf h steht und D enthält. Der Richtungsvektor von h als Normalenvektor und Einsetzen der Koordinaten von D ergibt $91x_1 + 42x_2 - 0,6x_3 = 5977,4$. Danach bestimmt man den Schnittpunkt zwischen F und h mit gerundeten Werten: $S(31,62\|73,82\|0,85)$. Für den Abstand gilt dann $a = \left\|\vec{d} - \vec{s}\right\| \approx \sqrt{179,96} \approx 13,41$. Die Straßenbahn fährt also im Abstand von ca. $13,41m$ am Dom vorbei.		6	2
5e	Einsetzen der Koordinaten von R in die Ebenengleichung von E ergibt $-180 - 140 + 392z = 0$ und $z = \frac{40}{49}$ Für die Schnittwinkelberechnung gilt: $\sin(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}6\\-7\\392\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}6\\-7\\392\end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{392}{\sqrt{153749}} \approx 0,99972$, $\alpha \approx 88,65°$.	4	2	
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**