

ANALYSIS 1

I.1 Pflanzschalen

Eine Glashütte stellt eine Serie hochwertiger großer farbiger Pflanzschalen her, die in der Form alle ähnlich sind, etwa so wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt.



Die einzelnen Modelle der Serie unterscheiden sich aber in der Breite ihrer Silhouette (Seitenansicht).

Diese Seitenansichten lassen sich gut beschreiben durch Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = a - \frac{15}{x^2}, \quad a > 0.$$

Für verschiedene Werte von a ergeben sich unterschiedlich breite Schalen.

Dabei ist der Boden immer **bei $y = 0$** , und der obere Rand ist **bei $y = 5$** .

Eine Einheit entspricht dabei 10 cm in der Realität.

Drehen Sie das Blatt „Anlage 1“ um 90° im Uhrzeigersinn. Sie sehen nun für drei verschiedene a die Seitenansichten mit in x - und in y -Richtung gleich langen Einheiten. Die waagerechten Linien in der Zeichnung markieren die Werte $y = 0$ und $y = 5$.

- a) In der Anlage 1 sind die Graphen für $a = \frac{11}{2}$, $a = \frac{20}{3}$ und $a = 8$ eingezeichnet.

Ergänzen Sie eine passende Achsenbeschriftung und ordnen Sie den drei Graphen die zugehörigen Werte von a begründet zu.

15 P

- b) Berechnen Sie den Wert für a , bei dem der Durchmesser der Schale am oberen Rand genau 4 Einheiten beträgt.

10 P

- c) Begründen Sie, dass die Beschreibung der Pflanzschalen für $a < 5$ nicht sinnvoll ist.

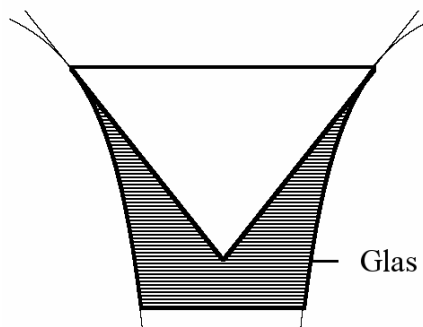
Hinweis: Überlegen Sie, wie groß der Radius der Schale am oberen Rand sein kann.

10 P

- d) Die Pflanzschalen werden draußen vor öffentlichen Gebäuden aufgestellt und müssen besonders standfest sein. Deshalb sollen sie aus massivem Glas hergestellt werden, und der Innenraum soll kegelförmig sein.

Die nebenstehende Abbildung zeigt das Prinzip. Die eingezeichneten geraden Mantellinien des Innenkegels (Begrenzung des Innenkegels) verlaufen am oberen Rand tangential zur Randkurve.

Bestätigen Sie, dass das Volumen des Innenkegels für $a = 7$ etwa 31 Liter beträgt.



25 P

- e) Für $a = 7$ kann das Gesamtvolumen (Glas + Innenkegel) berechnet werden durch $15\pi \int_0^5 \frac{1}{7-x} dx$.

Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich für $a = 7$ durch das massive Glas das Innenvolumen der Pflanzschale etwa auf die Hälfte reduziert.

Hinweise:

Zeigen Sie dazu zuerst, dass $G(x) = -\ln(7-x)$ im abgeschlossenen Intervall

zwischen 0 und 5 eine Stammfunktion von $g(x) = \frac{1}{7-x}$ ist.

Dabei darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass $\frac{1}{x}$ die Ableitung von $\ln x$ ist. **15 P**

- f) Begründen Sie, dass die in d) beschriebene Pflanzschalenkonstruktion mit dem massiven Glaskörper nicht mehr sinnvoll ist, wenn a zu groß wird. **10 P**

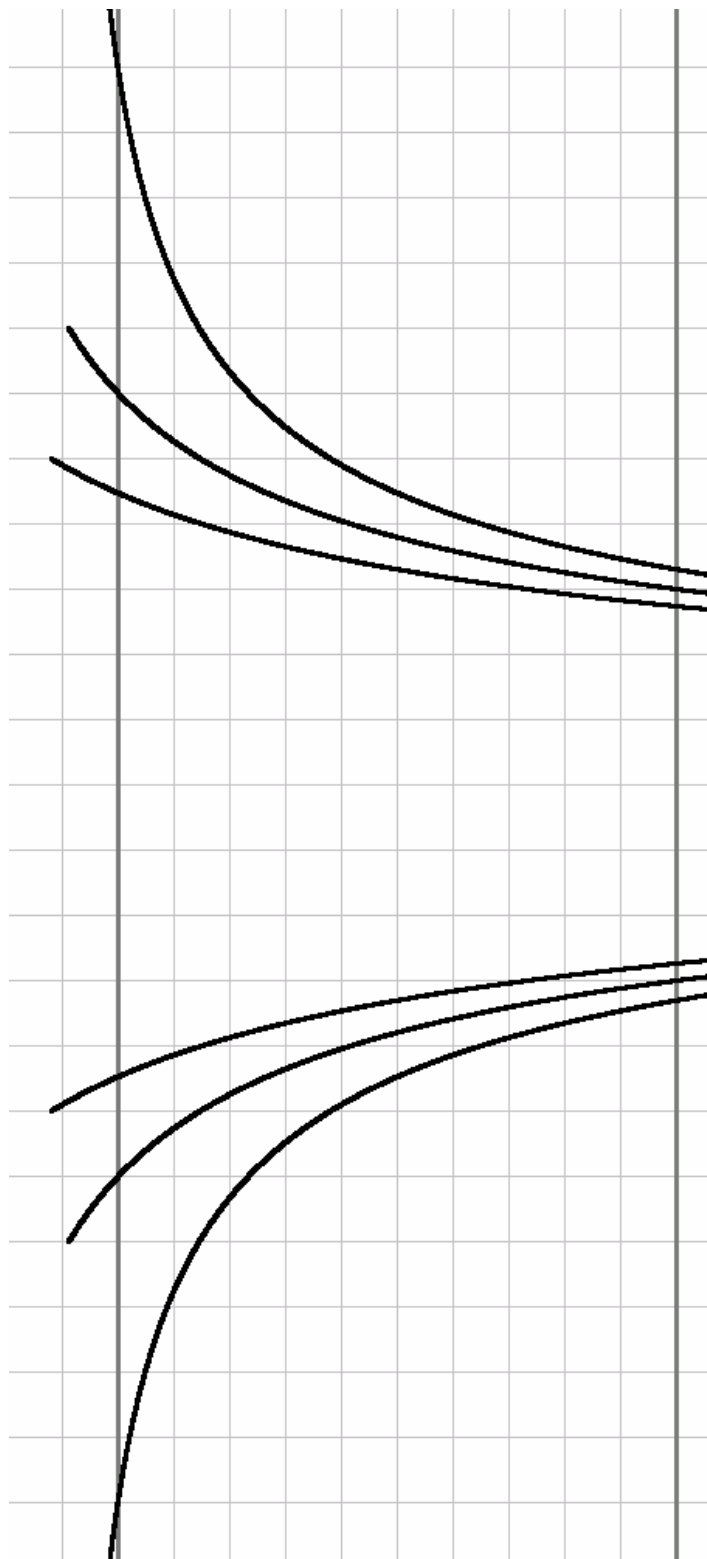
- g) Die Pflanzschalen sollen zum Verkauf auf den Markt gebracht werden. Für eine bestimmte Ausführung der Pflanzschalen lassen sich die Produktionskosten K (in €) in Abhängigkeit von der Stückzahl x durch folgende Gleichung beschreiben:

$$K(x) = 0,05x^3 - 1,5x^2 + 25x + 200, \quad x > 0.$$

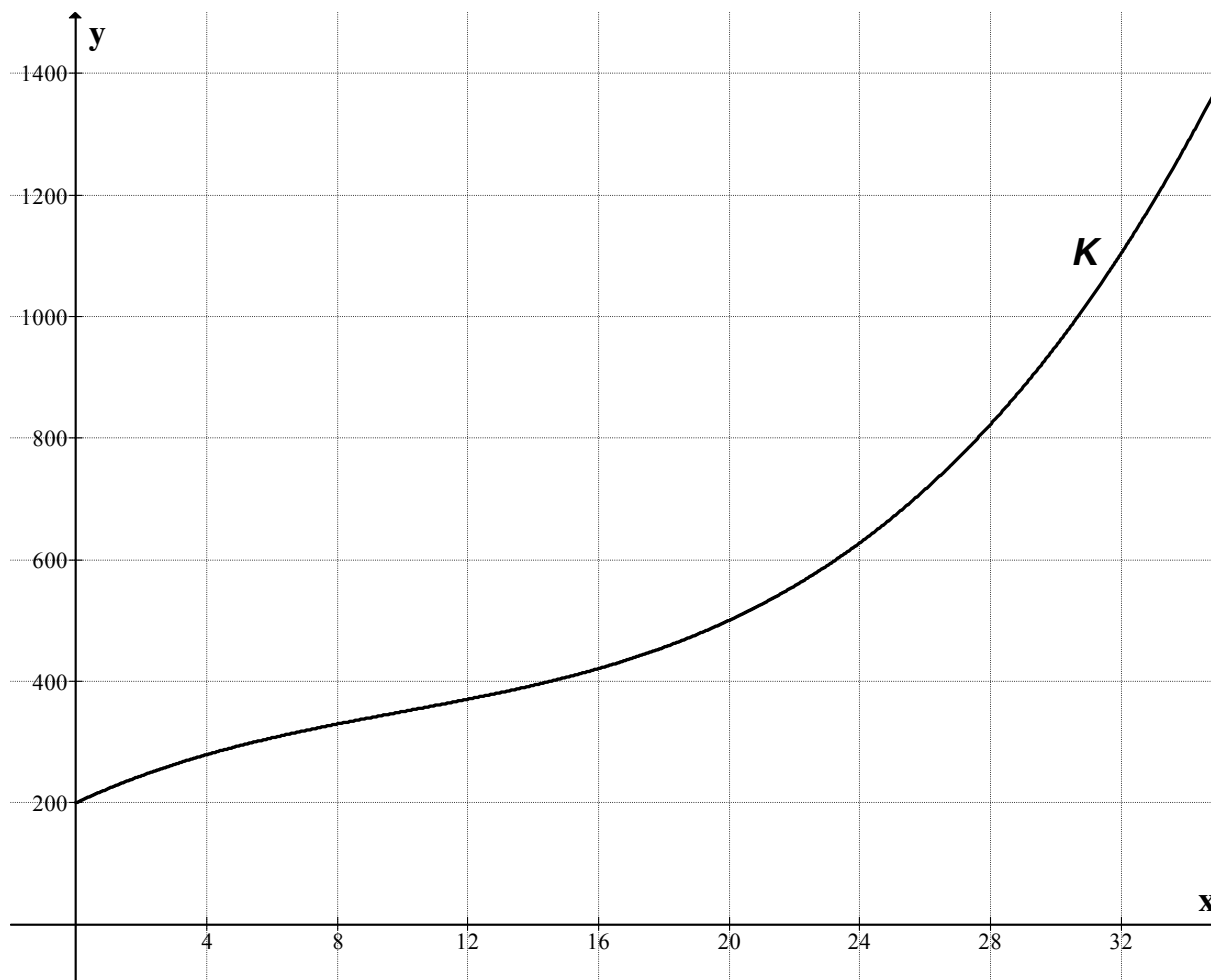
Der Graph der Funktion K ist in Anlage 2 dargestellt.

Begründen Sie, warum ein (konstanter) Mindestpreis von 25 € pro Stück nicht unterschritten werden darf, da sonst nur mit Verlust produziert werden kann. **15 P**

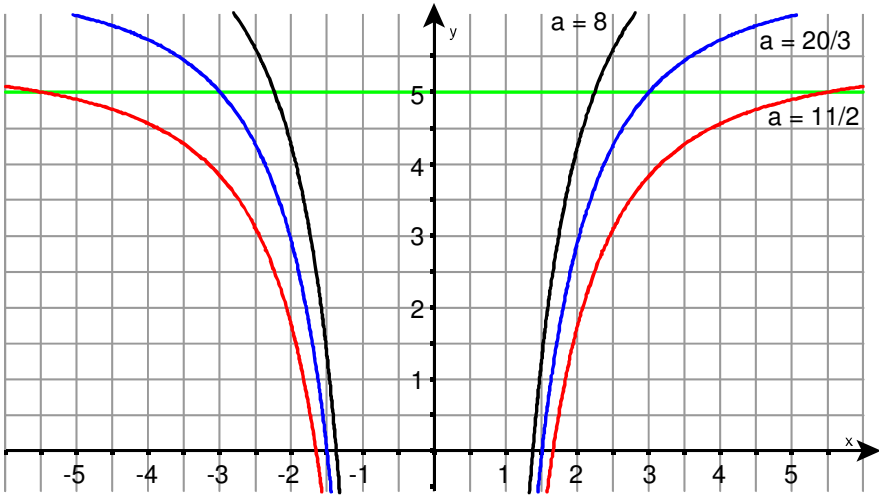
Anlage 1 zur Aufgabe „Pflanzschale“, Aufgabenteil a).



Anlage 2 zur Aufgabe „Pflanzschale“, Aufgabenteil g).



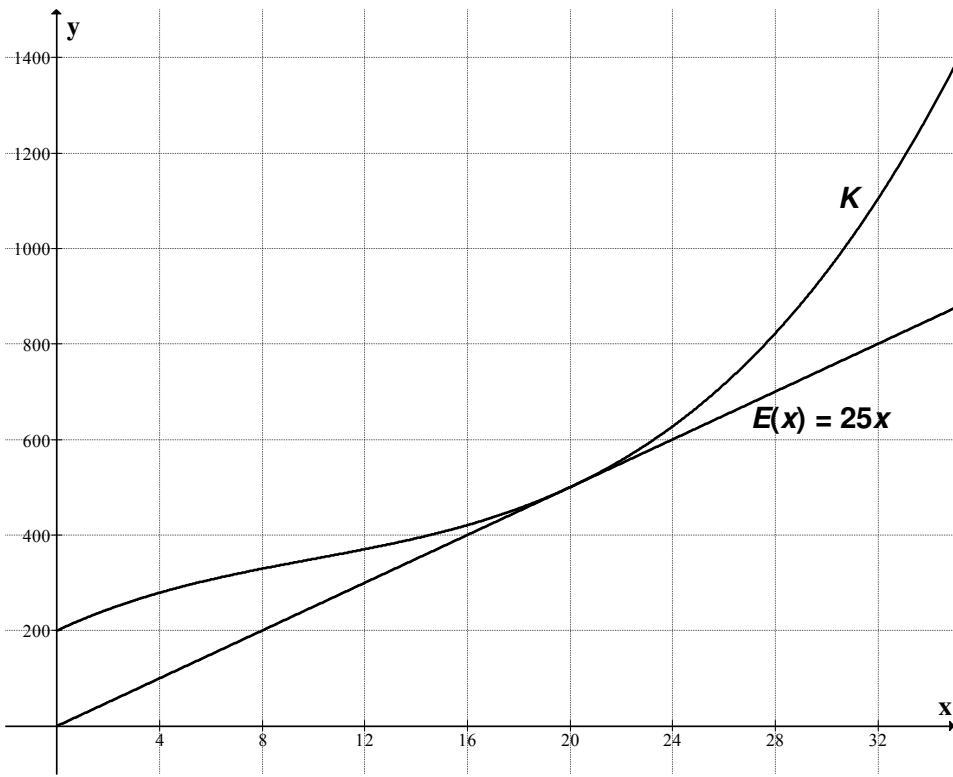
Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Die Funktionen f_a sind offenbar alle symmetrisch zur y-Achse. Diese Achse muss also in der Mitte eingezeichnet werden. Der Abstand zwischen den beiden waagerechten Linien ist 5. Eine Einheit entspricht also zwei Markierungsabschnitten (Gitterabständen). Die Lage der x-Achse unten bei $y = 0$ und des Nullpunktes auf der x-Achse sind klar. Wegen der Maßstabstreue entspricht eine Einheit auf der x-Achse ebenfalls zwei Gitterabständen.</p> <p>Für $a = \frac{20}{3}$ hat die zugehörige Funktion $f_{\frac{20}{3}}$ mit $f_{\frac{20}{3}}(x) = \frac{20}{3} - \frac{15}{x^2}$ die Nullstellen $\pm \frac{3}{2}$. Aus diesem Ergebnis folgt, dass $a = \frac{20}{3}$ zum mittleren der drei Graphen gehört.</p> <p>Veränderung von a bewirkt eine Verschiebung „nach oben oder unten“. Dem größten a ($= 8$) entspricht also der oberste – hier auch der innerste – Graph. Entsprechend gehört zu $a = 5,5$ der unterste, also der äußere Graph.</p> <p><i>Andere Begründungen sind möglich.</i></p> 	10	5	
b)	<p>Wenn der Durchmesser am oberen Rand 4 ist, muss gelten:</p> $f_a(2) = 5 \Leftrightarrow a - \frac{15}{4} = 5 \Leftrightarrow a = \frac{35}{4} = 8,75.$	10		
c)	<p>Bestimmt man den Radius des kreisförmigen oberen Randes in Abhängigkeit von a, muss man die Gleichung $f_a(r) = 5$ lösen, also die quadratische Gleichung $a - \frac{15}{r^2} = 5$. Man erhält die positive Lösung $r = \sqrt{\frac{15}{a-5}}$. Diese Gleichung hat nur für $a > 5$ reelle Lösungen.</p> <p><i>Alternative Lösung:</i> Inhaltlich bedeutet $a \leq 5$, dass die Gerade $y = 5$ entweder Asymptote oder sogar oberhalb der Asymptoten des Graphen (Hyperbel) von f_a liegt, d.h. der Graph erreicht die vorgegebene Höhe gar nicht.</p>		10	

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	<p>Das Volumen eines Kegels beträgt $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$.</p> <p>Als Radius des Innenkegels muss der Radius des oberen Randes verwendet werden. Und für die Höhe gilt: $h = 5 - y_0$, wobei y_0 der y-Achsenabschnitt einer/beider Tangenten ist.</p> <p>Der Radius des oberen Randes wird bestimmt durch die Schnittpunkte zwischen der Geraden $y = 5$ und dem Graphen von f_7.</p> $f_7(x) = 5 \Leftrightarrow 7 - \frac{15}{x^2} = 5 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{15}{7-5}} = \pm \sqrt{7,5}.$ <p>Die Gleichung der Tangente durch den rechten Randpunkt lautet:</p> $t(x) = 5 + f_7'(\sqrt{7,5}) \cdot (x - \sqrt{7,5}).$ <p><i>Bemerkung:</i> Man hätte aus Symmetriegründen natürlich auch den linken Randpunkt verwenden können.</p> <p>Es gilt:</p> $f_7'(x) = \frac{30}{x^3}$ $f_7'(\sqrt{7,5}) = \frac{30}{7,5 \cdot \sqrt{7,5}}$ $f_7'(\sqrt{7,5}) = \frac{4}{\sqrt{7,5}}$ <p>Durch Einsetzen erhält man:</p> $t(x) = 5 + \frac{4}{\sqrt{7,5}} \cdot (x - \sqrt{7,5}) = 5 + \frac{4}{\sqrt{7,5}} \cdot x - 4 = \frac{4}{\sqrt{7,5}} \cdot x + 1.$ <p>Von dieser Geraden interessiert nur der y-Achsenabschnitt, d.h. das Absolutglied 1. Dieses bestimmt durch $h = 5 - 1 = 4$ direkt die Höhe des gesuchten Innenkegels.</p> <p>Damit sind alle Maße des zu berechnenden Kegels bestimmt.</p> $V = \frac{1}{3} \pi \cdot (\sqrt{7,5})^2 \cdot 4 = 10\pi \approx 31,4.$ <p><i>Hinweis:</i> Dieses Ergebnis ist sogar unabhängig von a für $5 < a < 7,5$. Man erhält stets ca. 31 Liter für das Innenvolumen.</p>			
e)	<p>Für die Ableitung von G erhält man unter Berücksichtigung der Kettenregel:</p> $G'(x) = -\frac{1}{7-x} \cdot (-1) = \frac{1}{7-x}.$ Genau das war zu zeigen.			15

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Somit gilt:</p> $15\pi \int_0^5 \frac{1}{7-x} dx = 15\pi [-\ln(7-x)]_0^5 = 15\pi (-\ln(2) + \ln(7)) \approx 59.$ <p>31 Liter ist ungefähr die Hälfte von 59 Liter, d.h. durch das massive Glasunterteil wird das Volumen etwa auf die Hälfte reduziert.</p>			
f)	<p>Wenn a zu groß wird, dann wird die Tangente so steil, dass der y-Achsenabschnitt y_0 negativ wird, d.h. die Höhe des Innenkegels wird größer als 5. Dies bedeutet, dass die Schale unten ein kreisförmiges Loch bekommt und der innere Hohlraum zu einem Kegelstumpf wird.</p> <p>Das ergibt sich aus der Rechnung von d), ist aber auch qualitativ erkennbar an den Zeichnungen auf der Anlage, insbesondere für $a = 8$. <i>Auch für eine derartige Lösung ist die volle Punktzahl zu erteilen.</i></p>			10
g)	<p><u>1. Lösungsvariante</u> (zeichnerische Lösung):</p> <p>Der Mindestpreis von 25 € pro Stück soll bestätigt werden. Zu zeigen ist, dass der Graph der Erlösfunktion E mit $E(x) = 25x$ Tangente des Graphen der Kostenfunktion K ist.</p>  <p>Offensichtlich berühren sich die beiden Graphen an der Stelle $x = 20$.</p> $E(20) = 25 \cdot 20 = 500.$ $K(20) = 0,05 \cdot 20^3 - 1,5 \cdot 20^2 + 25 \cdot 20 + 200 = 500.$			5 10

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Produktionskosten und Erlös sind an der Stelle $x = 20$ gleich.</p> <p>Bei einer Produktions- und Absatzmenge von 20 Stück (pro Tag) deckt ein Mindestpreis von 25 € pro Stück gerade die Produktionskosten.</p> <p><u>2. Lösungsvariante</u> (über die Berechnung des Stückkostenminimums):</p> $K(x) = 0,05x^3 - 1,5x^2 + 25x + 200, \quad x > 0.$ $k(x) = \frac{0,05x^3 - 1,5x^2 + 25x + 200}{x} = 0,05x^2 - 1,5x + 25 + \frac{200}{x}.$ $k'(x) = 0: \quad 0,1x - 1,5 - \frac{200}{x^2} = 0$ $0,1x^3 - 1,5x^2 - 200 = 0$ $x^3 - 15x^2 - 2000 = 0$ $(x - 20)(x^2 + 5x + 100) = 0$ <p>Diese Gleichung hat genau eine reelle Lösung, nämlich $x = 20$.</p> $k''(x) = 0,1 + \frac{400}{x^3} > 0 \text{ für alle } x > 0.$ <p>Stückkosten $k(20) = 20 - 30 + 25 + 10 = 25$.</p> <p>Bei einer Produktions- und Absatzmenge von 20 Stück deckt erst ein Mindestpreis von 25 € pro Stück gerade die Gesamtkosten pro Stück..</p>			
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

ANALYSIS 2

I.2 Medikation

Nach Einnahme eines Medikamentes kann man dessen Konzentration im Blut eines Patienten messen. Für die ersten 6 Stunden beschreibt die Funktion f mit der Gleichung $f(t) = 10t \cdot e^{-0,5t}$ die im Blut vorhandene Menge des Medikamentes in Milligramm pro Liter in Abhängigkeit von der Zeit t . Nach 6 Stunden erfolgt der Abbau näherungsweise linear (siehe Anlage).

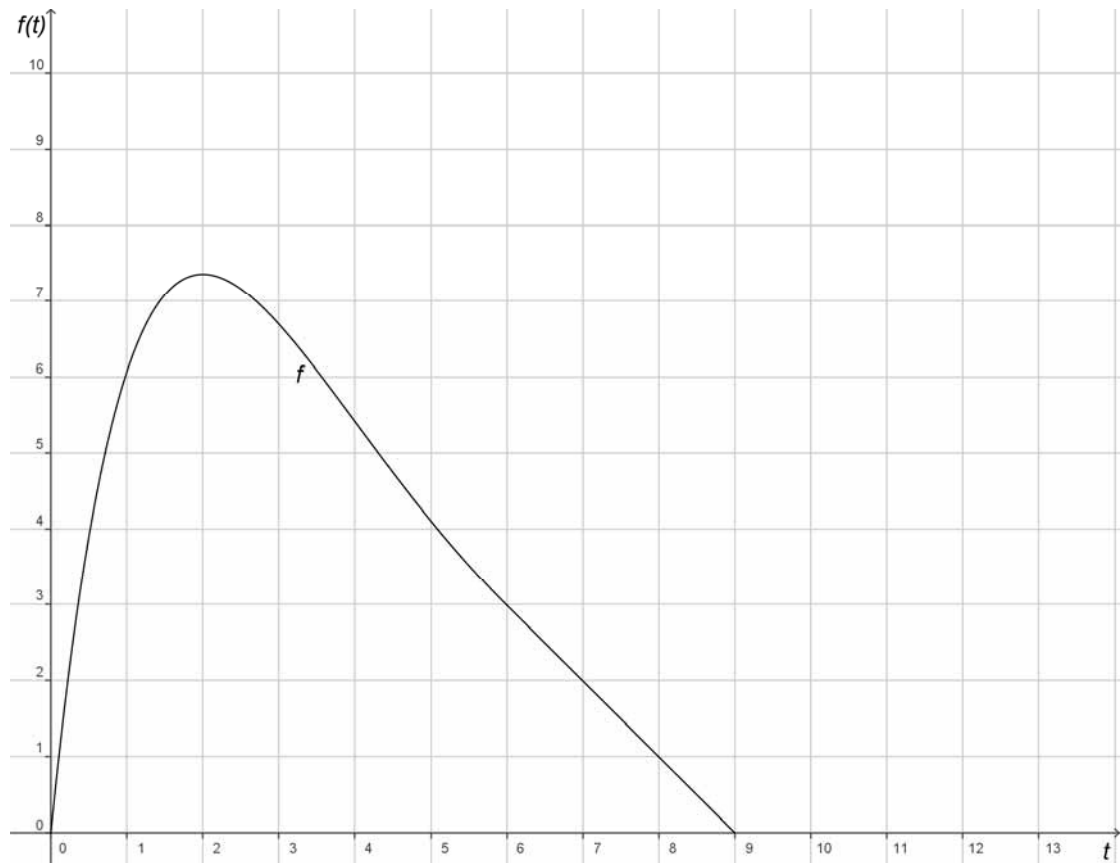


- a) Berechnen Sie die maximale Konzentration im Blut und den Zeitpunkt, zu dem sie vorhanden ist. **20 P**
- b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am stärksten abgebaut wird. **10 P**
- c) Der lineare Abbau nach 6 Stunden wird näherungsweise durch die Tangente k am Graphen von f im Punkt $(6 | f(6))$ beschrieben. Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangente und damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament unter dieser Annahme vollständig abgebaut ist. **15 P**
- d) Beschreiben Sie, wie Sie die mittlere Konzentration des Medikamentes bis zum vollständigen Abbau berechnen würden. Bestimmen Sie eine grobe Abschätzung dieser mittleren Konzentration, z. B. mithilfe der Grafik in der Anlage. **15 P**
- e) Ein Patient nimmt das Medikament 4 Stunden nach der ersten Einnahme in gleicher Dosierung ein weiteres Mal ein. Nehmen Sie in einem vereinfachenden Modell an, dass sich die Konzentrationen im Blut dieses Patienten addieren und dass der Abbau (und damit auch der Übergang in die „lineare Zone“) für beide Medikationen unabhängig voneinander erfolgt. Skizzieren Sie zur Grafik in der Anlage die Darstellung der Gesamtkonzentration bis zum vollständigen Abbau nach dem eben beschriebenen Modell. **15 P**
- f) Ein Patient muss mit starken Nebenwirkungen rechnen, wenn die Konzentration des Medikamentes im Blut 10 Milligramm pro Liter übersteigt. Entscheiden Sie, ob der Patient aus Aufgabenteil e) gefährdet ist. **10 P**

Um das Medikament in seiner Wirksamkeit zu verbessern, verändert der Hersteller seine Zusammensetzung. Die Konzentration des Medikamentes im Blut wird wieder durch eine Funktion der Form $g(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben. t ist wiederum die Zeit in Stunden nach der Einnahme und $g(t)$ wird in der Einheit $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ (Milligramm pro Liter) gemessen.

- g) Bestimmen Sie die Konstanten a und b , wenn die Konzentration genau vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert von $10 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ erreichen soll. **15 P**

Anlage zur Aufgabe „Medikation“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Die höchste Konzentration im Blut ist an der Stelle, an der der Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(t) = 10t \cdot e^{-0,5t}$ einen Hochpunkt hat. Es muss also gelten: $f'(t) = 0$ mit $f'(t) = 10e^{-0,5t} - 5t \cdot e^{-0,5t}$. Somit erhält man $t = 2$. Dem Verlauf des Graphen in der Anlage ist zu entnehmen, dass dies nur ein Maximum sein kann.</p> $f(2) = 10 \cdot 2 \cdot e^{-0,5 \cdot 2} \approx 7,36.$ <p>Die höchste Konzentration ist also nach 2 Stunden vorhanden und beträgt 7,36 Milligramm pro Liter.</p>	20		
b)	<p>Der stärkste Abbau entspricht der betragsmäßig größten Steigung nach dem Maximum des Graphen der Funktion f. Sie wird im Wendepunkt von f angenommen. Also muss gelten: $f''(t) = 0$ mit $f''(t) = -10e^{-0,5t} + 2,5t \cdot e^{-0,5t}$. Damit ergibt sich $t = 4$. Das Medikament wird nach vier Stunden am stärksten abgebaut.</p>		10	
c)	<p>Der lineare Verlauf wird durch die Geradengleichung $k(t) = f(6) + f'(6) \cdot (t - 6)$ beschrieben.</p> <p>Es gilt: $f'(t) = (10 - 5t) \cdot e^{-0,5t}$.</p> <p>Einsetzen ergibt:</p> $\begin{aligned} k(t) &= 60 \cdot e^{-3} - 20 \cdot e^{-3} \cdot (t - 6) \\ &= 180 \cdot e^{-3} - 20t \cdot e^{-3} \\ &= -20 \cdot e^{-3} \cdot (t - 9). \end{aligned}$ <p>Die Nullstelle von k liegt also bei 9, d. h. dass das Medikament nach 9 Stunden vollständig abgebaut ist.</p>			15
d)	<p>Die mittlere Konzentration des Medikamentes berechnet man folgendermaßen: $\frac{1}{9} \cdot \int_0^9 f(t) dt$. Eine grobe Abschätzung erhält man z. B. durch Auszählen einerseits der Anzahl n der Kästchen, die ganz in der zugehörigen Fläche liegen, und andererseits der Anzahl m der Kästchen, die von 0 bis 9 vom Graphen geschnitten werden. Man bekommt: $n = 27$ und $m = 19$.</p> <p>Der gesuchte Mittelwert lässt sich damit grob abschätzen durch</p> $\left(n + \frac{m}{2}\right) : 9 = \left(27 + \frac{19}{2}\right) : 9 = 4,055\dots$ <p>Die Abschätzung sollte zwischen 3,5 Milligramm pro Liter und 4,5 Milligramm pro Liter liegen.</p>		10	5

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

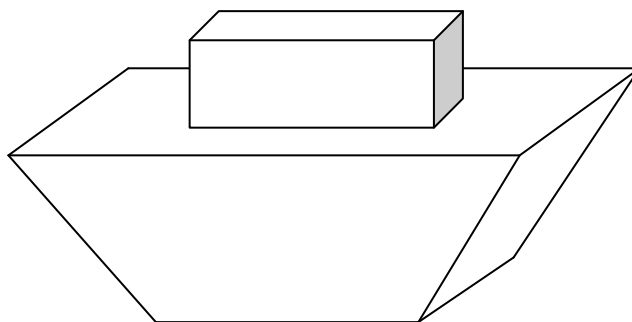
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	<p><i>Bemerkung zur grafischen Darstellung: Eine genaue Darstellung der „Überlagerungsfunktion“ ist etwas diffizil, da ja mehrere Definitionsintervalle in Fallunterscheidungen zu betrachten sind, je nachdem bei welcher Funktion der exponentielle oder der lineare Teil wirkt. Das wird nicht erwartet (wenn auch in der obigen Musterskizze geschehen). Wichtig ist die Struktur des Graphen und dass es einen relevanten Zeitraum gibt, in dem die 10-mg/l-Grenze überschritten wird.</i></p>		15	
f)	<p>Da die Konzentration zeitweilig die Grenze von 10 Milligramm pro Liter übersteigt, muss der Patient mit starken Nebenwirkungen rechnen.</p> <p>Zur Begründung könnte man</p> <ul style="list-style-type: none"> - entweder am Graphen argumentieren - oder zeigen, dass z. B. bei $t = 6$ der Wert $f(t) + f(t - 4) \approx 10,34$ über 10 liegt (die linearen Teile kommen hier noch nicht ins Spiel) - oder argumentieren, dass das Maximum rechts von $t = 4$ liegen muss, dass also die Funktion $f(t) + f(t - 4)$ betrachtet werden muss, die ihre Extremstelle bei $t = \frac{2(3e^2 + 1)}{e^2 + 1} \approx 5,52$ hat mit dem Maximalwert von ungefähr 10,60 (auch hier kommen die linearen Teile noch nicht ins Spiel). 		10	

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
g)	$g(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt}$ $g'(t) = a \cdot e^{-bt} - abt \cdot e^{-bt}$ <p>Da die Konzentration bei $t = 4$ am größten sein soll, gilt: $g'(4) = 0$.</p> $0 = a \cdot e^{-4b} - 4ab \cdot e^{-4b}$ $a = 4ab \quad : a (a \neq 0)$ $b = \frac{1}{4}$ <p>Einsetzen in $g(4) = 4a \cdot e^{-4b}$ mit $g(4) = 10$ ergibt: $a = 2,5e = 6,7957\dots$</p> <p>Also gilt: $a \approx 6,80$ und $b = 0,25$.</p>			15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

II.1 Abenteuerspielplatz

Der Gemeinderat beschließt, einen eher langweiligen Spielplatz zu einem Abenteuerspielplatz umzugestalten. Das Motto lautet „Auf hoher See“. Daher soll ein Piratenschiff inmitten des Geländes die neue Attraktion werden.



In einem kartesischen Koordinatensystem lässt sich die Grundfläche des Schiffes beschreiben durch die Eckpunkte

$$A_1(0 \mid 0 \mid 0), B_1(3 \mid 0 \mid 0), C_1(3 \mid 5 \mid 0), D_1(0 \mid 5 \mid 0)$$

und das Deck durch die Eckpunkte

$$A_2(0 \mid -1 \mid 2), B_2(3 \mid -1 \mid 2), C_2(3 \mid 6 \mid 2), D_2(0 \mid 6 \mid 2).$$

Die Koordinaten sind zugleich als Längenangaben in Metern zu lesen.

Auf dem Deck wird ein quaderförmiger, oben offener Aufbau – genannt Kommandobrücke – errichtet, der an allen Seiten 1 m Abstand zum Rand des Decks hat und 0,75 m hoch ist.

Die aus Sicherheitsgründen notwendige Reling rund um das Deck wird in dieser Aufgabe vernachlässigt.

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Piratenschiffes in das Koordinatensystem in der Anlage.

Geben Sie dort die Koordinaten der oberen Ecken des Aufbaus an.

15 P

Von den alten Spielgeräten gibt es auf dem Spielplatz Betonfundamente in den Punkten $G(6 \mid 11 \mid 0)$ und $H(-3 \mid 8 \mid -1)$.

Von G zu C_2 und von H zu D_2 sollen Kletterstangen angebracht werden, die das Entern des Piratenschiffes ermöglichen und damit den Spielwert erhöhen.

b) Berechnen Sie die Länge der beiden Kletterstangen.

10 P

Da kleine Kinder es nicht schaffen, an den Stangen an Deck zu klettern, treten die Eltern an den Gemeinderat heran und fordern, dass zwischen den beiden Stangen eine ebene Holzwand mit Grifflöchern so angebracht wird, dass die beiden Stangen die Begrenzung der Holzwand bilden.

c) Begründen Sie, warum der Wunsch der Eltern schon allein aus mathematisch-geometrischen Gründen nicht erfüllt werden kann.

15 P

Der Gemeinderat bietet den Eltern an, zwischen den Kletterstangen ein Netz mit den Ecken C_2 , D_2 , G und H spannen zu lassen.

- d) Der Flächeninhalt des gespannten Netzes lässt sich näherungsweise durch die Summe der Flächeninhalte der beiden Dreiecke GC_2H und HC_2D_2 bestimmen. Für das Dreieck HC_2D_2 wurde bereits ein Flächeninhalt von etwa $5,4 \text{ m}^2$ ermittelt. Zeigen Sie, dass der zu erwartende Materialverbrauch für das Netz etwa 27 m^2 beträgt. **10 P**

Durch den Rumpf des Schiffes werden aus großen Kunststoffröhren zwei Klettertunnel T_1 und T_2 gebaut.

Zunächst werden die Mitten der Röhren als Teile von Geraden dargestellt (ohne Beachtung des Durchmessers der Röhren).

Der Tunnel T_1 beginnt in $P(3 \mid 2,5 \mid 0,5)$ und endet in $Q(0 \mid 2,5 \mid 0,5)$.

Der Tunnel T_2 ist Teil der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 5,25 \\ 0,5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -6,5 \\ 3 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}.$

- e) Beschreiben Sie unter Berücksichtigung der folgenden Punkte, wie die beiden Klettertunnel das Piratenschiff „durchtunneln“:

- Weisen Sie nach, dass die beiden „Tunnel-Geraden“ sich nicht schneiden.
- Zeigen Sie, dass der Tunnel T_2 im Boden der Kommandobrücke endet.
- Ermitteln Sie, ob für den Tunnel T_2 die maximal zulässige Steigung von 30° gegenüber der Schiffsbodenebene nicht überschritten wird. **30 P**

- f) Die Tunnelröhren werden in verschiedenen Durchmessern angeboten. Beschreiben Sie ohne Rechnung, wie der maximale Durchmesser ermittelt werden kann. **10 P**

- g) Die Tunnelröhren sollen mit einem Durchmesser von 1 m eingebaut werden. Die Eltern beschließen, für die Einstiegsluke und die Ausstiegsluke jeweils einen Deckel anfertigen zu lassen. Dazu bestellen sie vier kreisförmige Holzdeckel mit dem Durchmesser von jeweils 1 m. Beurteilen Sie das Vorhaben. **10 P**

Anlage zur Aufgabe „Abenteuerspielplatz“

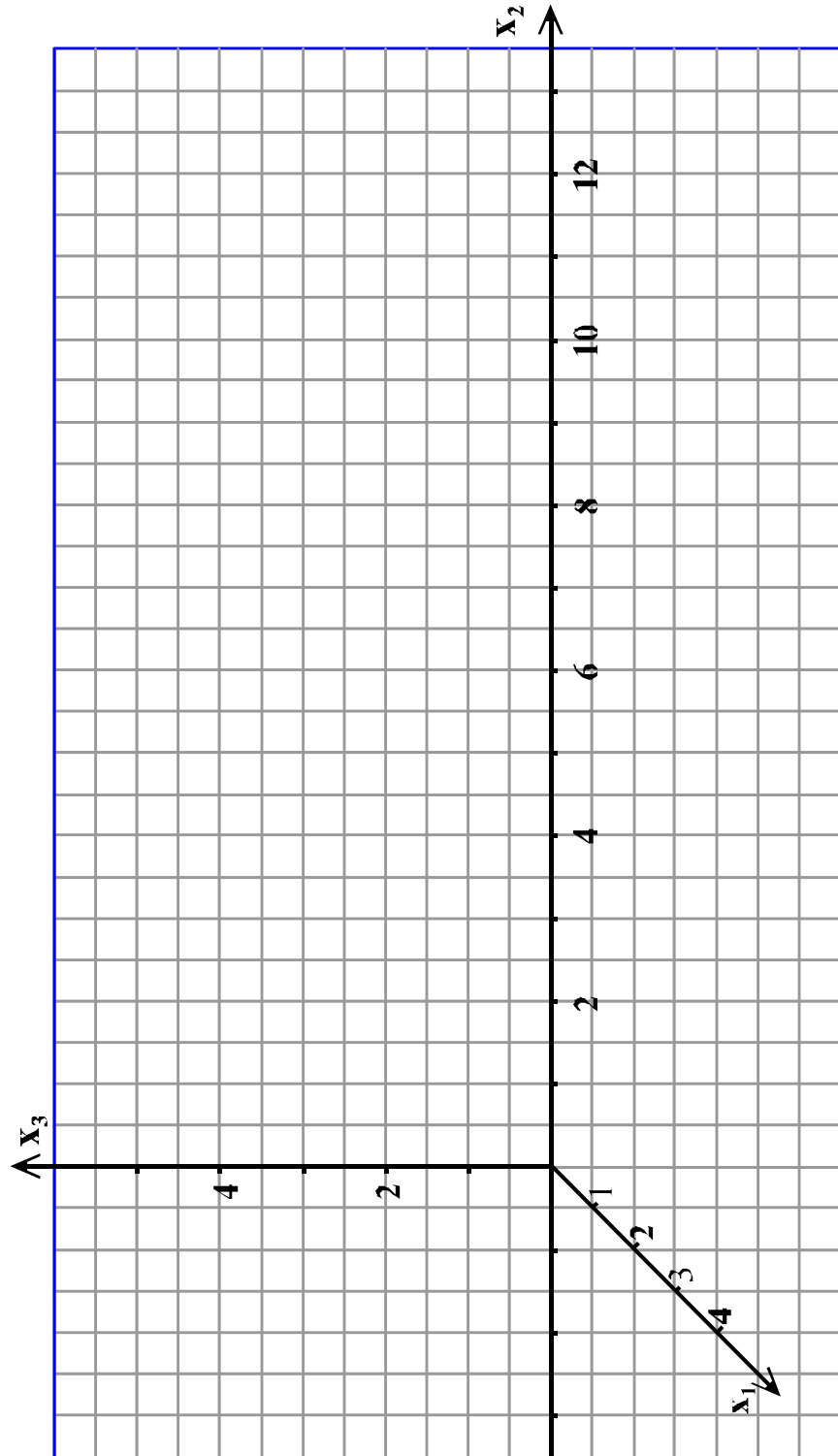
Code Nr: _____

$$A_1(0|0|0), \quad B_1(3|0|0), \quad C_1(3|5|0), \quad D_1(0|5|0)$$

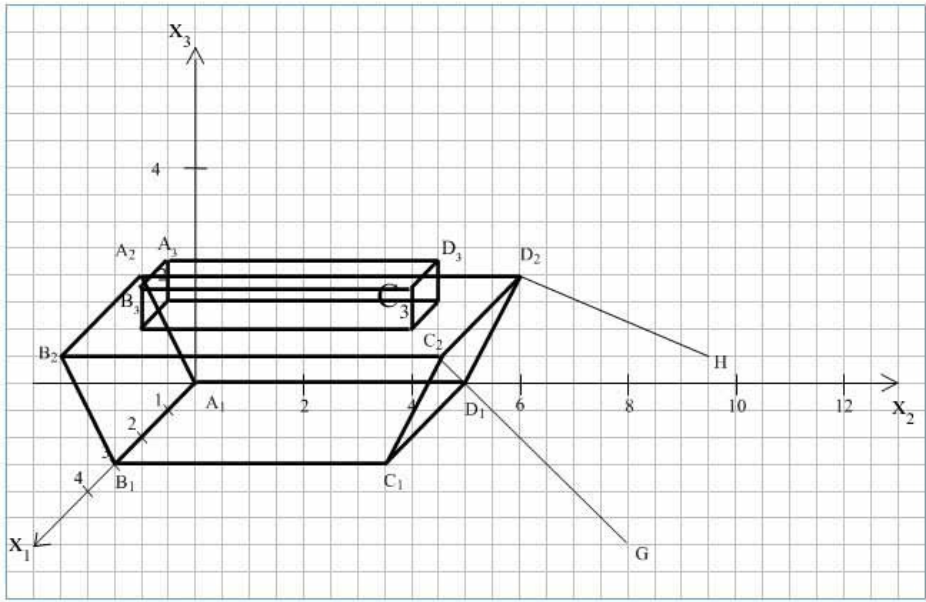
$$A_2(0|-1|2), \quad B_2(3|-1|2), \quad C_2(3|6|2), \quad D_2(0|6|2)$$

$$A_3(| |), \quad B_3(| |), \quad C_3(| |), \quad D_3(| |)$$

Auf allen Koordinatenachsen soll gelten: 1 LE entspricht 1 m



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
<p>a) Die Koordinaten lassen sich direkt den Angaben in der Aufgabenstellung entnehmen: $A_3(1 0 2,75)$, $B_3(2 0 2,75)$, $C_3(2 5 2,75)$, $D_3(1 5 2,75)$.</p>				
<p>Das Einzeichnen der Kletterstangen ist nicht Bestandteil der Aufgabenstellung und deshalb zum Erreichen der vollen Punktzahl nicht notwendig.</p>		15		
<p>b) Die Länge der Stange zwischen G und C_2 entspricht der Länge des Vektors $\overrightarrow{GC_2}$, Entsprechendes gilt für die Länge der Stange zwischen H und D_2.</p> $ \overrightarrow{GC_2} = \sqrt{(3-6)^2 + (6-11)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{38} \approx 6,16.$ <p>Die Länge der Stange zwischen G und C_2 beträgt ungefähr 6,20 m.</p> $ \overrightarrow{HD_2} = \sqrt{(0-(-3))^2 + (6-8)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{22} \approx 4,70.$ <p>Die Länge der Stange zwischen H und D_2 beträgt ungefähr 4,70 m.</p>		10		
<p>c) Um zu zeigen, dass der Wunsch der Eltern nicht erfüllt werden kann, ist zu zeigen, dass die vier Punkte C_2, D_2, G und H <u>nicht</u> in einer Ebene liegen.</p> <p>Um dies zu überprüfen, stellt man die Gleichung einer Ebene auf, in der drei der gegebenen Punkte liegen, und überprüft, ob der vierte Punkt ebenfalls auf dieser Ebene liegt. Dies sei hier exemplarisch für die Ebene, die durch die Punkte C_2, D_2 und G aufgespannt wird, gezeigt.</p> <p>Eine Gleichung der Ebene lautet:</p> $E: \vec{x} = \overrightarrow{OC_2} + r \cdot \overrightarrow{C_2D_2} + s \cdot \overrightarrow{C_2G}, \quad r, s \in \mathbb{R}.$				

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R}$ <p>Nun ist noch zu zeigen, dass H nicht auf dieser Ebene liegt:</p> $\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R}$ <p>führt zu einem leicht lösbaeren Gleichungssystem, in dem es ausreicht, die beiden letzten Zeilen zu untersuchen:</p> $(II) \quad 8 = 6 + 5s \quad \rightarrow \quad (II) \quad s = 0,4$ $(III) \quad -1 = 2 - 2s \quad \rightarrow \quad (III) \quad s = 1,5$ <p>Dies führt zu einem Widerspruch, der Punkt H liegt also nicht in der Ebene E. Es ist somit nicht möglich, eine ebene Holzwand zwischen den beiden Stangen anzubringen.</p> <p><i>Alternativ kann auch gezeigt werden, dass die Gerade durch G und C_2 und die Gerade durch H und D_2 windschief sind.</i></p>		15	
d)	<p>Der Flächeninhalt des Dreiecks GHC_2 ist zu bestimmen. Eine Möglichkeit ist die Verwendung der Formel $A_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$, wobei γ der von a und b eingeschlossene Winkel ist.</p> <p>Es sei a die Länge der Strecke \overline{GH}, also $a = GH$, und $b = GC_2$. Dann gilt</p> $ GH = \sqrt{(-3-6)^2 + (8-11)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{91}.$ <p>Die Länge GC_2 ist in Aufgabe b) mit $\sqrt{38}$ ermittelt worden.</p> <p>Zu bestimmen ist noch die Größe des eingeschlossenen Winkels $\gamma = \sphericalangle HGC_2$:</p> $\cos \gamma = \frac{\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GC_2}}{ \overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GC_2} } = \frac{\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{91} \cdot \sqrt{38}} = \frac{40}{\sqrt{91} \cdot \sqrt{38}} = 0,680\dots$ $\gamma = 47,139\dots$ <p>Mit Hilfe dieser Angaben lässt sich nun die Fläche des Dreiecks GHC_2 bestimmen:</p>			

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$A_{\Delta GHC_2} = \frac{1}{2} \cdot GH \cdot GC_2 \cdot \sin \sphericalangle HGC_2 $ $= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{91} \cdot \sqrt{38} \cdot \sin 47,139^\circ$ $\approx 21,55\dots$ <p>Zusammen mit dem (bekannten) Flächeninhalt des zweiten Dreiecks werden ca. $21,6 \text{ m}^2 + 5,4 \text{ m}^2 = 27 \text{ m}^2$ Material benötigt.</p> <p><i>Es gibt noch weitere Möglichkeiten, den Flächeninhalt näherungsweise zu bestimmen, die ebenfalls zur vollen Punktzahl führen können.</i></p>		10	
e)	<ul style="list-style-type: none"> Um nachzuweisen, dass die beiden Geraden sich nicht schneiden, muss man zunächst eine Gleichung der Geraden h durch die Punkte P und Q aufstellen: $h: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + s \cdot \overrightarrow{QP}, \quad s \in \mathbb{R},$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$ <p>Nun setzt man die Gleichungen der beiden Geraden gleich und erhält ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Variablen:</p> $3s = 1,5$ $6,5r = 2,75$ $3r = 0$ <p>Die beiden letzten Zeilen dieses Gleichungssystems widersprechen sich. Die zweite Zeile ergibt $r = -\frac{11}{26}$, die dritte hingegen $r = 0$. Die Geraden haben also keinen gemeinsamen Punkt.</p> <ul style="list-style-type: none"> Um zu zeigen, dass der zweite Tunnel im Boden der Kommandobrücke endet, ist einerseits der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene, die durch das Deck beschrieben wird, zu berechnen. Zum anderen muss überprüft werden, ob dieser Schnittpunkt innerhalb des vorgegebenen Rechtecks der Kommandobrücke liegt. <p>Die Deckebene ist parallel zur x_1x_2-Ebene und liegt bei $x_3 = 2$. Die Ebenengleichung lässt sich beispielsweise folgendermaßen darstellen:</p> $E_{\text{Deck}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2 \end{pmatrix}.$ <p>Durch Gleichsetzen mit der Gleichung der Geraden g erhält man folgendes Gleichungssystem:</p>		10	

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$x_1 = 1,5$ $x_2 = 5,25 - 6,5r$ $2 = 0,5 + 3r$ <p>Aus der ersten Zeilen folgt direkt $x_1 = 1,5$. Mit Hilfe der dritten Zeile erhält man $r = 0,5$. Eingesetzt in die zweite Zeile ergibt sich $x_2 = 5,25 - 0,5 \cdot 6,5$, also $x_2 = 2$.</p> <p>$S(1,5 2 2)$ ist somit der Schnittpunkt der Geraden mit der „Deck“-Ebene. Da dieser Punkt in x_3-Richtung auf der Höhe der Ebene liegt, in x_1-Richtung genau in der Mitte des Piratenschiffes und in x_2-Richtung 3 m vom linken Rand des Decks entfernt liegt, endet der Tunnel innerhalb der Kommandobrücke.</p> <ul style="list-style-type: none"> Der Neigungswinkel des zweiten Tunnels gegenüber der Schiffsbodenebene lässt sich mit Hilfe des Tangens berechnen. Dies ist möglich, da die x_1-Koordinate des Richtungsvektors Null ist. $\tan \alpha = \frac{3}{6,5} \rightarrow \alpha \approx 24,8^\circ.$ <p>Da die zulässige Steigung maximal 30° betragen soll und $24,8^\circ < 30^\circ$ ist, ist die 30°-Bedingung erfüllt.</p> <p><i>Eine Lösung mit Hilfe des Normalenvektors ist auch möglich und zum Erreichen der vollen Punktzahl ausreichend.</i></p>		10	10
f)	<p>Um den maximalen Durchmesser zu ermitteln, muss man den Abstand zwischen den beiden Geraden g und h ermitteln. Der Röhrendurchmesser inklusive der doppelten Dicke des Materials, aus dem die Röhren hergestellt sind, darf diesen Wert nicht überschreiten.</p> <p>Unter der Annahme zweier gleich dicker Röhren ist der maximale Radius r_{\max} die Hälfte des minimalen Abstandes d_{\min}, also $r_{\max} = 0,5 \cdot d_{\min}$.</p> <p>Der maximale Durchmesser der Röhren ist dann doppelt so groß, entspricht also dem minimalen Abstand.</p>		10	
g)	<p>Die Querschnitte der zylindrischen Tunnel sind Kreisflächen. Die Tunnel müssten senkrecht zu den „Austrittsflächen“ des Schiffes verlaufen, dann wären die Austrittsöffnungen“ der Tunnel kreisförmig. Dies gilt aber nicht für beide Tunnel. Wegen des in Teilaufgabe e) berechneten Neigungswinkels von g_2 gegen die Schiffsbodenebene, also auch Ebene der Kommandobrücke, liegt bei dieser Austrittsöffnung eine elliptische Form vor. Mit den bestellten kreisförmigen Holzdeckeln wird man nicht alle Öffnungen der Tunnel verschließen können.</p>			10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

II.2 Schwarzwild

Das Schwarzwild ist in vielen Teilen Europas seit geraumer Zeit auf dem Vormarsch und es häufen sich landwirtschaftliche Schäden. Verursacht wird dieses enorme Wachstum durch die hohe Fortpflanzungsleistung dieser Art. Unter günstigen Bedingungen, d. h. bei gutem Futterangebot, gebären beim Schwarzwild bereits die Frischlinge (Wildschweine im ersten Lebensjahr) zu einem hohen Anteil. Zusätzlich verringert sich ihre Sterblichkeit über die Wintermonate, und auch die Fruchtbarkeit der reifen Bachen (weibliche Wildschweine, älter als zwei Jahre) steigt. An diesem Punkt kommt der Mensch ins Spiel: Vor allem durch die Landwirtschaft, aber auch durch falsche Fütterung, werden ungewollt Nahrungsquellen für das Schwarzwild verfügbar gemacht. Damit kommt es zwangsläufig zu einem dramatischen Anwachsen der Bestände.



In dieser Aufgabe werden nur weibliche Wildschweine betrachtet. Diese werden in drei Altersklassen eingeteilt.

F: Frischlinge (höchstens ein Jahr alt)

U: Überläuferbachen (älter als ein Jahr bis maximal zwei Jahre alt)

B: reife Bachen (älter als zwei Jahre)

Eine Population weiblicher Wildschweine wird durch einen Populationsvektor $\begin{pmatrix} F \\ U \\ B \end{pmatrix}$ beschrieben.

a) Für eine Population gilt:

Die jährliche Geburtenrate bei Frischlingen beträgt 0,13, bei Überläuferbachen 0,56 und bei reifen Bachen 1,64.

Von den Frischlingen überleben jährlich 25 %, von den Überläuferbachen 56 % und von den reifen Bachen 58 %.

Stellen Sie in einem Übergangsgraphen die Entwicklung dieser Population dar.

10 P

b) Entscheiden Sie, welche der Matrizen *A*, *B*, *C* die in a) dargestellte Entwicklung des Schwarzwildes beschreibt.

$$A = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,56 & 0,58 \\ 0,13 & 0,56 & 1,64 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,13 & 0,56 & 1,64 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,56 & 0,58 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0,13 & 0,56 & 1,64 \\ 0 & 0,56 & 0,58 \\ 0,25 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie auch für die beiden anderen Matrizen, warum sie zur Modellierung hier nicht geeignet sind.

20 P

Grundkurs Mathematik

Die Werte aus a) beruhen auf Untersuchungen von Schwarzwild, das unter ungünstigen Bedingungen lebt. Die Winter sind lang und streng, nicht immer ist genug Futter vorhanden. Die folgenden Matrizen P und Q hingegen beschreiben die Entwicklung von Wildschweinpopulationen unter gemäßigten bzw. guten Lebensbedingungen.

$$P = \begin{pmatrix} 0,59 & 1,76 & 2,29 \\ 0,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0,71 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0,26 & 0,94 & 1,93 \\ 0,33 & 0 & 0 \\ 0 & 0,40 & 0,66 \end{pmatrix}$$

- c) Entscheiden Sie, welcher der beiden Matrizen P oder Q gemäßigte Lebensbedingungen für Wildschweine und welcher gute Lebensbedingungen für Wildschweine zugrunde liegen. **10 P**

Die folgenden Aufgabenteile d) bis h) beziehen sich auf die Matrix P .

- d) Eine weibliche Wildschweinpopulation setzt sich zum Untersuchungszeitpunkt aus 60 Frischlingen, 23 Überläuferbachen und 17 reifen Bachen zusammen. Berechnen Sie mit Hilfe der Populationsmatrix P die Population nach einem Jahr und aus diesem Ergebnis die Population nach einem weiteren Jahr unter den gleichen Lebensbedingungen. **10 P**
- e) • Berechnen Sie P^2 und runden Sie die Elemente dieser Matrix auf zwei Nachkommastellen.
• Bestätigen Sie durch Nachrechnen, dass man auch mit Hilfe von P^2 den Wildschweinbestand aus Aufgabenteil d) nach zwei Jahren bestimmen kann. **10 P**
- f) Begründen Sie allein im Sachkontext und unabhängig von der Rechnung in e), warum P^2 keine Null enthalten darf. **15 P**
- g) Der Bestand nach 10 Jahren kann mit Hilfe der Matrix P^{10} bestimmt werden. Für die 10. Potenz der Matrix P gilt:

$$P^{10} \approx \begin{pmatrix} 61 & 122 & 152 \\ 19 & 39 & 49 \\ 13 & 25 & 32 \end{pmatrix}.$$

Bestätigen Sie, dass bei ungestörtem Wachstum unter gleich bleibenden Lebensbedingungen die Ausgangspopulation von 100 Wildschweinen (s. Aufgabenteil d)) nach 10 Jahren auf mehr als 13 500 Tiere anwächst. **5 P**

Auch ohne menschliche Eingriffe sind gleich bleibende Lebensbedingungen über Jahre hinweg unrealistisch; das Schwarzwild könnte sich wegen der Futter- und Raumnot nicht ungehindert vermehren. Trotzdem würden die Bestände zunächst dramatisch wachsen.

Um die Populationen konstant zu halten, werden Wildschweine von den Jagdpächtern geschossen. Zu beachten ist dabei, dass reife Bachen in der Sozialstruktur von Wildschweingruppen eine wichtige Rolle spielen. Ohne sie würden heranwachsende Frischlinge „ausrasten“.

- h) Bestimmen Sie eine Population, auf die der in Aufgabenteil d) beschriebene Bestand durch Abschuss reduziert werden könnte, sodass im nächsten Jahr die Population wiederum nur auf insgesamt 100 weibliche Tiere anwächst. Lassen Sie zehn alte Bachen und zehn Überläuferbachen am Leben. **20 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)		5	5	
b)	<p>Die Matrix B beschreibt die in a) beschriebene Entwicklung. In der ersten Zeile finden sich die Geburtenraten für die einzelnen Altersstufen. In der zweiten Zeile steht die Überlebensrate der Frischlinge, in der dritten Zeile stehen die Überlebensraten der Bächen. Mögliche Argumente gegen A und C sind: Matrix A ist nicht geeignet, da danach nur die Frischlinge Nachwuchs bekommen. Laut Matrix C würden Frischlinge im nächsten Jahr sofort zu reifen Bächen.</p>		20	
c)	<p>Gute Lebensbedingungen führen zu höheren Fortpflanzungs- und Überlebensraten. Alle von Null verschiedenen Elemente von P sind größer als die entsprechenden von Q. Also liegen P gute, Q gemäßigte Lebensbedingungen zugrunde.</p>		10	
d)	$\begin{pmatrix} 0,59 & 1,76 & 2,29 \\ 0,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0,71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 114,81 \\ 31,2 \\ 25,87 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 115 \\ 31 \\ 26 \end{pmatrix}.$ <p>Nach einem Jahr besteht die Population aus 115 Frischlingen, 31 Überläuferbächen und 26 reifen Bächen.</p> $\begin{pmatrix} 0,59 & 1,76 & 2,29 \\ 0,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0,71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 115 \\ 31 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 181,95 \\ 59,8 \\ 37,06 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 182 \\ 60 \\ 37 \end{pmatrix}.$ <p>Nach zwei Jahren ist die Population auf 182 Frischlinge, 60 Überläuferbächen und 37 reife Bächen angewachsen.</p>			

Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p><i>Runden Prüflinge die Werte immer ab oder rechnen sie mit den ungerundeten Werten weiter, so ist die volle Punktzahl zu geben. Werden die Ergebnisse in den Antwortsätzen nicht gerundet, so führt dies zu einem Abzug von einem Punkt.</i></p>	10		
e)	$\begin{pmatrix} 0,59 & 1,76 & 2,29 \\ 0,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0,71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,59 & 1,76 & 2,29 \\ 0,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0,71 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,26 & 2,41 & 2,98 \\ 0,31 & 0,92 & 1,19 \\ 0,31 & 0,43 & 0,50 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1,26 & 2,41 & 2,98 \\ 0,31 & 0,92 & 1,19 \\ 0,31 & 0,43 & 0,50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 181,69 \\ 59,99 \\ 36,99 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 182 \\ 60 \\ 37 \end{pmatrix}$ <p>Man erhält also dieselben Werte wie in d).</p>	5	5	
f)	<p>P^2 beschreibt den Übergang einer Population auf das übernächste Jahr. Nullen stehen in einer Populationsmatrix nur dort, wo es keinen Übergang von einer Altersklasse in eine andere gibt. Dies ist bei P^2 nirgends der Fall. Denn:</p> <p>Die erste Zeile der Matrix beschreibt die Geburtenraten, mit denen die Anzahl der Frischlinge im übernächsten Jahr berechnet werden. Dies ist die „Enkelgeneration“ der Ausgangspopulation, alle drei Altersstufen F, U und B gehören zur „Großmüttergeneration“.</p> <p>Mit der zweiten Zeile berechnet man die Anzahl der Überläuferbächen im übernächsten Jahr, die um ein Jahr gealterten „Kinder“ der Ausgangspopulation.</p> <p>Mit der dritten Zeile wird die Anzahl der alten Bächen bestimmt. Nach zwei Jahren sind auch ehemaligen Frischlinge zu reifen Bächen herangewachsen, ebenso die Überläuferbächen.</p>			15
g)	$\begin{pmatrix} 61 & 122 & 152 \\ 19 & 39 & 49 \\ 13 & 25 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9050 \\ 2870 \\ 1899 \end{pmatrix}$ <p>Die Population würde nach diesem Modell also in der Tat auf mehr als 13 500 Tiere anwachsen.</p>	5		
h)	<p>Gesucht sind ganzzahlige x, F, U und B, sodass</p> $\begin{pmatrix} 0,59 & 1,76 & 2,29 \\ 0,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0,71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ U \\ B \end{pmatrix} \text{ mit } F + U + B = 100.$ <p>Hieraus ergibt sich das Gleichungssystem</p> $\begin{aligned} 0,59x + 17,6 + 22,9 &= F & \text{(I)} \\ 0,52x + & & = U & \text{(II)} \\ & 6 + 7,1 &= B & \text{(III)} \end{aligned}$			

Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Aus (III) folgt: $B = 13$ und damit $F + U = 87$ $(I) + (II) : 1,11x + 40,5 = F + U$ Insgesamt ergibt sich $1,11x = 46,5$ und daraus $x \approx 41,89$. Die gesuchte Population besteht also aus 42 Frischlingen, 10 Überläuferbächen und 10 reifen Bächen.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

STOCHASTIK 1

III.1 Sicherheitssystem

In der Firma Gammamobil sollen die Produktionsabläufe automatisch überwacht werden.

Zuerst betrachten wir die Firma Betasecure, die die Überwachungsgeräte herstellt und gleichzeitig ihre Zulieferfirma Alfatronic, die die verwendeten elektronischen Bauteile herstellt.

- a) Ein Überwachungsgerät besteht aus 30 Bauteilen (T_1, \dots, T_{30}). Das Überwachungsgerät ist nur dann funktionstüchtig, wenn alle 30 Bauteile einwandfrei arbeiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass es nicht funktioniert, beträgt nach dem Zusammenbau für jedes einzelne Bauteil 2 %. Diese 30 Ausfallereignisse werden dabei als stochastisch unabhängig voneinander betrachtet.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eines solches Überwachungsgerät nicht funktioniert.

10 P

- b) Das Ergebnis von a) ist sehr unbefriedigend, deshalb wird ein verbessertes Überwachungsgerät entwickelt. Dabei werden die 30 Teile doppelt eingebaut und zwar so miteinander verschaltet, dass dann, wenn ein Teil ausfällt, das zweite baugleiche Teil dessen Funktion noch übernehmen kann.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes zusammen geschaltetes Teilepaar seine Funktion nicht erfüllt (Ausfallwahrscheinlichkeit eines jeden Teils wie in a)).

- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das neue Überwachungsgerät nach dem Zusammenbau nicht funktioniert.

10 P

- c) Die Fehler der Überwachungsgeräte entstehen in der Firma Betasecure beim Zusammenbau der Bauteile, aber auch, weil die Zulieferfirma Alfatronic fehlerhafte Bauteile liefert. Alfatronic sichert zwar zu, dass der Ausschussanteil (Anteil an unbrauchbaren Teilen) höchstens 1 % beträgt, doch die belieferte Firma Betasecure richtet trotzdem eine eigene Qualitätskontrolle ein.

Da es zu teuer ist, bei jeder Lieferung alle Bauteile zu überprüfen, soll immer nur ein Hypothesentest durchgeführt werden. Dabei ist geplant, jeweils nur eine Stichprobe von 50 Stück zu prüfen. Da es Betasecure vor allem darauf ankommt sicherzustellen, dass die zugesicherte Ausschussquote von höchstens 1 % eingehalten wird, wählt sie als Nullhypothese die Annahme, dass diese Zusicherung **nicht erfüllt** ist, um diese dann möglichst mit einem signifikanten Ergebnis (5 % -Niveau) zu verwerfen. Wenn dies der Fall ist, soll die Lieferung akzeptiert werden.

- Begründen Sie, dass so für die Anzahl X der unbrauchbaren Teile kein passender Verwerfungsbereich angegeben werden kann, weil die Stichprobengröße dazu zu klein ist.
- Bestimmen Sie die Mindestgröße der Stichprobe mit dem dann zugehörigen Verwerfungsbereich, damit das Verfahren doch – wie geplant – durchgeführt werden kann.

10 P

Grundkurs Mathematik

d) Nach dem Zusammenbau wird bei Betasecure jedes Überwachungsgerät noch dreimal unabhängig voneinander kontrolliert. Ein fehlerhaftes Gerät wird bei jeder Einzelkontrolle mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 entdeckt.

- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein fehlerhaftes Gerät bei der Gesamtkontrolle nicht entdeckt wird.
- Bestimmen Sie auch die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 fehlerhaften Geräten alle entdeckt werden.

20 P

Betrachten Sie jetzt den eigentlichen Produktionsablauf in der Firma Gammamobil, den die Überwachungsgeräte überwachen sollen. Unterstellen Sie dabei, dass die Überwachungsgeräte funktionsstüchtig sind.

e) Erfahrungen haben gezeigt, dass bei 1000 Produktionsabläufen durchschnittlich 20 Störungen auftreten.

Bei den Überwachungsgeräten kann es dennoch mit Wahrscheinlichkeit 0,5 % vorkommen, dass ein Produktionsablauf ein Warnsignal erzeugt, wenn gar keine Störung vorliegt.

Es kann auch mit Wahrscheinlichkeit 1% vorkommen, dass kein Warnsignal erzeugt wird, wenn eine Störung vorliegt.

Bestätigen Sie (z.B. mit Hilfe eines Baumdiagramms), dass die Wahrscheinlichkeit,

- i) dass ein Produktionsablauf durch ein Alarmsignal unterbrochen wird, ungefähr 2,5 % beträgt,
- ii) dass im Falle eines Alarms gar keine Störung im Produktionsablauf vorliegt, ungefähr 20 % beträgt,
- iii) dass ein Produktionsablauf gestört abläuft und das Überwachungsgerät diese Störung nicht entdeckt, ungefähr $\frac{1}{5000}$ beträgt.

30 P

Die drei Ergebnisse geben Anlass zum Nachdenken: Sehr erfreulich ist das Ergebnis von iii), sehr unerfreulich das Ergebnis von ii). Bei Alarm wird nämlich der ganze Produktionsablauf gestoppt, was aufwendig und kostenintensiv ist. Das passiert zwar relativ selten (2,5 %), bedeutet aber dann ziemlich oft Fehlalarm (20 %).

Deshalb werden versuchsweise drei der Überwachungsgeräte gleichzeitig eingesetzt, und es wird nur dann Alarm ausgelöst, wenn mindestens zwei der Geräte eine Störung anzeigen.

f) Bestimmen Sie die beiden in e) betrachteten Wahrscheinlichkeiten ii) und iii) erneut und zwar

- einerseits unter der Annahme, dass das „Fehlverhalten“ der Überwachungsgeräte seine Ursachen nur in Besonderheiten der Produktionsabläufe bei Gammamobil hat und
- andererseits unter der Annahme, dass das „Fehlverhalten“ der Überwachungsgeräte nur durch zufällig und unabhängig auftretende interne Eigenschaften der Überwachungsgeräte verursacht wird.

20 P

Grundkurs Mathematik

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Ein Einzelgerät fällt aus, wenn mindestens ein Teil ausfällt. Dies ist das Gegenereignis dazu, dass kein Teil ausfällt. Wegen der Unabhängigkeit fällt kein Teil mit der Wahrscheinlichkeit $0,98^{30}$ aus. Die Komplementärwahrscheinlichkeit ergibt $p(A_E) = 1 - 0,98^{30} \approx 45\%$.</p>	10		
b)	<ul style="list-style-type: none"> Ein zusammenschaltetes Zwillingsmodul funktioniert nicht, wenn die beiden baugleichen Einzelteile nicht funktionieren, also mit Wahrscheinlichkeit $0,02^2 = 0,0004 = \frac{1}{2500}$. Die gleiche Rechnung wie a) mit dem neuen Wert $0,0004$ ergibt als Ausfallwahrscheinlichkeit für das neue Überwachungsgerät den Wert $1 - 0,9996^{30} \approx 1,2\%$, also eine deutliche Verbesserung. 		10	
c)	<ul style="list-style-type: none"> Die Anzahl X der fehlerhaften Bauteile in der Stichprobe ist $50-p$-binomialverteilt. Die Nullhypothese lautet: $p > 0,01$. Kleine Werte von X sprechen gegen die Nullhypothese. Es sei $\{X \leq K\}$ der gesuchte Ablehnungsbereich. Für den Fehler erster Art gilt: $\alpha = P(X \leq K H_0) \leq P(X \leq K p = 0,01) = \sum_{i=0}^K B(50; 0,01; i).$ Es ist also der größte Wert von K gesucht, für den der rechte Term und damit α noch $\leq 5\%$ ist. Aber bereits für $K = 0$ erhält man: $B(50; 0,01; 0) = 0,99^{50} \approx 60\%$! Das heißt: Selbst wenn man die Lieferung nur annehmen würde (H_0 ablehnen würde), wenn <u>alle</u> 50 geprüften Teile in Ordnung sind, kann man nur garantieren, dass $\alpha \leq 60\%$. Man erkennt aus dieser Argumentation auch, was zu tun ist, nämlich die Stichprobengröße n so groß zu wählen, dass $0,99^n \leq 5\%$. Dazu müsste n größer als 298 sein (das kann durch Probieren oder Logarithmieren gefunden werden), und man dürfte die Lieferung dann auch nur akzeptieren, wenn alle Bauteile in Ordnung sind, d.h. der Ablehnungsbereich ist $\{X = 0\}$. 			10
d)	<ul style="list-style-type: none"> Ein fehlerhaftes Gerät wird nicht entdeckt, wenn alle drei Testverfahren es nicht entdecken, also mit der Wahrscheinlichkeit $0,1^3 = 0,001 = 0,1\%$. Ein fehlerhaftes Gerät wird also mit $99,9\%$ Wahrscheinlichkeit entdeckt, alle 100 fehlerhaften Geräte werden also mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,999^{100} \approx 0,904 \dots \approx 90\%$ entdeckt. 		10	
			10	

Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	<p>i) Mit einem Baumdiagramm oder dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet werden.</p> <div style="text-align: center;"> <pre> graph TD Start -- 2% --> AG[Ablauf gestört] Start -- 98% --> ANG[Ablauf nicht gestört] AG -- 1% --> K1[kein Alarm] AG -- 99% --> A1[Alarm] ANG -- 0,5% --> K2[kein Alarm] ANG -- 99,5% --> A2[Alarm] </pre> </div> <p>Es gilt also $P(\text{„Alarm“}) = 0,02 \cdot 0,99 + 0,98 \cdot 0,005 \approx 2,5\%$.</p> <p>ii) Mit Hilfe des Satzes von Bayes lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit bestimmen (im Nenner steht dabei das Ergebnis aus i)):</p> <p>St : = Störung im Ablauf. A : = Alarmreaktion des Überwachungssystems.</p> $p(\bar{St} A) = \frac{p(\bar{St}) \cdot p(A \bar{St})}{p(A)} = \frac{0,98 \cdot 0,005}{0,02 \cdot 0,99 + 0,98 \cdot 0,005} \approx 20\%.$ <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Störung vorliegt, obwohl das Gerät Alarm gibt, beträgt tatsächlich ca. 20 %!</p> <p>iii) $P(St \cap \bar{A}) = P(St) \cdot P(\bar{A} St) = 0,02 \cdot 0,01 = 0,0002 = \frac{1}{5000}$.</p> <p>(Im obigen Baumdiagramm ist das der Pfad „zweimal links“).</p>	10		
f)	<p>Wenn der erste Fall vorliegt, wenn also das „Fehlverhalten“ der Überwachungsgeräte seine Ursachen nur in Besonderheiten der Produktionsabläufe bei Gammamobil hat, ändert sich gegenüber e) gar nichts, die drei Geräte werden entweder alle gleichzeitig oder gar nicht reagieren, und die Antworten auf die drei Fragen bleiben unverändert.</p> <p>Wenn der zweite Fall vorliegt, wenn also das „Fehlverhalten“ der Überwachungsgeräte aus zufällig und unabhängig auftretenden internen Eigenschaften der Überwachungsgeräte herrührt, müssen die Werte auf der zweiten Stufe des Baumdiagramms aus e) mit Hilfe der Binomialverteilungen $B(3 ; 0,99 ; 2) + B(3 ; 0,99 ; 3)$ bzw. $B(3 ; 0,005 ; 2) + B(3 ; 0,005 ; 3)$ (Alarm bei mindestens zwei Reaktionen) geändert werden.</p>			10

Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung			
		I	II	III	
	<p>Die erste Summe beträgt ungefähr 99,97 %. Die zweite Summe ist so klein ($7,465 \cdot 10^{-5}$), dass man sie lieber – um eine Vorstellung zu gewinnen – durch einen Stammbruch annähern sollte, also etwa durch $\frac{1}{13400}$.</p> <div style="text-align: center;"> <pre> graph TD Start -- 2% --> AG[Ablauf gestört] Start -- 98% --> ANG[Ablauf nicht gestört] AG -- 0,03% --> KA[kein Alarm] AG -- 99,97% --> AL1[Alarm] ANG -- 1/13400 --> AL2[Alarm] ANG -- 0,5% --> KA2[kein Alarm] </pre> </div> <p>Mit diesen neuen Daten wiederholen wir die Rechnungen aus e, ii) :</p> <p>ii) $P(\bar{St} A) = \frac{0,98 \cdot \frac{1}{13400}}{0,02 \cdot 0,9997 + 0,98 \cdot \frac{1}{13400}} \approx 0,4\% .$</p> <p>iii) $P(St \cap \bar{A}) = P(St) \cdot P(A St) = 0,02 \cdot 0,0003 = 0,000006 \approx \frac{1}{170000} .$</p> <p>Das sind beides sehr zufriedenstellende Ergebnisse.</p>				10
	Insgesamt 100 BWE	30	40	30	

Grundkurs Mathematik

STOCHASTIK 2

III.2 „Schwarzfahrer“

Nach Angaben des HVV beträgt der Anteil der „Schwarzfahrer“, das sind Fahrgäste, die keinen gültigen Fahrschein vorzeigen können, am gesamten Fahrgastaufkommen etwa 3 %.

Zwei Kontrolleure steigen an der Haltestelle „Berliner Tor“ in eine Bahn der Linie U3 und kontrollieren alle 25 Fahrgäste im Wagen.

An der Haltestelle „Hauptbahnhof Süd“ steigen sie um in einen Zug der Linie U1, in dem sie weitere 18 Fahrgäste kontrollieren.



Es soll vereinfachend angenommen werden, dass die Anzahl der Schwarzfahrer bei den Kontrollen binomialverteilt ist.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- die Kontrolleure bei beiden Kontrollen zusammen genau 2 Schwarzfahrer ermitteln.
- die Kontrolleure bei den Kontrollen mindestens einen Schwarzfahrer ermitteln.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kontrolleure erst in der Linie U1 auf den ersten Schwarzfahrer treffen. **20 P**

b) Berechnen Sie, wie viele Schwarzfahrer die Kontrolleure bei ihrer oben beschriebenen Kontrolle erwarten können. **5 P**

c) Bestimmen Sie, wie viele Fahrgäste überprüft werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % mindestens ein Schwarzfahrer ermittelt wird. **15 P**

Genauere Untersuchungen zeigen, dass die Anteile der Schwarzfahrer in den verschiedenen Linien deutlich unterschiedlich sind. In der Linie U3 sind 2 % Schwarzfahrer zu erwarten, in der Linie U1 dagegen 4 %.

d) Berechnen Sie aufgrund dieser genaueren Informationen noch einmal die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kontrolleure bei der oben beschriebenen Kontrolle mindestens einen Schwarzfahrer ermitteln.

Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil a) und geben Sie Gründe für die Abweichung an. **10 P**

Grundkurs Mathematik

- e) Der HVV geht davon aus, dass 10 % der Schwarzfahrer erwischt werden. Ein erwischter Schwarzfahrer muss 40 € erhöhtes Beförderungsentgelt zahlen. Besitzt er eine Zeitkarte, die er nur zu Hause vergessen hat, muss er diese innerhalb einer Woche vorzeigen und zahlt dann nur eine Bearbeitungsgebühr von 5 €. Dieser Fall trifft etwa bei der Hälfte der erwischten Schwarzfahrer zu. Gehen Sie davon aus, dass jeder nicht erwischte Schwarzfahrer im Durchschnitt entgangene Einnahmen von 3 € verursacht.
Untersuchen Sie, ob das erhöhte Beförderungsentgelt angehoben werden muss, um die erwarteten Verluste, die durch die Schwarzfahrer entstehen, auszugleichen. Die Kosten, die die Entlohnung der Kontrolleure verursacht, sollen hier unberücksichtigt bleiben.
Berechnen Sie gegebenenfalls ein erhöhtes Beförderungsentgelt, bei dem Kostendeckung zu erwarten ist. **20 P**
- f) Nach einer erheblichen Preiserhöhung befürchtet der HVV, dass der durchschnittliche Anteil der Schwarzfahrer deutlich über 3 % angestiegen ist. Um diese Vermutung zu untersuchen, wird eine Großkontrolle durchgeführt, bei der 10 000 Fahrgäste kontrolliert werden.
Der HVV ist unsicher, bei welchen Ergebnissen der Großkontrolle er die oben genannten Befürchtungen als statistisch begründet ansehen sollte. Geben Sie eine Entscheidungshilfe an und begründen Sie diese. **20 P**
- g) Beurteilen Sie die oben gemachte Annahme, dass die Anzahl der Schwarzfahrer binomialverteilt ist. **10 P**

Grundkurs Mathematik

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung										
		I	II	III								
a)	<p>Zufallsgröße X: Anzahl der Schwarzfahrer unter den 43 kontrollierten Fahrgästen. X ist binomialverteilt mit $B_{n,p,k} = B_{43, 0,03, x}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> Genau 2 Schwarzfahrer werden erwischt mit der Wahrscheinlichkeit $B_{43, 0,03, 2} = \binom{43}{2} \cdot 0,03^2 \cdot 0,97^{41} \approx 0,233... \approx 23\% .$ Mindestens 1 Schwarzfahrer wird erwischt mit der Wahrscheinlichkeit $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,97^{43} \approx 0,73... \approx 73\% .$ <p>Der erste ermittelte Schwarzfahrer sitzt in der Linie U1 mit der Wahrscheinlichkeit: $B_{25;0,03;0} \cdot (1 - B_{18;0,03;0}) \approx 0,197 \approx 20\% .$</p>	10	10									
b)	<p>Der Erwartungswert ist $E = n \cdot p = 43 \cdot 0,03 = 1,29$.</p> <p>Die Kontrolleure können mit ungefähr einem Schwarzfahrer rechnen.</p>	5										
c)	<p>Hier gilt $1 - p(X = 0) \approx 0,9$. Einsetzen der Werte ergibt:</p> $1 - 0,97^n \geq 0,9$ $0,97^n \leq 0,1$ $n \cdot \lg 0,97 \leq \lg 0,1$ $n \geq \frac{\lg 0,1}{\lg 0,97}$ $n \geq 75,595...$ <p>Um mit 90 %-iger Sicherheit einen Schwarzfahrer zu erwischen, müssen mindestens 76 Fahrgäste kontrolliert werden.</p>		15									
d)	<p>Hier hilft wie in a) das Gegenereignis: $1 - 0,98^{25} \cdot 0,96^{18} \approx 0,711$.</p> <p>Diese Wahrscheinlichkeit ist deutlich niedriger als im Aufgabenteil a) (73 %). Der Grund liegt in der unterschiedlichen Anzahl der kontrollierten Fahrgäste in den beiden Linien. In der Linie U3 sind es $\frac{1}{4}$ mehr als in der Linie U1. Somit wirkt sich der geringere Anteil an Schwarzfahrern in der U3 stärker aus, als der höhere Anteil in der U1.</p>	5	5									
e)	<p>G bezeichnet die zusätzlichen Einnahmen bzw. Kosten des HVV, die durch Schwarzfahrer entstehen. Die Situation wird durch folgende Tabelle dargestellt:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>G in €</td> <td>-3</td> <td>5</td> <td>37</td> </tr> <tr> <td>$P(G)$</td> <td>0,9</td> <td>0,05</td> <td>0,05</td> </tr> </table> <p>Der Erwartungswert von G ist: $E(G) = 0,05 \cdot 37 \text{ €} + 0,05 \cdot 5 \text{ €} - 0,9 \cdot 3 \text{ €} = -0,60 \text{ €} .$</p>	G in €	-3	5	37	$P(G)$	0,9	0,05	0,05			
G in €	-3	5	37									
$P(G)$	0,9	0,05	0,05									

Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Pro Schwarzfahrer entsteht dem HVV also durchschnittlich ein Verlust von 0,60 €.</p> <p>Keine Verluste entstehen, wenn $E(G) = 0$ ist. Um das zu erreichen, setzen wir für das erhöhte Beförderungsentgelt die Variable x ein und lösen die Gleichung:</p> $0 = 0,05 \cdot (x - 3) + 0,05 \cdot 5 - 0,9 \cdot 3$ $0,05 \cdot x = 2,6$ $x = 52.$ <p>Das erhöhte Beförderungsentgelt muss also auf 52 € erhöht werden, damit keine Verluste entstehen.</p>	5	15	
f)	<p>Getestet werden könnte die Nullhypothese: „Der Anteil der Schwarzfahrer liegt unverändert bei 3 % oder weniger.“</p> <p>Bei einem Anteil der Schwarzfahrer von 3 % nehmen für die Kontrolle von 10000 Fahrgästen der Erwartungswert und die Standardabweichung folgende Werte an:</p> $E = n \cdot p = 10000 \cdot 0,03 = 300.$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10000 \cdot 0,03 \cdot 0,97} \approx 17.$ <p>Bei der Kontrolle wäre bei einem unveränderten Anteil an Schwarzfahrern mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % die Anzahl der Schwarzfahrer kleiner als 335. Liegt die erhobene Zahl der Schwarzfahrer über 334, so könnte man die Hypothese, dass auch nach der Fahrpreiserhöhung die Quote der Schwarzfahrer weniger oder gleich 3 % beträgt, auf dem 2 %-Niveau signifikant verwerfen.</p> <p><i>Bemerkung:</i> Natürlich können hier auch andere Signifikanzniveaus (z.B. 5 % oder 1 %) betrachtet werden.</p>		5	15
g)	<p>Es geht um die Frage der stochastischen Unabhängigkeit des Schwarzfahrens der einzelnen Personen. Diese ist z. B. dann nicht gegeben, wenn Gruppen fahren.</p> <p><i>Es wird eine „ergebnisoffene“ zusammenhängende Darstellung erwartet.</i></p>			10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25



Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Schriftliche Abiturprüfung
Schuljahr 2007/2008

Grundkurs Mathematik

Gymnasien, Gesamtschulen, Berufliche Gymnasien

27. März 2008, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer – Zweittermin

Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt.

Diese Unterlagen enthalten:

- 1 Allgemeines
- 2 Rückmeldebogen
- 3 Hinweise für die Auswahl der Aufgaben
- 4 Hinweise zum Korrekturverfahren
- 5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und die Bewertung für jede Aufgabe

1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen nur mit der Kursnummer und ihrer Schülernummer, nicht mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **240 Minuten**.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv“, Cornelsen-Verlag, Operatorenliste, Rechtschreiblexikon.

2 Rückmeldebogen für die Zweitkorrektur

Bitte umgehend ausfüllen und an BM 3 faxen!

Institut für Bildungsmonitoring
BM 3

Schulchiffre:

Fax 42 79 67-006

Aufgabenstatistik und Information für die Zweitkorrektoren in Fächern mit zentraler Aufgabenstellung

Fach: Mathematik, Grundkurs

Kurs-Nummer: _____

Bearbeitet wurden die folgenden Aufgaben:

Aufgabe Nr.	Anzahl	
I.1	von	Prüflingen
I.2	von	Prüflingen
II.1	von	Prüflingen
II.2	von	Prüflingen
III.1	von	Prüflingen
III.2	von	Prüflingen

Datum: _____

Unterschrift: _____

3 Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **sechs** Aufgaben – **I.1, I.2** (Analysis) und **II.1, II.2** (Lineare Algebra/Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Stochastik).
 - Sie wählen **zwei Aufgaben** aus, davon eine Aufgabe aus dem **Sachgebiet I** (Analysis) und eine Aufgabe aus dem **Sachgebiet II** (Lineare Algebra/Analytische Geometrie) bzw. dem **Sachgebiet III** (Stochastik). Beide Aufgaben reichen Sie an die Schülerinnen und Schüler weiter.
 - Sie überprüfen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vollständigkeit der Arbeitsunterlagen.
 - Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten beide Aufgaben.
 - Sie vermerken auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie bearbeitet haben.
-

4 Korrekturverfahren

- Die Korrekturen werden gemäß der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsleistungen im schriftlichen Teil der Abiturprüfung“ vorgenommen.
- Die Bewertung und Benotung der Arbeiten wird auf einem gesonderten Blatt vorgenommen, siehe Anlagen „Bewertungsbögen für die Erst- und die Zweitkorrektur“ (S. 4 und 5).
- Die Bewertungsbögen verbleiben in der Schule.
- Die Originale der Schülerarbeiten werden zusammen mit dem Bewertungsbogen für die Zweitkorrektur und einer Kursliste, die nur die Schülernummern enthalten darf, sowie einem Exemplar der Lehrermaterialien zu einem Päckchen gepackt.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Bei der Korrektur der Schülerarbeiten kann es auf Grund von unterschiedlichen didaktischen Konzepten oder Verkürzungen auf Grund von Verabredungen zu unterschiedlichen Bewertungen von Schülerleistungen kommen, insbesondere im formalen Bereich. Bisher ließen sich solche unterschiedlichen Sichtweisen im Gespräch zwischen Referent und Korreferent klären.

Im Abitur mit zentralen Anteilen ist eine solche Klärung wegen des anonymisierten Korrekturverfahrens nicht möglich. Deshalb ist insbesondere auf Seiten des Korreferenten ein sensibles Vorgehen gefordert. Auch wenn der Korreferent eine andere Korrektheit von seinen Schülerinnen und Schülern fordern würde, sollte er darauf achten, ob der Referent bei seinen Korrekturen durchgängig anders verfahren ist. Es gilt der Grundsatz, dass die Schülerinnen und Schüler durch unterschiedliche Sichtweisen nicht benachteiligt werden dürfen.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

Erwartungshorizont:

Kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

Bewertung:

Jeder Aufgabe sind 100 Bewertungseinheiten (BWE) zugeordnet, insgesamt sind also 200 BWE erreichbar. Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

Bewertungseinheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 190	$\geq 95\%$	15
≥ 180	$\geq 90\%$	14
≥ 170	$\geq 85\%$	13
≥ 160	$\geq 80\%$	12
≥ 150	$\geq 75\%$	11
≥ 140	$\geq 70\%$	10
≥ 130	$\geq 65\%$	9
≥ 120	$\geq 60\%$	8

Bewertungseinheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 110	$\geq 55\%$	7
≥ 100	$\geq 50\%$	6
≥ 90	$\geq 45\%$	5
≥ 80	$\geq 40\%$	4
≥ 66	$\geq 33\%$	3
≥ 52	$\geq 26\%$	2
≥ 38	$\geq 19\%$	1
< 38	$< 19\%$	0

Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet worden sein.

Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht worden sind.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu drei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

Schulchiffre		BeBo EKo M	
Fach	Mathematik	Schüler- Nummer	
Kurstyp	GK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)								BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	
Summe der BWE →									
Bewertungstext									
Notenpunkte →									

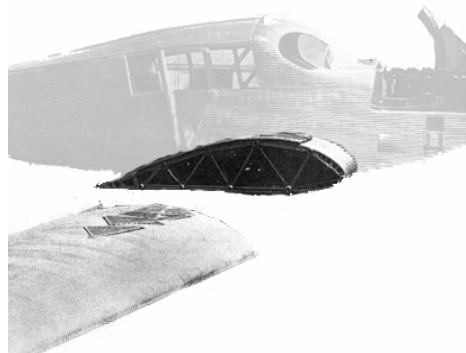
Schulchiffre		BeBo ZKo M	
Fach	Mathematik	Schüler- Nummer	
Kurstyp	GK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)								BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	
Summe der BWE →									
Bewertungstext									
Notenpunkte →									

ANALYSIS 1

I.1 Tragfläche

Die Konstrukteure eines Flugzeuges haben das Profil (Querschnittsfläche) einer Tragfläche am Übergang zum Rumpf mithilfe zweier ganzrationaler Funktionen f und p im Intervall $[0; 7]$ beschrieben.



- a) Der Graph der Funktion f beschreibt die Oberseite des Tragflächenprofils.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f , wenn folgende Daten der Funktion bekannt sind:

- f ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, mit den drei Nullstellen $x = -4$, $x = 0$ und $x = 7$.
- $(2 | 0,6)$ ist ein Punkt des Graphen von f .

Ein Ausschnitt des Graphen von f ist in das Koordinatensystem der Anlage bereits eingezeichnet.

Zur Kontrolle: $f(x) = -0,01 \cdot (x^3 - 3x^2 - 28x)$. **15 P**

- b) Bei der Funktion p handelt es sich um eine Parabel, die mit den Nullstellen $x = 0$ und $x = 7$ und mit der Bedingung $p'(7) = 0,35$ die Unterseite des Tragflächenprofils beschreibt.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $p(x)$.

Zur Kontrolle: $p(x) = 0,05 \cdot (x^2 - 7x)$. **15 P**

- c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion p in das Koordinatensystem in der Anlage. **10 P**

- d) Für ein europäisches Projekt zur Klimaforschung soll eine stangenförmige Messsonde an der Unterseite der Tragfläche an der Stelle $x = 5$ angebracht werden. Die Messsonde wird wegen der Strömungsverhältnisse der Luft tangential an der Profilunterseite montiert.

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden t , auf der die Messsonde liegt. **15 P**

- e) In die Tragflächen sollen Tanks eingebaut werden. Bestimmen Sie hierfür den Flächeninhalt des Tragflächenprofils, das von f und p im Intervall $[0; 7]$ umschlossen wird. **10 P**

- f) Bestimmen Sie die Stelle, an der das Tragflächenprofil maximale Dicke in y -Richtung aufweist, und ermitteln Sie auch diese maximale Dicke des Tragflächenprofils. **15 P**

In der Entwicklungsphase dieses Flugzeugtyps werden von den Konstrukteuren unterschiedliche Tragflächenprofile getestet. Um die Flugeigenschaften des Flugzeugs zu verbessern, soll die Profilunterseite der Tragfläche im Intervall $[0; 7]$ flacher gestaltet werden.

- g) • Bestimmen Sie zunächst den Abstand a der waagerechten Tangente an der Unterseite des Tragflächenprofils zur x -Achse.

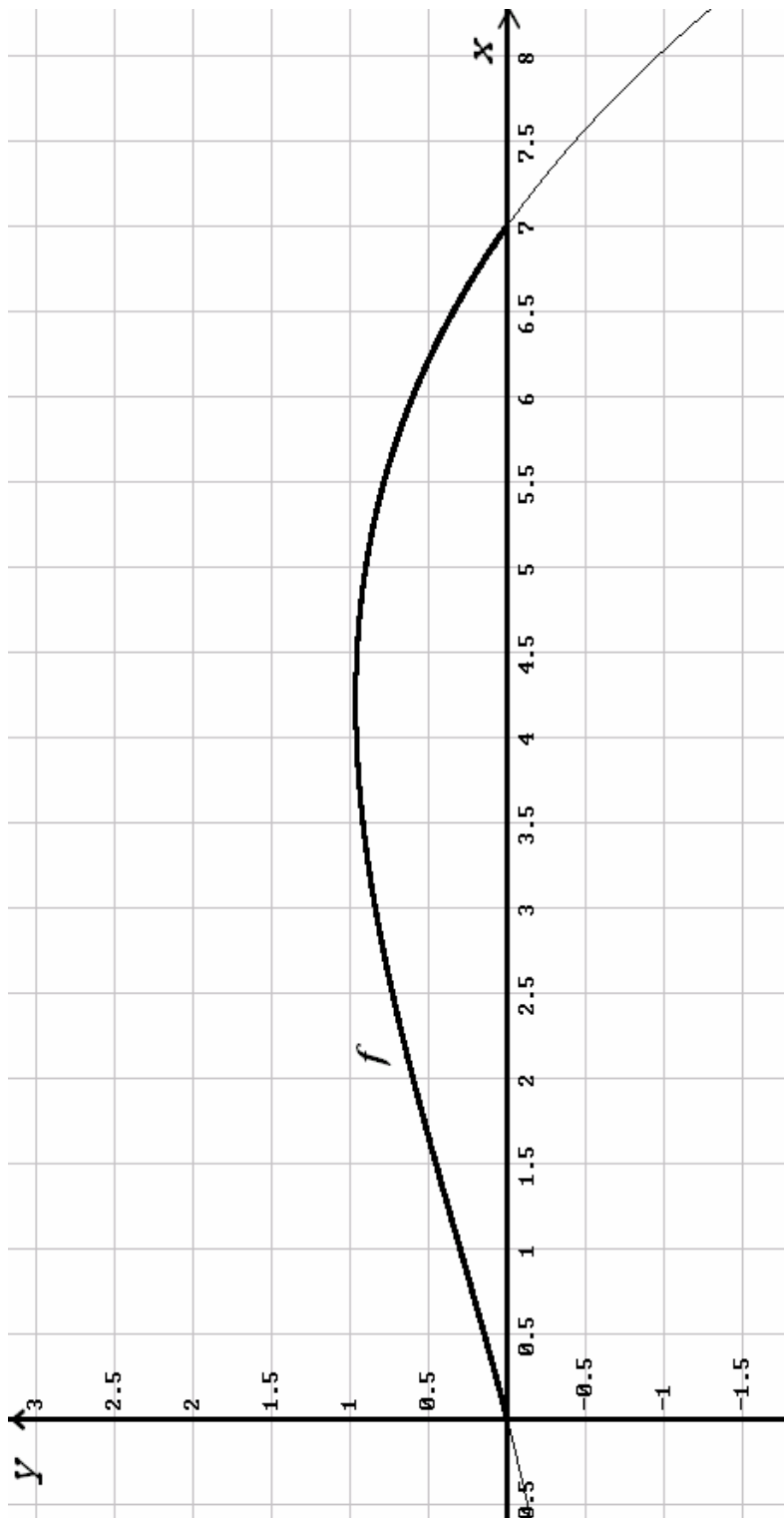
- In einem ersten Ansatz wird die Parabel beibehalten, aber der Abstand a soll um 20 % reduziert werden.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der zu dieser Vorgabe passenden Parabel q . **10 P**

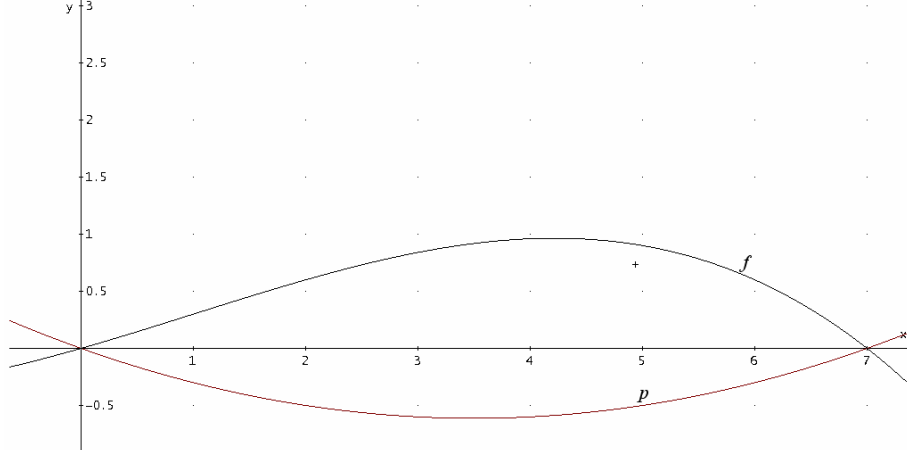
- h) Ein Konstrukteur macht einen anderen Ansatz für die Modellierung der Tragflächenunterseite mithilfe der Funktion r mit der Gleichung $r(x) = \frac{p(x)}{8-x}$.

Vergleichen Sie die durch q und r gegebenen Ansätze. **10 P**

Anlage zur Aufgabe „Tragfläche“:



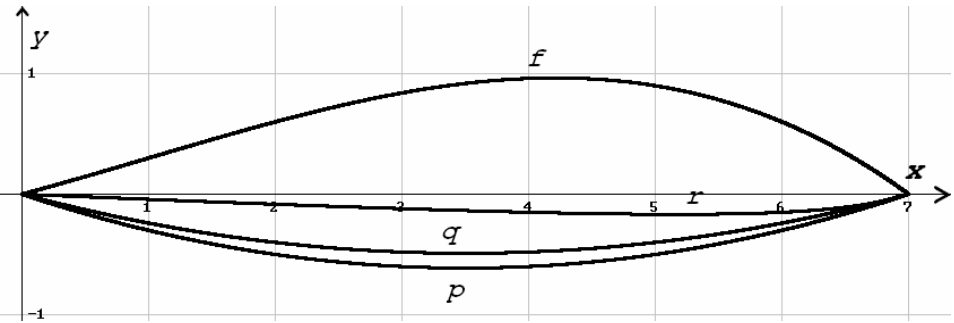
Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Die Funktion f hat die Nullstellen -4, 0 und 7. Damit lässt sich zunächst f_1 als eine erste Näherung für f mit $f_1(x) = (x+4) \cdot x \cdot (x-7)$ darstellen. Die Vorgabe, dass der Punkt $(2 0,6)$ auf dem Graphen von f liegt, führt wegen $f_1(2) = (2+4) \cdot 2 \cdot (2-7) = -60$ mit dem Vorfaktor $-0,01$ auf die gesuchte Funktionsgleichung $f(x) = -0,01 \cdot (x+4) \cdot x \cdot (x-7)$ bzw. ausmultipliziert</p> $f(x) = -0,01x^3 + 0,03x^2 + 0,28x.$ <p>Das Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems mit Hilfe der allgemeinen Funktionsgleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ist ebenfalls möglich.</p>		15	
b)	<p>Da die Nullstellen der Parabel 0 und 7 sind, folgt zunächst für p eine Näherung $p_1(x) = x \cdot (x-7) = x^2 - 7x$.</p> <p>Mit $p_1'(7) = 2 \cdot 7 - 7 = 7$ ergibt sich unter der Bedingung $p'(7) = 0,35$ die gesuchte Parabelgleichung mit $p(x) = 0,05 \cdot x \cdot (x-7)$.</p>	15		
c)	<p>Die Skizze in der Anlage wird mit dem Graphen von p ergänzt.</p> 	5	5	
d)	<p>Da die Gerade t die Tragflächenunterseite p an der Stelle $x = 5$ berühren soll, kann man die Steigung der Tangente über die erste Ableitung der Parabel p an der Stelle $x = 5$ erhalten.</p> <p>Mit $p'(x) = 0,1x - 0,35$ und</p> $p'(5) = 0,15$ <p>ergibt sich die Steigung der Tangente mit $m = 0,15$. Da der Berührungspunkt $(5 -0,5)$ ein Punkt der Tangente ist, folgt: $-0,5 = 0,75 + b$.</p> <p>Die gesuchte Funktionsgleichung von t lautet: $t(x) = 0,15 \cdot x - 1,25$.</p> <p><u>Alternativ kurz und direkt:</u> $t(x) = p(5) + p'(5) \cdot (x-5) = 0,15x - 1,25$.</p>		10	5

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	<p>Da die Querschnittsfläche der Tragfläche von den Funktionen f und p eingeschlossen wird, lässt sich der Flächeninhalt durch das folgende Integral bestimmen.</p> $A = \int_0^7 (f(x) - p(x)) dx$ $= -0,01 \cdot \int_0^7 (x^3 + 2x^2 - 63x) dx$ $= -0,01 \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{63}{2}x^2 \right]_0^7$ $= \frac{343}{48}$ $A = 7,14583\dots$ <p>Die Querschnittsfläche hat einen Inhalt von ca. 7,15 Flächeneinheiten.</p>		10	
f)	<p>Die Dicke d des Profils in y-Richtung lässt sich als $d(x) = f(x) - p(x)$ darstellen.</p> <p>Die Dicke d ist an der Stelle x maximal, falls gilt: $d'(x) = 0$ und $d''(x) < 0$.</p> $d(x) = -0,01 \cdot (x^3 + 2x^2 - 63x)$ $d'(x) = -0,01 \cdot (3x^2 + 4x - 63)$ $0 = -0,01 \cdot (3x^2 + 4x - 63)$ $0 = x^2 + \frac{4}{3}x - 21$ $x = -5,297\dots \vee x = 3,964\dots$ <p>Da nur $x \approx 3,96$ innerhalb des Definitionsbereiches liegt, muss nur für diesen Wert die 2. Bedingung überprüft werden.</p> $d'(x) = -0,01 \cdot (3x^2 + 4x - 63)$ $d''(x) = -0,01 \cdot (6x + 4)$ $d''(3,96) = -0,2776 < 0$ <p>Damit ist die Stelle $x \approx 3,96$ die gesuchte Stelle.</p> <p>Die maximale Dicke der Tragfläche erhält man, indem man $x \approx 3,96$ in $d(x) = -0,01 \cdot (x^3 + 2x^2 - 63x)$ einsetzt.</p> <p>Die maximale Dicke beträgt $d(3,964) \approx 1,56$ Längeneinheiten.</p>		10	5

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
g)	<p>Der Abstand a ist identisch mit dem Betrag der Funktionswerte am Scheitelpunkt der Parabel p. Da die Nullstellen der Parabel bei 0 und 7 liegen, liegt der x-Wert des Scheitelpunktes bei 3,5.</p> <p>Dann folgt für den y-Wert: bzw. für den Abstand:</p> $a = p(3,5)$ $a = 0,05 \cdot 3,5^2 - 0,35 \cdot 3,5$ $a = -0,6125.$ <p>Der gesuchte Abstand der waagerechten Tangente der Unterseite des Tragflächenprofils zur x-Achse beträgt somit 0,6125 Längeneinheiten.</p> <p>Eine Minderung des Abstandes um 20 % ergibt einen neuen Abstand von $a_{neu} = 0,49$.</p> <p>Da die Nullstellen der neuen Parabel p_{neu} mit denen der alten Parabel p übereinstimmen, ändert sich auch der x-Wert des Scheitelpunktes nicht. Es muss lediglich der Koeffizient k neu bestimmt werden:</p> $p_{neu}(3,5) = k \cdot 3,5 \cdot (3,5 - 7)$ $-0,49 = -12,25k$ $k = 0,04.$ <p><i>Kürzere Lösungsvariante:</i> Man verändert den Koeffizienten direkt auf 80 % des alten.</p> <p>Die Funktionsgleichung für eine neue Funktion p_{neu} für das untere flachere Profil lautet sodann:</p> $p_{neu}(x) = 0,04 \cdot x \cdot (x - 7) \text{ oder}$ $p_{neu}(x) = 0,04x^2 - 0,28x.$			
h)	 <p>Die Funktion r staucht den Graphen von p unterschiedlich stark im betrachteten Intervall und zwar am linken Rand – also hinten – stark mit dem Faktor $\frac{1}{7} \approx 0,14$, in der Mitte um den Faktor $\frac{1}{4,5} = 0,2\bar{2}$ und am rechten Rand (also vorne) gar nicht mehr. Dadurch wird das Profil vor allem hinten flach.</p>			
Insgesamt 100 BWE		20	60	20

ANALYSIS 2

I.2 Glaskugeln

Ein Unternehmen stellt Glaskugeln für Großabnehmer her. Die Gesamtkosten K_g der Produktion können in Abhängigkeit der produzierten Mengeneinheiten x mit folgender Funktion beschrieben werden:

$$K_g(x) = \frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 125x + 900.$$

Das Unternehmen will die Glaskugeln zum Preis von 200 Geldeinheiten (GE) pro Mengeneinheit (ME) anbieten. Der Erlös, der als Produkt aus Menge und Preis definiert ist, ergibt sich dann als

$$E_1(x) = 200x.$$

- a) Wenn das Unternehmen 60 Mengeneinheiten produziert und verkauft, dann sind die Kosten genauso hoch wie der Erlös.
Bestimmen Sie die Gewinnzone (d. h. den Bereich der Produktion x , in dem die Kosten geringer sind als der Erlös beim Verkauf). **15 P**

- b) Geben Sie die Gewinnfunktion an und berechnen Sie den maximal möglichen Gewinn. **15 P**

Marktbeobachtungen haben folgende Informationen ergeben:

Wenn folgende Anzahlen von Mengeneinheiten (ME) verkauft werden sollen,	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
dann darf der Preis (in GE) nicht höher sein als	320	300	280	250	220	200	160	155	120	100

- c) • Stellen Sie die in der Tabelle gegebenen Informationen im Koordinatensystem in der Anlage dar.
• Skizzieren Sie den Graphen einer möglichst einfachen Funktion p , die den dargestellten Zusammenhang näherungsweise beschreibt.
Geben Sie die Gleichung dieser Funktion p an. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise.
• Mit p ergibt sich eine andere Erlösfunktion als E_1 . Bestimmen Sie die Gleichung dieser neuen Erlösfunktion E_2 . **15 P**

Da verschiedene Wege zur Bestimmung einer Näherungsfunktion möglich sind, rechnen Sie im Folgenden weiter mit $E_2(x) = -2,5x^2 + 350x$.

- d) Berechnen Sie analog zu a) die Gewinnzone.
Untersuchen Sie, wie sich die neue Erlösfunktion E_2 auf das Gewinnmaximum auswirkt.
Hinweis: Auch für die Funktion E_2 gilt, dass das Unternehmen bei 60 verkauften Mengeneinheiten keinen Gewinn mehr erwirtschaftet. **15 P**

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

Für das Unternehmen sind auch die so genannten Stückkosten (Kosten pro Mengeneinheit)

$$K_{St}(x) = \frac{K_g(x)}{x} \text{ von Interesse.}$$

e) Geben Sie die Gleichung der Stückkostenfunktion K_{St} an und zeichnen Sie den Graphen im Intervall $[0;70]$ in das gegebene Koordinatensystem. **10 P**

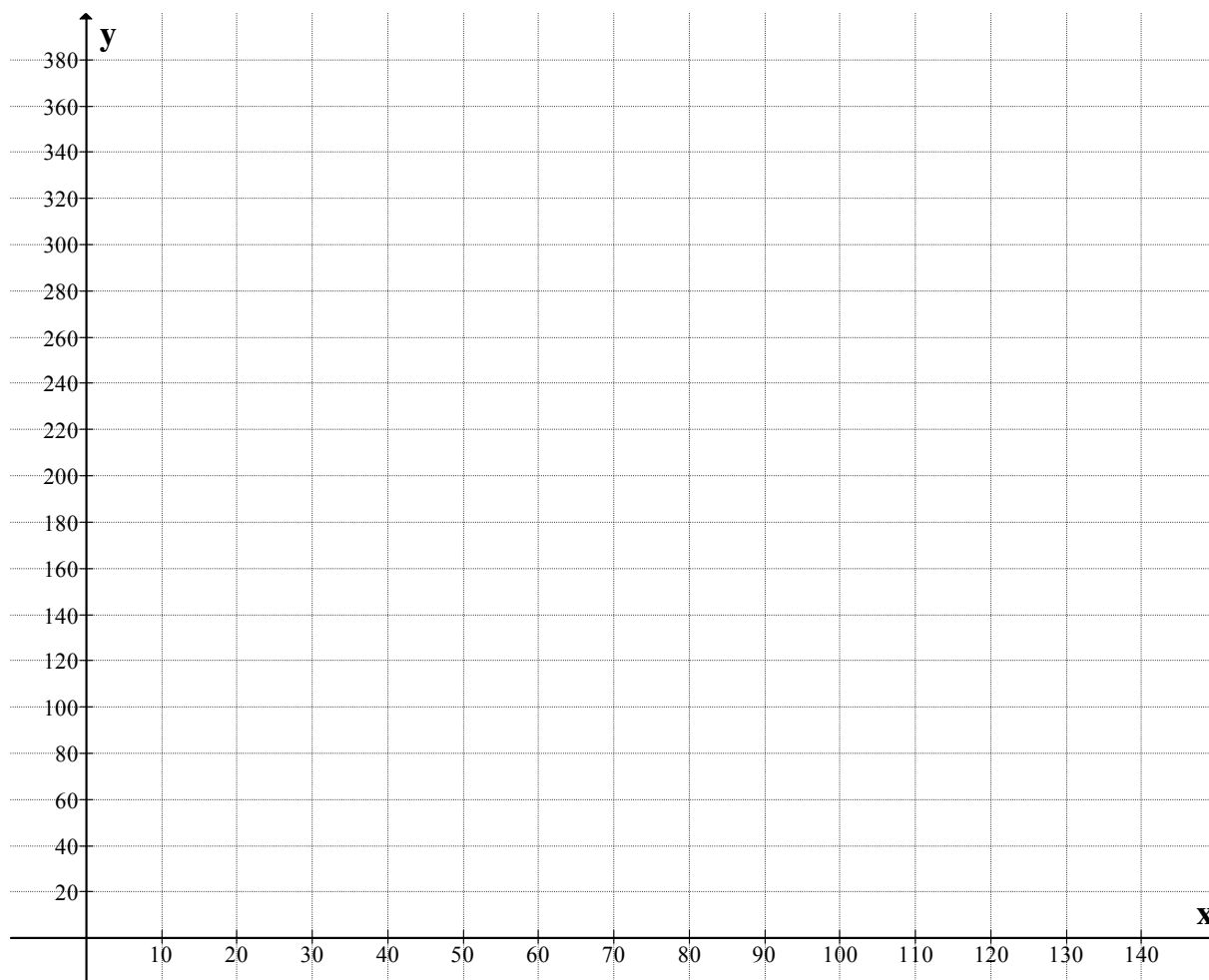
f) Bestätigen Sie, dass die Stückkosten bei $x = 30$ minimal sind. **10 P**

Das Unternehmen erwägt, im Rahmen einer Sonderpreisaktion die Glaskugeln zum jeweiligen Stückkostenpreis auf dem Markt anzubieten. Aus c) und d) geht hervor, dass das Unternehmen bei dieser Aktion teilweise unter dem tatsächlich erzielbaren Preis bleibt.

g) Stellen Sie in Ihrer Skizze denjenigen Bereich durch Schraffur dar, in dem das Unternehmen mit dieser Strategie den tatsächlich erzielbaren Preis nicht ausschöpft. **10 P**

h) Bestimmen Sie im Intervall $[20;50]$ die durchschnittliche Differenz zwischen dem tatsächlich erzielbaren Marktpreis und den jeweiligen Stückkosten.
Verwenden Sie hier $p(x) = -2,5x + 350$. **10 P**

Anlage zur Aufgabe „Glaskugeln“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Zur Berechnung der Gewinnzone: $E_1(x) = K_g(x)$:</p> $\frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 125x + 900 = 200x$ $\frac{1}{10}x^3 - 5x^2 - 75x + 900 = 0$ <p>Die erste Nullstelle $x = 60$ ist gegeben, weitere Zerlegung (Polynomdivision oder Horner Schema) führt zu:</p> $\frac{1}{10} \cdot (x - 60)(x^2 + 10x - 150) = 0$ $x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{175}$ $x_1 = 8,228\dots$ $x_2 \approx -18,228\dots \text{ ist im Sachkontext nicht relevant.}$ <p>Zu überlegen ist hier noch, dass zwischen $x \approx 8,23$ und $x = 60$ der Graph der Erlösfunktion oberhalb des Graphen der Kostenfunktion verläuft. Damit ergibt sich als Gewinnzone der Produktionsbereich $\approx 8,23 \leq x \leq 60$.</p>		15	
b)	<p>Der Gewinn ergibt sich als Differenz aus Erlös und Kosten.</p> $G(x) = 200x - \left(\frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 125x + 900 \right)$ $G(x) = -\frac{1}{10}x^3 + 5x^2 + 75x - 900$ <p>Zur Berechnung des Gewinnmaximums ist die erste Ableitung zu betrachten.</p> $G'(x) = -\frac{3}{10}x^2 + 10x + 75.$ $-\frac{3}{10}x^2 + 10x + 75 = 0$ $x^2 - \frac{100}{3}x - 250 = 0$ $x_1 = 39,640\dots$ $x_2 = -6,306\dots \text{ im Sachkontext nicht relevant.}$ <p>Der Nachweis, dass es sich um ein Maximum handelt, kann z.B. über die 2. Ableitung von G erfolgen.</p> $G(39,640\dots) = 3700,897\dots$ <p>Es ergibt sich ein maximaler Gewinn von ca. 3700 GE, wenn ca. 40 Mengeneinheiten produziert und verkauft werden.</p>	10	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	<p><i>Lösungshinweis: die Punkte werden ins Koordinatensystem eingetragen und liegen fast auf einer Geraden. Deshalb kann eine einfache Modellierung mithilfe einer linearen Funktion vorgenommen werden. Die Abweichungen sind tolerierbar. Sinnvollerweise sollten sich die Schülerinnen geeignete Punkte auswählen, um die Funktionsvorschrift herzuleiten. Hier sind verschiedene Lösungen möglich. Exemplarisch wird hier mit Punkten gearbeitet, die zu dem Kontrollergebnis führen.</i></p> <p>$P(20;300), Q(40;250)$</p> $p(x) = mx + b$ $300 = 20m + b$ $250 = 40m + b$ $-50 = 20m$ $m = -2,5 \text{ und } b = 350.$ <p>Eine mögliche Preis(-Angebots-)funktion hat die Gleichung:</p> $p(x) = -2,5x + 350.$ <p><i>Eine Überprüfung ergibt, dass nur wenige Punkte nicht auf der Geraden liegen.</i></p> <p>(Argumentation mithilfe der Zeichnung allein reicht aus.)</p> <p>Der Erlös ergibt sich als Produkt aus Menge und Preis, d. h.</p> $E_2 = (-2,5x + 350) \cdot x \text{ bzw. } E_2 = -2,5x^2 + 350x.$			
		5	10	

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung																				
		I	II	III																		
d)	<p>Zur Berechnung des Gewinnbereichs: $E_2(x) = K_g(x)$</p> $\frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 125x + 900 = -2,5x^2 + 350x$ $\frac{1}{10}x^3 - 2,5x^2 - 225x + 900 = 0$ <p>Die erste Nullstelle liegt wieder bei $x = 60$, weitere Zerlegung (Polynomdivision oder Horner Schema) führt zu:</p> $x^3 - 25x^2 - 2250x + 9000 = 0$ $(x - 60)(x^2 + 35x - 150) = 0$ $x_1 = 3,860\dots$ $x_2 = -38,860\dots \text{ im Sachkontext nicht relevant.}$ <p>Damit ergibt sich als Gewinnzone $\approx 3,86 \leq x \leq 60$.</p> <p>Zur Berechnung der gewinnmaximalen Menge ist wieder die erste Ableitung der Gewinnfunktion zu betrachten.</p> $G_1(x) = -2,5x^2 + 350x - \frac{1}{10}x^3 + 5x^2 - 125x - 900$ $G_1(x) = +2,5x^2 + 225x - \frac{1}{10}x^3 - 900$ $G_1'(x) = 5x + 225 - \frac{3}{10}x^2 = 0$ $x^2 - \frac{50}{3}x - \frac{2250}{3} = 0$ $x = 36,95 \vee x \approx -20,29 \text{ im Sachkontext nicht relevant.}$ <p>Damit ergibt sich eine gewinnmaximale Menge von $x \approx 37$ Mengeneinheiten.</p> <p>Unterschiede zwischen beiden Ansätzen:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>Erlösfunktion</th> <th>Gewinnzone</th> <th>Gewinnmaximale Menge</th> <th>Maximaler Gewinn</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$E_1(x)$</td> <td>[9;60]</td> <td>40 ME</td> <td>3 700 GE</td> </tr> <tr> <td>$E_2(x)$</td> <td>[4;60]</td> <td>37 ME</td> <td>5 782,20 GE</td> </tr> </tbody> </table>	Erlösfunktion	Gewinnzone	Gewinnmaximale Menge	Maximaler Gewinn	$E_1(x)$	[9;60]	40 ME	3 700 GE	$E_2(x)$	[4;60]	37 ME	5 782,20 GE									
Erlösfunktion	Gewinnzone	Gewinnmaximale Menge	Maximaler Gewinn																			
$E_1(x)$	[9;60]	40 ME	3 700 GE																			
$E_2(x)$	[4;60]	37 ME	5 782,20 GE																			
e)	<p>Stückkosten: $K_{St}(x) = \frac{K_g(x)}{x} = \frac{1}{10}x^2 - 5x + 125 + \frac{900}{x}$.</p> <p>Wertetabelle:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>5</th> <th>10</th> <th>20</th> <th>30</th> <th>40</th> <th>50</th> <th>60</th> <th>70</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K_{St}</td> <td>282,5</td> <td>175</td> <td>110</td> <td>95</td> <td>107,5</td> <td>143</td> <td>200</td> <td>277,85</td> </tr> </tbody> </table>	x	5	10	20	30	40	50	60	70	K_{St}	282,5	175	110	95	107,5	143	200	277,85			
x	5	10	20	30	40	50	60	70														
K_{St}	282,5	175	110	95	107,5	143	200	277,85														
							10	5														

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
<p>Die Schraffur ist das Ergebnis von Teilaufgabe g).</p>		5	5	
f)	<p>Eine Bestätigung ist z. B. über das Einsetzen des Wertes in die Ableitungen möglich. Wenn die Stückkosten bei $x = 30$ minimal sind, muss gelten:</p> $K'_{St}(30) = 0 \text{ und } K''_{St}(30) > 0.$ $K'_{St}(x) = \frac{1}{5}x - 5 - \frac{900}{x^2}$ $K'_{St}(30) = 0.$ $K''_{St}(x) = \frac{1}{5} + \frac{1800}{x^3} > 0 \text{ für alle } x > 0.$		10	
g)	<p>Zu schraffieren ist die Fläche zwischen, die die Graphen von p und K_{St} einschließen (siehe oben).</p>		10	

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
h)	<p><i>Ansatz:</i> $\frac{1}{30} \cdot \int_{20}^{50} (p(x) - K_{st}(x)) dx.$</p> <p>Es sei $v(x) = p(x) - K_{st}(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 2,5x + 225 - \frac{900}{x}.$</p> <p>Mit $V(x) = -\frac{1}{30}x^3 + \frac{2,5}{2}x^2 + 225x - 900 \cdot \ln x$ ist V eine Stammfunktion von $v.$</p> <p>$V(50) = 6687,51$ und $V(20) = 2037,2.$</p> <p>$\frac{1}{30} \cdot (6687,51 - 2037,2) = 155,010\dots$</p> <p>Es ergibt sich damit eine durchschnittliche Differenz von 155 GE.</p> <p><i>Möglich wäre auch die Berechnung des Mittelwertes unter Benutzung der Daten aus der Tabelle.</i></p>			10
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15

II.1 Kirchturm

Das Kupferdach des Kirchturms einer kleinen Kirche besteht aus einem Pyramidenstumpf, einem aufgesetzten Quader und einer auf den Quader aufgesetzten Pyramide (siehe Abbildung).

In den Kirchenbüchern befinden sich folgende Angaben:

Pyramidenstumpf:

Grundfläche: Quadrat mit der Seitenlänge 8 m

Deckfläche: Quadrat mit der Seitenlänge 6 m.

Höhe: 2 m

Quader:

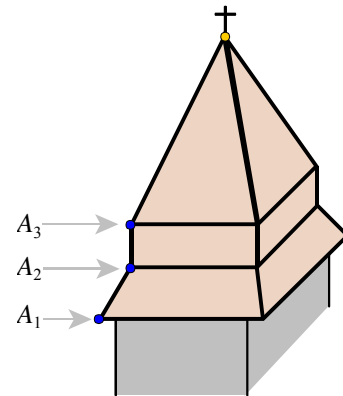
Grund- und Deckfläche: Quadrat mit der Seitenlänge 6 m.

Höhe: 2 m

Pyramide:

Grundfläche: Quadrat mit der Seitenlänge 6 m.

Höhe: 6 m



- a) Berechnen Sie den Inhalt der gesamten Dachfläche, zu der auch die vier Seiten des Quaders gehören. **15 P**
- b) Untersuchen Sie, ob die unteren Dachflächen des Pyramidenstumpfes und die zugehörigen oberen Dachflächen der Pyramide parallel sind.
Geben Sie die jeweiligen Neigungswinkel auch in Grad an. **15 P**
- c) Nun soll ein Schrägbild des Kirchturms im Koordinatensystem der Anlage angefertigt werden. Die Spitze des Turmdaches liege dabei auf der x_3 -Achse und heiße S , die Kanten der Grundfläche liegen in der x_1 - x_2 -Ebene und die Kanten der Deckflächen verlaufen parallel zur x_1 - bzw. x_2 -Achse. Auf allen Achsen gilt: 1 LE \square 1 m.
In der unteren Ebene sollen die Eckpunkte A_1, B_1, C_1, D_1 heißen (von oben gesehen gegen den Uhrzeigersinn), entsprechend in der mittleren Ebene A_2, B_2, C_2, D_2 und in der oberen Ebene A_3, B_3, C_3, D_3 .
Dabei liegen dann A_1, A_2 und A_3 so auf einer Dachkante, wie oben in der nicht maßstabsgetreuen Abbildung dargestellt.
Geben Sie in der Anlage die fehlenden Koordinaten der acht Punkte an und zeichnen Sie das Dach in das Koordinatensystem ein. **15 P**
- d) Es soll ein Stützbalken eingezeichnet werden, der von der Mitte M_3 der Dachkante $\overline{C_3D_3}$ die gegenüberliegende Dachfläche A_3B_3S in einem Punkt P senkrecht abstützt.
- Zeigen Sie, dass der Punkt $P(1,8 | 0 | 6,4)$ die angegebenen Eigenschaften hat.
 - Berechnen Sie die Länge des Balkens (ohne Berücksichtigung seiner Dicke).
 - Begründen Sie: Nicht bei jedem Dachstuhl in Form einer quadratischen Pyramide ist es möglich, vom Mittelpunkt M einer Kante der Grundfläche aus die gegenüberliegende dreieckige Dachfläche F senkrecht abzustützen. **30 P**

e) Ein weiterer Stützbalken soll von A_3 aus die diagonal gegenüberliegende Kante von C_3 nach S im Punkt $Q(-1 | 1 | 8)$ abstützen.

- Zeigen Sie, dass dieser Balken mit jenem aus Teilaufgabe d) nicht kollidiert, wenn man die Dicke der Balken nicht berücksichtigt.
- Zeigen Sie die Richtigkeit der folgenden drei Aussagen:
 1. Der Punkt O_1 mit $O_1\left(\frac{6}{7} | 0 | \frac{83}{14}\right)$ liegt auf dem Balken von M_3 nach P (Teilaufgabe d)).
 2. Der Punkt O_2 mit $O_2\left(\frac{9}{14} | -\frac{9}{14} | \frac{89}{14}\right)$ liegt auf dem Balken von A_3 nach Q .
 3. Die Strecke $\overline{O_1O_2}$ verläuft senkrecht zu beiden Balken.

Hinweis: Die Rechnung wird übersichtlicher, wenn Sie geeignet ausklammern:

$$O_1: \left(\frac{6}{7} | 0 | \frac{83}{14}\right) = \frac{1}{14} \cdot (12 | 0 | 83) \text{ bzw. } O_2: \left(\frac{9}{14} | -\frac{9}{14} | \frac{89}{14}\right) = \frac{1}{14} \cdot (9 | -9 | 89).$$

- Bestimmen Sie nun begründet, bis zu welcher „Dicke“ beide Balken problemlos eingebaut werden können.

25 P

Anlage zur Aufgabe „Kirchturm“

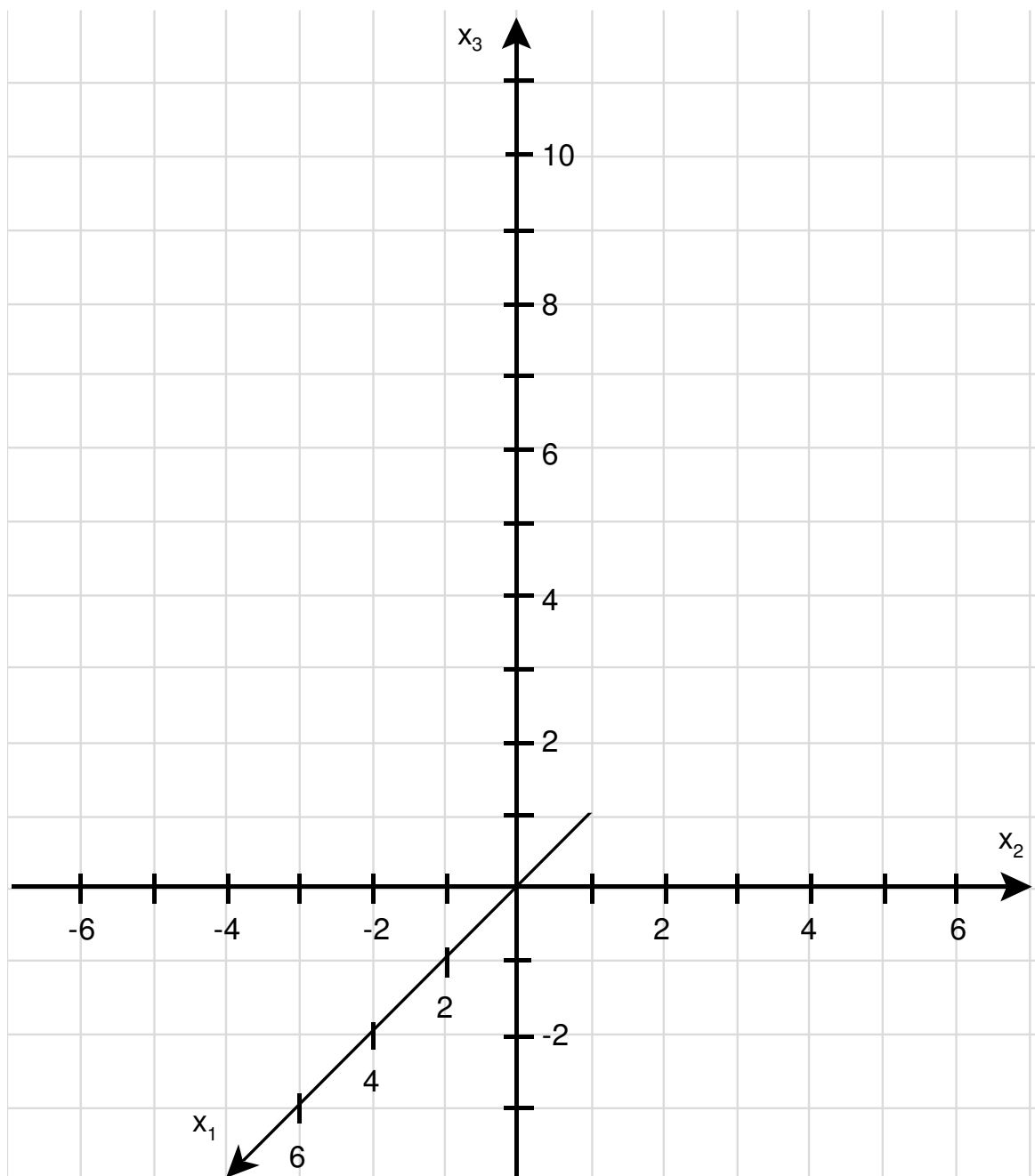
Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten.

$$A_1(\quad | \quad | \quad), \quad B_1(\quad | \quad | \quad), \quad C_1(\quad | \quad | \quad), \quad D_1(\quad | \quad | \quad),$$

$$A_2(\quad | \quad | \quad), \quad B_2(\quad | \quad | \quad), \quad C_2(\quad | \quad | \quad), \quad D_2(\quad | \quad | \quad),$$

$$A_3(3 | -3 | 4), \quad B_3(3 | 3 | 4), \quad C_3(-3 | 3 | 4), \quad D_3(-3 | -3 | 4),$$

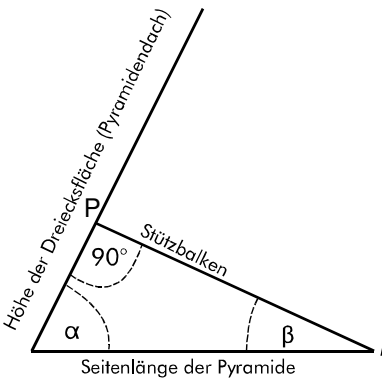
$$S(0 | 0 | 10).$$



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Die gesamte Dachfläche besteht aus jeweils vier kongruenten</p> <ul style="list-style-type: none"> – Trapezflächen – Rechtecksflächen – Dreiecksflächen. <p><u>Berechnung einer Trapezfläche:</u></p> <p>Grundseite unten: 8 m; Grundseite oben: 6 m. Die Trapezhöhe kann man auffassen als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen 2 m (Höhe des Pyramidenstumpfes) und 1 m (halbe Differenz der Seitenlängen von Grundquadrat und Deckquadrat).</p> <p>Mit dem Satz des Pythagoras erhält man die Trapezhöhe: $h_T = \sqrt{5}$ m.</p> <p>Der Inhalt einer Trapezfläche beträgt also: $\frac{8+6}{2} \cdot \sqrt{5} \text{ m}^2 = 7 \cdot \sqrt{5} \text{ m}^2 \approx 15,65 \text{ m}^2$.</p> <p><u>Berechnung einer Rechtecksfläche:</u></p> <p>Seitenlänge: 6 m, Höhe: 2 m. Flächeninhalt: 12 m².</p> <p><u>Berechnung einer Dreiecksfläche :</u></p> <p>Länge der Grundseite: 6 m. Die Dreieckshöhe kann man auffassen als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen 6 m (Höhe der Pyramide) und 3 m (halbe Seitenlänge des Grundquadrats).</p> <p>Mit dem Satz des Pythagoras erhält man die Dreieckshöhe:</p> $h_\Delta = \sqrt{45} \text{ m} = 3 \cdot \sqrt{5} \text{ m}.$ <p>Der Inhalt einer Dreiecksfläche beträgt also: $3 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \text{ m}^2 \approx 20,12 \text{ m}^2$.</p> <p><u>Das gesamte Kirchturmdach hat also folgenden Flächeninhalt:</u></p> $A_D = 4 \cdot (7\sqrt{5} + 12 + 9\sqrt{5}) \text{ m}^2 = 4 \cdot (16\sqrt{5} + 12) \text{ m}^2 \approx 191 \text{ m}^2.$	15		
b)	<p>In den in a) betrachteten rechtwinkligen Dreiecken tauchen die Neigungswinkel der betreffenden Dachfläche auf:</p> <p>Trapezfläche (am Kegelstumpf): $\tan(\alpha) = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63,4^\circ$.</p> <p>Dreiecksfläche (an der Pyramide): $\tan(\beta) = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow \beta \approx 63,4^\circ$.</p> <p>Die Neigungswinkel sind gleich, die betrachteten Flächen sind also parallel. Wegen der Symmetrie der Figur gilt die Aussage auch für die anderen Seiten. <i>Nachweis kann auch mit Methoden der Analytischen Geometrie geführt werden.</i></p>	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	<p>Gesuchte Koordinaten: $A_1(4 \mid -4 \mid 0)$, $B_1(4 \mid 4 \mid 0)$, $C_1(-4 \mid 4 \mid 0)$, $D_1(-4 \mid -4 \mid 0)$, $A_2(3 \mid -3 \mid 2)$, $B_2(3 \mid 3 \mid 2)$, $C_2(-3 \mid 3 \mid 2)$, $D_2(-3 \mid -3 \mid 2)$. Gegebene Koordinaten (Eckpunkte Quaderdeckfläche, Kirchturmspitze): $A_3(3 \mid -3 \mid 4)$, $B_3(3 \mid 3 \mid 4)$, $C_3(-3 \mid 3 \mid 4)$, $D_3(-3 \mid -3 \mid 4)$, $S(0 \mid 0 \mid 10)$.</p>	5	10	
d)	<p><u>Nachweis der Behauptung:</u> Für den Mittelpunkt M_3 der Dachkante von C_3 nach D_3 gilt $M_3(-3 \mid 0 \mid 4)$.</p> <p>Mit dem gegebenen Punkt $P(1,8 \mid 0 \mid 6,4)$ folgt $\overrightarrow{M_3P} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 0 \\ 2,4 \end{pmatrix}$.</p> <p>Die Ebene E, in der die Dachfläche A_3B_3S liegt, hat z. B. folgende Gleichung:</p> $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$ <p>Es gilt: $\begin{pmatrix} 4,8 \\ 0 \\ 2,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = 0 \wedge \begin{pmatrix} 4,8 \\ 0 \\ 2,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 0.$</p>			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Daraus folgt: $\overrightarrow{M_3P} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 0 \\ 2,4 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E,</p> <p>da er auf deren beiden Richtungsvektoren senkrecht steht:</p> <p>P ist zudem ein Punkt der Ebene E, weil aus $\begin{pmatrix} 1,8 \\ 0 \\ 6,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$</p> <p>folgt: I $3r + 3s = 1,8$ II $-3r + 3s = 0$ III $10 - 6r - 6s = 6,4$</p> <p>Aus II folgt $r = s$, woraus eingesetzt in I $6s = 1,8$ folgt, also $r = s = 0,3$. Probe mit III: $10 - 6 \cdot 0,3 - 6 \cdot 0,3 = 10 - 1,8 - 1,8 = 6,4$.</p> <p>$P$ ist ein Punkt der Dachfläche $A_3 B_3 S$, denn für die x_1-Koordinate 1,8 gilt: $0 < 1,8 < 3$ und für die x_3-Koordinate 6,4 gilt: $4 < 6,4 < 10$.</p> <p><i>Es kann auch elementargeometrisch argumentiert werden: da P in der x_1-x_3-Ebene liegt, genügt es zu zeigen, dass P Punkt der Höhe des Dreiecks $A_3 B_3 S$ mit den Endpunkten S und $(3 0 4)$ ist.</i></p> <p><u>Berechnung der Länge des Balkens:</u></p> <p>$\overrightarrow{M_3P} = \sqrt{4,8^2 + 0 + 2,4^2} = 5,3665\dots$. Damit ist der Balken ca. 5,40 m lang.</p> <p><u>Lösung ist nicht immer möglich:</u></p>  <p>Die Winkel α und β ergänzen sich zu 90°: je kleiner α wird, desto größer wird β.</p> <p>In Abhängigkeit von der Höhe des Dreiecks und der Seitenlänge der Pyramide kann bei großem Winkel β die Situation eintreten, dass das Lot die Seitenfläche nicht mehr trifft.</p> <p><i>Auch die Angabe eines konkreten Beispiels ist als Begründung natürlich korrekt.</i></p>	5	15	10
e)	<p>Um die Aussage zu beweisen, muss man zeigen, dass die Geraden durch M_3 und P einerseits und die Gerade durch A_3 und Q andererseits keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Die Gerade durch M_3 und P heiße g, die Gerade durch A_3 und Q heiße h. Dann gilt:</p> <p>$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4,8 \\ 0 \\ 2,4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.</p>			

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>I $-3 + 4,8r = 3 - 4s$</p> <p>II $0 = -3 + 4s$</p> <p>III $4 + 2,4r = 4 + 4s$</p> <p>Aus II folgt: $0 = -3 + 4s$ und daher $s = \frac{3}{4}$.</p> <p>Setzt man diesen Wert in I ein, so folgt $-3 + 4,8r = 3 - 3$, also $r = \frac{3}{4,8} = \frac{5}{8}$.</p> <p>Setzt man beide Werte in III ein, so folgt auf der linken Seite: $4 + 1,5 = 5,5$ und auf der rechten Seite: $4 + 3 = 7$.</p> <p>Da die beiden Seiten von III verschieden sind, gibt es keinen Schnittpunkt der beiden Geraden.</p> <p><u>Begründungen:</u></p> <p>1. $O_1: \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ 0 \\ \frac{83}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{45}{56} \cdot \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ 0 \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$. Da $0 < \frac{45}{56} < 1$, liegt O_1 zwischen M_3 und P.</p> <p>2. $O_2: \begin{pmatrix} \frac{9}{14} \\ -\frac{9}{14} \\ \frac{89}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{33}{56} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Da $0 < \frac{33}{56} < 1$, liegt O_2 zwischen A_3 und Q.</p> <p>3. $\overline{O_1O_2} = \frac{3}{14} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft senkrecht zu $\overline{M_3P}$, denn $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.</p> <p>$\overline{O_1O_2} = \frac{3}{14} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft senkrecht zu $\overline{A_3Q}$, denn $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.</p> <p><u>Abstand:</u> Die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen den beiden Balken muss senkrecht zu jedem der Balken stehen. Das trifft zu für $\overline{O_1O_2}$, also ist die Länge der Strecke von O_1 nach O_2 der „Abstand“ zwischen den beiden Geraden g und h.</p> <p>$\overline{O_1O_2} = \frac{3}{14} \cdot \left \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right = \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14} \approx 0,8$.</p> <p>Solange die halbe Summe der beiden Durchmesser (jeweils vom Umkreis der Schnittfläche) kleiner als 80 cm ausfällt, ist der Einbau der beiden Stützen ohne Probleme möglich.</p>			
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

II.2 Heuschrecken

Berichte über Heuschreckenplagen liegen seit vorchristlicher Zeit z. B. aus dem alten Ägypten vor. Wanderheuschrecken haben die Fähigkeit, ihr Verhalten zu ändern, sich zu Schwärmen zusammenzuschließen und in diesen Schwärmen große Entfernungen zurückzulegen.

In „ruhigen“ Jahren ist der Lebensraum der Wanderheuschrecke auf die trockenen und halbtrockenen Wüsten Afrikas, des Nahen Ostens und Südwestasiens auf ein Gebiet von ca. 16 Millionen Quadratkilometern beschränkt. Während einer Plage können sich Wanderheuschrecken hingegen über ein Gebiet von ca. 29 Millionen Quadratkilometern verbreiten. In Abhängigkeit von Umwelteinflüssen und davon, ob Wanderheuschrecken vereinzelt oder in Schwärmen leben, entwickeln sich diese Populationen sehr unterschiedlich.

Die Lebensstadien einer Heuschrecke werden im Folgenden durch Eier (E), Larven 1 (L_1), Larven 2 (L_2), Larven 3 (L_3), Larven 4 (L_4) und Adulte (A) beschrieben, die sie der Reihe nach durchläuft. Nur adulte (ausgewachsene) weibliche Heuschrecken legen Eier.

Das Geschlechterverhältnis in den betrachteten Populationen ist 1:1.

- a) Eine Population von Heuschrecken wird durch den Vektor $\begin{pmatrix} E \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ A \end{pmatrix}$ beschrieben.

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Zeitspannen, in denen sich die Heuschrecken von einem Lebensstadium zum nächsten entwickeln, gleich sind. Dieser Zeitabschnitt beträgt 10 Tage. Für eine Population gilt:

Aus 8 % der Eier eines Geleges entwickeln sich Larven 1.

Die Überlebenswahrscheinlichkeit für die Larven 1 beträgt 72 %, für L_2 und L_3 jeweils 76 %.

Aus 89 % der Larven 4 werden adulte Heuschrecken, 70 % der adulten Heuschrecken überleben die nächsten 10 Tage.

Jede weibliche adulte Heuschrecke legt pro Zeitabschnitt von 10 Tagen ein Gelege mit 120 Eiern.

Stellen Sie die Entwicklung dieser Population in einem Übergangsgraphen dar.

15 P

- b) Entscheiden Sie, ob die Matrix M mit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0,08 & 0,72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,72 & 0,76 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,76 & 0,76 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,76 & 0,89 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,89 & 0,7 \end{pmatrix}$$

zur Modellierung des in a) dargestellten Sachverhalts geeignet ist.

Erstellen Sie gegebenenfalls eine Populationsmatrix, die den Sachverhalt aus a) richtig wiedergibt.

15 P

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

- c) Eine Heuschreckenpopulation setzt sich zum Untersuchungszeitpunkt aus ca. 15000 Eiern, aus 1300 Larven 1, aus 1000 Larven 2, aus 800 Larven 3, aus 600 Larven 4 und aus 400 adulten Heuschrecken zusammen.
Berechnen Sie mit Hilfe der zur Modellierung geeigneten Populationsmatrix aus b), wie sich unter den in Aufgabenteil a) vorgegebenen Bedingungen diese Heuschreckenpopulation nach einem Zeitabschnitt von 10 Tagen entwickelt hat. **10 P**

In den Aufgabenteilen d) und e) geht es nur um adulte Heuschrecken.

Wenn Wanderheuschrecken sich zu Schwärmen zusammengeschlossen haben, verringert sich die Größe der Gelege. Gehen Sie von durchschnittlich 70 Eiern pro Gelege aus. Gehen Sie außerdem davon aus, dass ein ausgewachsenes Weibchen im Schnitt fünfmal Eier legt, bevor es stirbt. Die Überlebensraten für Eier und Larven seien unverändert diejenigen aus Teil a).

- d) Zeigen Sie, dass von den Nachkommen eines Heuschreckenweibchens im Durchschnitt 10,36 das „Erwachsenenalter“ erreichen, also Adulte werden. **15 P**
- e) Zu Beobachtungsbeginn besteht ein Heuschreckenschwarm aus ca. 30 Millionen erwachsenen (adulten) Heuschrecken. Diese werden als „Generation 0“ (G_0) bezeichnet.

- Begründen Sie, dass man mit der Formel $G_n = G_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 10,36\right)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der adulten Heuschrecken in der n -ten Folgegenerationen berechnen kann.
- Bestimmen Sie die Anzahl der adulten Heuschrecken in der 4. Folgegeneration. **20 P**

Heuschreckenschwärme richten riesige Schäden in der Landwirtschaft an. Eine erwachsene Heuschrecke frisst pro Tag etwa 2 g Pflanzenmasse.

- f) Bestimmen Sie näherungsweise mit Hilfe einer Abschätzung aus den bisherigen Ergebnissen, wie viel Pflanzenmasse der Heuschreckenschwarm aus e) bis einschließlich der 4. Folgegeneration vernichtet hat.
Gehen Sie davon aus, dass eine erwachsene Heuschrecke im Schnitt 50 Tage lebt.
Beurteilen Sie das Ergebnis Ihrer Schätzung. **25 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Zu beachten ist, dass am Pfeil von A zu E eine 60 erscheint. Nur die Weibchen legen Eier.</p>	10	5	
b)	<p>Falsch sind die Matrixelemente a_{ii}, mit $i = 2, 3, 4, 5$. Da sich nach Voraussetzung die Heuschreckenlarven nach jeweils 10 Tagen in das nächste Stadium entwickelt haben, müssen dort Nullen stehen.</p> <p>Die richtige Matrix lautet daher:</p> $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0,08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,76 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,76 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,89 & 0,7 \end{pmatrix}$	5	10	
c)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0,08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,76 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,76 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,89 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15000 \\ 1300 \\ 1000 \\ 800 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24000 \\ 1200 \\ 936 \\ 760 \\ 608 \\ 814 \end{pmatrix}$ <p>Nach einem Beobachtungsabschnitt von 10 Tagen setzt sich die Heuschreckenpopulation aus ca. 24 000 Eiern, 1200 Larven 1, 900 Larven 2, 800 Larven 3, 600 Larven 4 und 800 adulten Heuschrecken zusammen.</p> <p><i>Wenn nicht auf Hunderter gerundet wird, sondern eine Genauigkeit bis auf einzelne Individuen im Antwortsatz angegeben wird, so führt dies zu einem Abzug von einem Punkt von der Gesamtpunktzahl.</i></p> <p><i>Wird mit einer falschen Matrix aus b) folgerichtig weitergerechnet, führt dies nicht zu Punktabzug.</i></p>	10		
d)	<p>Von den fünf Gelegen mit je 70 Eiern entwickeln sich nach den Vorgaben aus a) $5 \cdot 70 \cdot 0,08 \cdot 0,72 \cdot 0,76 \cdot 0,76 \cdot 0,89 \approx 10,36$ zu adulten Heuschrecken.</p>		15	

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	<p>Nach Voraussetzung beträgt das Geschlechterverhältnis 1:1. Die Hälfte der Heuschrecken sind Weibchen, von deren Nachkommen dann nach d) im Schnitt 10,36 das Erwachsenenalter erreichen.</p> $G_0 = 30$ $G_4 = G_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 10,36\right)^4 = 30 \cdot 5,18^4 \approx 21\,599$ <p>Die Anzahl der adulten Nachkommen in der 4. Generation beträgt ca. 21 599 Millionen Heuschrecken.</p>		10	10
f)	<p><i>Hier sind recht unterschiedliche Lösungswege und damit auch Ergebnisse und deren Beurteilung möglich. Für die volle Punktzahl muss das exponentielle Wachstum beachtet werden und müssen die Schäden, die von der gesamten Population angerichtet werden, Erwähnung finden.</i></p> <p>Um die Anzahl der adulten Heuschrecken, die im vorgegebenen Zeitraum gelebt und gefressen haben, abzuschätzen, kann man z. B. die Summe $G_0 + G_1 + G_2 + G_3 + G_4$ betrachten.</p> $30 \cdot (1 + 5,18 + 5,18^2 + 5,18^3 + 5,18^4) \approx 26\,759$ <p>Insgesamt sind es einschließlich der 4. Generation 26 759 Millionen Tiere.</p> <p>Eine erwachsene Heuschrecke frisst nach Voraussetzung 100 g an Pflanzenmasse, eine Million Adulter also 100 Tonnen. Geht man von dem Schätzwert von 26 759 Millionen erwachsener Tiere aus, so wurden 2 675 900 Tonnen an Pflanzenmasse vernichtet.</p> <p>Nicht berücksichtigt wurden hierbei die Schäden, die durch die Larven angerichtet wurden.</p>		10	5
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

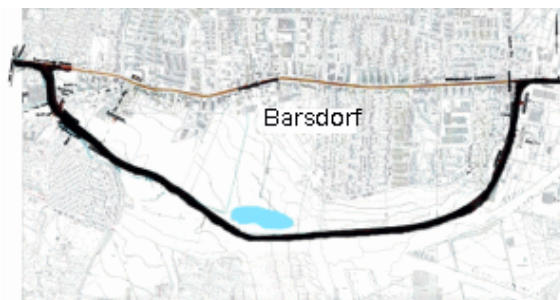
STOCHASTIK 1

III.1 Umgehungsstraße

Die Gemeinde Barsdorf plant eine Umgehungsstraße. Dieses Projekt ist bei den Barsdorfer Bürgern und Kommunalpolitikern gleichermaßen umstritten. Bei der letzten Gemeinderatswahl erhielten die Parteien in Barsdorf folgende Stimmenanteile: DCU 44,1 %, DPS 35,4 %, AFB 12,5 %, Sonstige 8 %.

Die Wahlbeteiligung betrug trotz des kontroversen Themas nur 75,5 %.

Eine Bürgerinitiative legt eine Umfrage vor, nach der in Barsdorf 47,5 % der DCU-Wähler, 75,3 % der DPS-Wähler und 94,5 % der AFB-Wähler gegen den Bau der Umgehungsstraße sind. Von den Wählern der restlichen Parteien und den Nichtwählern haben sich in der Umfrage jeweils 43,6 % gegen die Umgehungsstraße ausgesprochen.



a) Bestätigen Sie aus den Ergebnissen der Wahl und der Umfrage, dass ungefähr $p = 40\%$ der wahlberechtigten Bürger von Barsdorf die Umgehungsstraße befürworten. **20 P**

b) Stellen Sie die genannten Ergebnisse aus der Wahl und der Umfrage grafisch so dar, dass möglichst viele Informationen ablesbar sind. **15 P**

In den folgenden Aufgabenteilen sollen Sie mit $p = 60\%$ Gegnern der Umgehungsstraße und 40% Befürwortern rechnen.

c) Aufgrund des Umfrageergebnisses fordert die Bürgerinitiative einen Volksentscheid über den Bau der Umgehungsstraße. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 50 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten in Barsdorf mehr als die Hälfte gegen den Bau der Umgehungsstraße stimmen würden, falls die Umfrageergebnisse der Bürgerinitiative richtig sind.. **15 P**

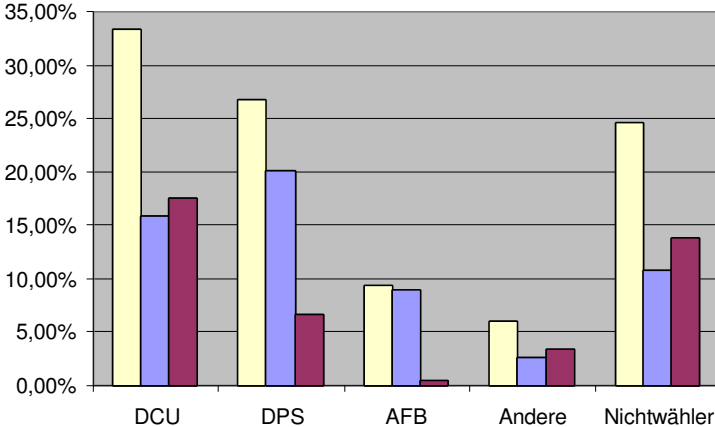
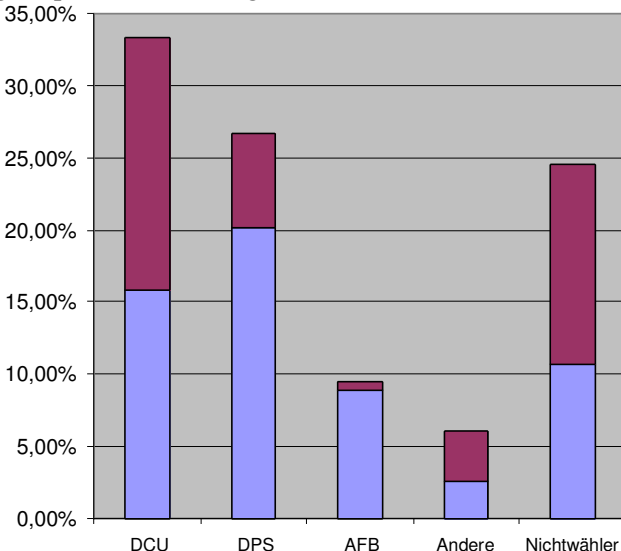
d) Die Bürgerinitiative führt eine Unterschriftensammlung gegen die Umgehungsstraße durch. Dabei gibt ein Bürger an, gegen die Umgehungsstraße zu sein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei diesem Bürger um einen DCU-Wähler handelt. **15 P**

e) Auf einer Mitgliederversammlung der DCU haben sich 855 von 1298 Anwesenden gegen den Bau der Umgehungsstraße ausgesprochen. In der nächsten Ausgabe des Wochenblatts wird von einem deutlichen Meinungswandel innerhalb der DCU gesprochen. Ermitteln Sie, ob sich diese Behauptung der Zeitung statistisch rechtfertigen lässt. **20 P**

f) Trotz des Ergebnisses in e) hält der Bürgermeister von Barsdorf an der Umgehungsstraße fest. Er will mit Hilfe einer erneuten zufälligen Befragung von Barsdorfer Bürgern argumentieren, dass die Umgehungsstraße mehrheitsfähig ist. Er hofft, dass dann eine Mehrheit der Befragten für die Umgehungsstraße stimmt. Er kennt sich mit den Manipulationsmöglichkeiten statistischer Verfahren gut aus und überlegt, ob er bei einem Hypothesentest als Nullhypothese $p \leq 50\%$ oder $p \geq 50\%$ wählen sollte, und ob er eher eine größere ($n = 100$) oder eine kleinere ($n = 50$) Stichprobengröße wählen sollte, um sein Ziel zu erreichen.

Beurteilen Sie dieses Problemfeld, indem Sie einen möglichen Plan des Bürgermeisters bestimmen. **15 P**

Erwartungshorizont

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Der Anteil der Gegner beträgt:</p> $G = 0,755 \cdot (0,441 \cdot 0,475 + 0,354 \cdot 0,753 + 0,125 \cdot 0,945 + 0,436 \cdot 0,080) + 0,436 \cdot 0,245$ $\approx 0,582 \approx 60 \%$ <p>$B = 100 \% - G = 40 \%$ ist der Anteil der Befürworter der Umgehungsstraße.</p>	20		
b)	<p>Es gibt mehrere Möglichkeiten der grafischen Darstellung:</p>  <p>Die Säulen, die jeweils links stehen, beziehen sich auf die erwähnte Gemeinderatswahl und geben den Anteil aller Wahlberechtigten von Barsdorf an, die mittleren Säulen stehen jeweils für die Gegner, die Säulen rechts stehen jeweils für die Befürworter der Umgehungsstraße.</p> <p>Alternative: gestapeltes Säulendiagramm:</p> 			

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	<p>Unten sind die Gegner der Umgehungsstraße dargestellt, oben stehen die Befürworter. Die Gesamtsäule gibt den jeweiligen Anteil aller Wahlberechtigten bei der erwähnten Gemeinderatswahl an.</p> <p><i>Anmerkung:</i> <i>Eine Darstellung, bei der die Verbindung des Wahlergebnisses mit der Umfrage nicht deutlich wird, führt nicht zur vollen Punktzahl.</i></p>	5	10	
c)	<p>Da die Einwohnerzahl von Barsdorf groß ist im Verhältnis zur Stichprobe, kann hier vereinfachend die Binomialverteilung für die Anzahl G der Gegner verwendet werden.</p> <p>Mehr als die Hälfte der Befragten sind mindestens 26 Personen. Gesucht ist:</p> $P(G \geq 26) = 1 - \sum_{i=0}^{25} B(50; 0,6; i) = \sum_{i=0}^{24} B(50; 0,4; i) \approx 0,90 = 90\% .$ <p>Der Wert ist aus der Tabelle der summierten Binomialverteilung entnommen.</p>		15	
d)	<p>Es ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit zu bestimmen. Man kann ein Baumdiagramm verwenden oder direkt den Satz von Bayes. Es gilt:</p> $P_{\text{Gegner}}(\text{DCU - Wähler}) = \frac{0,755 \cdot 0,441 \cdot 0,475}{0,6} \approx \frac{0,158}{0,6} \approx 0,26 .$ <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Unterzeichner DCU-Wähler ist, beträgt 26 %.</p>		15	
e)	<p><i>Bemerkung:</i> je nach Unterrichtsverlauf sind hier mehr oder weniger scharfe Argumentationen zu erwarten, z.B.</p> <p>In der Versammlung haben sich $\frac{855}{1298} \approx 0,66 = 66\%$ der Anwesenden gegen die Umgehungsstraße ausgesprochen. Das sind deutlich mehr als die 47,5 %, die vorher diese Meinung hatten.</p> <p>Zu untersuchen ist, ob es sich dabei um eine zufällige Schwankung aufgrund der Stichprobe handelt.</p> <p>Wenn kein Meinungswandel eingetreten wäre, hätte die obige Stichprobe folgenden Erwartungswert und folgende Standardabweichung:</p> $E = n \cdot p = 1298 \cdot 0,475 = 616,6 \approx 617 ,$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{1298 \cdot 0,475 \cdot 0,525} \approx 17,99 \approx 18 ,$ $2 \cdot \sigma \approx 36 .$ <p>Wenn die Anzahl der Gegner unter $E + 2 \cdot \sigma \approx 653$ bleibt, kann man noch von einer zufälligen Abweichung ausgehen. Die Wahrscheinlichkeit für Umfrageergebnisse mit <u>mehr</u> als 653 Gegnern unter den 1298 befragten DCU-Mitgliedern ist unter der Annahme, dass kein Meinungswandel eingetreten ist, dann nur ca. 2%. Die Behauptung der Zeitung ist also glaubhaft.</p>			

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	<i>Hinter dieser- nicht ganz ausgeschärften - Argumentation steckt entweder eine Betrachtung über ein Vertrauensintervall oder ein Hypothesentest mit der Nullhypothese $H_0 : p \leq 0,475$, die auf dem 5%-Niveau verworfen werden kann, wenn mehr als ca. 653 der 1298 anwesenden DCU-Wähler gegen die Umgehungsstraße votieren. Die Unschärfe liegt darin, dass nicht deutlich gemacht wird, ob hier über Abweichungen von 47,5 % nach oben oder überhaupt argumentiert wird. Statt von 2 % könnte also auch von 5 % gesprochen werden.</i>		5	15
f)	<p>Wenn sich die Situation nicht grundlegend geändert hat, dürfte es dem Bürgermeister kaum gelingen, Umfragedaten so zu erhalten, dass statistisch solide argumentiert werden kann, dass eine Mehrheit für die Umgehungsstraße ist. Aber folgende „windige“ in den Medien nicht unübliche Manipulationsmöglichkeiten wären denkbar:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Er hofft auf eine Mehrheit für die Umgehungsstraße <u>innerhalb seiner Stichprobe</u> (das kann vor allem <u>bei geringer</u> Stichprobengröße leicht passieren) und argumentiert danach unsolide mit <u>dieser</u> „Mehrheit“, • oder noch raffinierter: er wählt einen Hypothesentest mit der Nullhypothese, dass die Bürger mehrheitlich für den Bau der Umgehungsstraße seien. Wenn er z. B. als Stichprobengröße $n = 50$ ($n = 100$) wählt, dann kann die Hypothese auf dem 5%-Niveau erst verworfen werden, wenn mehr als 31 (58) Bürger gegen den Bau stimmen. Diese beiden Tests hätten bei unverändert angenommenem $p = 0,6$ β-Fehler-Wahrscheinlichkeiten von 66 % (bzw. 38 %). Vor allem bei einer kleinen Stichprobe ist diese also sehr hoch. Die unsolide Argumentation läge dann darin, dass behauptet werden würde, dass die Nullhypothese gilt, obwohl im Falle, dass keine Signifikanz vorliegt, gar kein Schluss aus den Umfragedaten gezogen werden kann. 		10	5
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

STOCHASTIK 2

III.2 Würfelprobleme

Der Würfel ist Bestandteil vieler Glücks- und Gesellschaftsspiele. Dabei hat das Ergebnis „6“ häufig eine besondere Bedeutung.

Für das **Werfen mit drei Würfeln** (gleichzeitig oder hintereinander) lassen sich unterschiedliche Fragestellungen betrachten, z.B. die nach der Anzahl X der gewürfelten Sechsen oder die nach der Augensumme S .

Beim Spiel „chuck-a-luck“ entscheidet die Anzahl der Sechsen über die Gewinnhöhe.

Beim „Mensch-ärgere-dich-nicht“-Spiel darf der Spieler seine Spielfigur nur in das Spiel bringen, wenn er mit einem Würfel eine Sechs wirft – dies darf er zu Beginn dreimal nacheinander versuchen. In den Aufgabenteilen a) bis e) handelt es sich um faire Würfeln, d.h. jede Augenzahl $(1, \dots, 6)$ hat die gleiche Wahrscheinlichkeit.

- a) Berechnen Sie für das Spiel „chuck-a-luck“ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
A: „Es fällt keine Sechs“ und
B: „Es fallen drei Sechsen“.
- 10 P**
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim Spiel „Mensch-ärgere-dich-nicht“ zu Beginn eine Spielfigur in das Spiel zu bringen.
- 10 P**

Der Fürst der Toskana wandte sich zu Beginn des 17. Jahrhunderts in einem Brief an Galileo Galilei (1564-1642) mit folgendem Problem: „Beim gleichzeitigen Wurf von drei gleich aussehenden Würfeln konnte ich beobachten, dass die Summe 11 häufiger erschien als die Summe 12 und die Summe 10 häufiger als die Summe 9. Jedoch können meiner Meinung nach alle diese Summen auf genau gleich viele Arten entstehen, nämlich auf sechs Arten und sind demzufolge gleich wahrscheinlich.“

- c) Untersuchen Sie die Aussagen des Fürsten zur Wahrscheinlichkeit und begründen Sie Ihre Einschätzung.
Sie können dabei voraussetzen, dass das gleichzeitige Werfen von drei (gleich aussehenden) Würfeln und das Hintereinanderwerfen dieser Würfel in Bezug auf die Augensumme äquivalente Zufallsexperimente sind. Argumentieren Sie deshalb mit einem gedachten Baumdiagramm.
- 20 P**
- d) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Augensumme von drei Würfeln ist symmetrisch. Beschreiben Sie diese Symmetrieeigenschaft.
- 15 P**

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

- e) Betrachten Sie nun das 15-malige Werfen eines Würfels (oder das gleichzeitige Werfen von 15 Würfeln). Es sei Z die binomialverteilte Anzahl der Sechsen und $W = Z + 3$.
(W zählt also zur Anzahl der Sechsen 3 dazu).

Ebenso wie die Augensumme S von 3 Würfeln kann auch W genau die Werte 3, 4, ..., 17, 18 annehmen.

Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von S und W in Bezug auf

- das Ereignis, einen Wert größer als 16 zu erhalten,
- das Ereignis, einen Wert kleiner als 5 zu erhalten,
- Symmetrie (vgl. d))
- den Erwartungswert.

25 P

- f) Auf einen Würfel fällt der Verdacht der Manipulation: Ein Spielleiter behauptet, dass die „Sechs“ zu häufig fällt. Deswegen soll der Würfel 100-mal geworfen werden, um eventuell die Nullhypothese $p \leq \frac{1}{6}$ auf dem Signifikanzniveau 5 % zu verwerfen.

Bestimmen Sie mithilfe der Tabelle in der Anlage den Verwerfungsbereich V und schätzen Sie die tatsächliche Größe des Fehlers 1. Art ab.

20 P

Anlage: Tabelle akkumulierter Binomialverteilungen $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{(n-i)}$

		n = 100					
p:		0,1	1/6	0,2	0,25	0,3	0,4
	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,0576	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,1172	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,2061	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	8	0,3209	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000
k	9	0,4513	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000
	10	0,5832	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000
	11	0,7030	0,0777	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000
	12	0,8018	0,1297	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000
	13	0,8761	0,2000	0,0469	0,0025	0,0000	0,0000
	14	0,9274	0,2874	0,0804	0,0054	0,0001	0,0000
	15	0,9601	0,3877	0,1285	0,0111	0,0002	0,0000
	16	0,9794	0,4942	0,1923	0,0211	0,0006	0,0000
	17	0,9900	0,5994	0,2712	0,0376	0,0012	0,0000
	18	0,9954	0,6965	0,3621	0,0630	0,0024	0,0000
	19	0,9980	0,7803	0,4602	0,0995	0,0044	0,0000
	20	0,9992	0,8481	0,5595	0,1488	0,0076	0,0000
	21	0,9997	0,8998	0,6540	0,2114	0,0124	0,0000
	22	0,9999	0,9369	0,7389	0,2864	0,0190	0,0001
	23	1,0000	0,9621	0,8109	0,3711	0,0277	0,0001
	24	1,0000	0,9783	0,8686	0,4617	0,0380	0,0003
	25	1,0000	0,9881	0,9125	0,5535	0,0496	0,0006
	26	1,0000	0,9938	0,9442	0,6417	0,1108	0,0018
	27	1,0000	0,9969	0,9658	0,7224	0,1828	0,0040
	28	1,0000	0,9985	0,9800	0,7925	0,2632	0,0079
	29	1,0000	0,9993	0,9888	0,8505	0,3488	0,0142

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A lässt sich berechnen aus der Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel keine Sechs zu würfeln:</p> $P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216} \approx 58\% .$ <p>Analog lässt sich für das Ereignis B berechnen: $P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216} \approx 0,5\% .$</p>	10		
b)	<p>Eine Spielfigur kann nach dem ersten, zweiten oder dritten Wurf in das Spiel gebracht werden, jedoch nur im Falle einer Sechs.</p> <p>Eine einfache Lösung ergibt sich aus der Überlegung, dass das Ereignis, „eine Spielfigur in das Spiel bringen“ (als Ereignis \bar{A} bezeichnet) das Gegenereignis zum Ereignis A aus a) ist.</p> $P(\bar{A}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} .$ <p>Die Wahrscheinlichkeit, zu Beginn eine Spielfigur in das Spiel zu bringen, beträgt $\frac{91}{216} \approx 42\% .$</p> <p><i>Eine alternative Lösung ist die Betrachtung aller drei Stufen:</i></p> <p><i>Die Wahrscheinlichkeit einer Sechs im ersten Wurf ist $p_1 = \frac{1}{6} .$</i></p> <p><i>Der zweite Wurf ist nur möglich, wenn im ersten Wurf keine Sechs geworfen worden ist. Die Wahrscheinlichkeit einer Sechs im zweiten Wurf ist</i></p> $p_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} .$ <p><i>Der dritte Wurf ist nur möglich, wenn in den ersten beiden Würfeln keine Sechs geworfen worden ist. Die Wahrscheinlichkeit einer Sechs im dritten Wurf ist</i></p> $p_3 = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216} .$ <p><i>Dann ist $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} = \frac{36 + 30 + 25}{216} = \frac{91}{216} .$</i></p>	10		
c)	<p>Wenn man sich das Würfeln mit 3 Würfeln als Stufenexperiment vorstellt und dazu ein dreistufiges Baumdiagramm mit je 6 Verzweigungen auf jeder Stufe, dann haben alle 216 Wege die gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich $\frac{1}{216} .$</p> <p>Der Fürst hat zwar Recht, dass alle Augensummen auf sechs „Arten“ gebildet werden können:</p> <p>Summe 9: (1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4) und (3,3,3), Summe 10: (1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4) und (3,3,4), Summe 11: (1,4,6), (1,5,5), (3,4,4), (2,4,5), (2,3,6) und (3,3,5), Summe 12: (1,5,6), (2,4,6), (2,5,5), (3,3,6), (3,4,5) und (4,4,4).</p>			

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	<p>Diese „Arten“ (Tripel) sind aber nicht gleichwahrscheinlich, denn für die Bestimmung ihrer Wahrscheinlichkeiten sind jeweils die Wege im Baumdiagramm auszuzählen, die sie realisieren: Jedes Tripel mit drei verschiedenen Augenzahlen lässt sich durch sechs Wege realisieren z.B. 126, 162, 216, 261, 612, 621. Jedes Tripel mit zwei gleichen Augenzahlen lässt sich durch drei Wege realisieren, z.B. 144, 414, 441 und jedes Tripel mit 3 gleichen Augenzahlen lässt sich durch genau einen Weg realisieren.</p> <p>Damit ergibt sich $P(S = 12) = \frac{6+6+3+3+6+1}{216} = \frac{25}{216} = P(S = 9)$ und</p> $P(S = 11) = \frac{6+6+3+6+3+3}{216} = \frac{27}{216} = P(S = 10).$ <p>Also sind die Wahrscheinlichkeiten nicht gleich.</p>		15	5
d)	<p><u>Beschreibung der Symmetrieeigenschaft:</u> In Aufgabenteil c) ist bereits gezeigt worden, dass gilt: $P(S = 10) = P(S = 11)$ und $P(S = 9) = P(S = 12)$. Leicht zu sehen ist auch, dass $P(S = 3) = P(S = 18)$, denn einzig möglich für diese Augensummen sind die Tripel (1,1,1) bzw. (6,6,6).</p> <p>Eine mögliche Überlegung geht zusätzlich von der Symmetrie des Würfels aus: Wenn bei einem Würfel die „1“ oben liegt, liegt die „6“ unten; wenn die „2“ oben liegt, liegt die „5“ unten; usw. Dies bedeutet für drei Würfel: Wenn die Augensumme 4 oben liegt, liegt die Augensumme 17 unten; wenn die Augensumme 5 oben liegt, liegt die Augensumme 16 unten; usw.</p> <p>Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind gleich, was zur Symmetrie der W-Verteilung führt.</p> <p><i>Alternativ kann man auch mit Hilfe der möglichen Tripel – wie in c) – argumentieren, ohne dass dabei jede Wahrscheinlichkeit berechnet werden muss.</i></p>	5	10	
e)	<ul style="list-style-type: none"> $P\{S > 16\} = P\{S = 17\} + P\{S = 18\} = \frac{3}{216} + \frac{1}{216} = \frac{1}{54} \approx 2\%$ <p>Die Zufallsvariable Z ist $15 - \frac{1}{6}$-binomialverteilt.</p> $P\{W > 16\} = P\{W > 13\} = P\{W = 14\} + P\{W = 15\} = 15 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{14} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \left(\frac{1}{6}\right)^{15}$ $= \frac{5}{6^{15}} \approx 1 \cdot 10^{-11}$ <p>$P\{W > 16\}$ ist also <u>wesentlich</u> kleiner als $P\{S > 16\}$</p> <ul style="list-style-type: none"> $P\{S < 5\} = P\{S > 16\} \approx 2\%$ wegen der Symmetrie (vgl. d). $P\{W < 5\} = P\{W < 2\} = P\{W = 0\} + P\{W = 1\} = \left(\frac{5}{6}\right)^{15} + 15 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{14} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$ $= \frac{15 \cdot 5^{14}}{6^{15}} \approx 19\%.$ <p>$P\{W < 5\}$ ist also <u>größer</u> als $P\{S < 5\}$.</p>			

Lehrermaterialien zum Grundkurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	<ul style="list-style-type: none"> • Symmetrie: Die Symmetrie der Verteilung von S wurde schon in d) begründet. Für $p \neq \frac{1}{2}$ ist jede Binomialverteilung nicht symmetrisch, das kann vorausgesetzt werden, kann aber auch hier für $n = 15$ und $p = \frac{1}{6}$ leicht begründet werden, denn offensichtlich ist es wahrscheinlicher „keine Sechsen“ zu werfen ($\left(\frac{5}{6}\right)^{15}$) als „15 Sechsen“ zu werfen ($\left(\frac{1}{6}\right)^{15}$). Dann ist aber auch die Verteilung von W nicht symmetrisch. • Bestimmung des Erwartungswerte von S und W: Aufgrund der Symmetrie der Verteilung von S haben jeweils die Werte S und $21-S$ die gleiche Wahrscheinlichkeit, können also in der Produktsumme zusammengefasst werden. Klammert man danach 21 aus, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}$. Also $E(S) = \frac{21}{2} = 10,5$. <i>Einfacher ist es, die (wahrscheinlich im Unterricht nicht behandelte) Additivität des Erwartungswertes auszunutzen. $E(S) = 3 \cdot 3,5 = 10,5$.</i> Der Erwartungswert einer Binomialverteilung beträgt $n \cdot p$, hier also $E(Z) = 15 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$. Also $E(W) = E(Z) + 3 = \frac{11}{2} = 5,5$. $E(W)$ ist also nur etwa halb so groß wie $E(S)$. 		15	10
f)	<p>Viele Sechsen sprechen gegen die Nullhypothese. X bezeichne die Anzahl der Sechsen. Aus der Tabelle ergibt sich: falls $p = \frac{1}{6}$, gilt für $K = 23$: $P(\{X < K\}) \leq 5\%$.</p> <p>Falls also 23 oder mehr Sechsen fallen, sollte die Nullhypothese abgelehnt werden. Die tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art ist kleiner oder gleich 3,3 %.</p>		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25