ANALYSIS 1

I.1 Tragfläche

Die Konstrukteure eines Flugzeuges haben das Profil (Querschnittsfläche) einer Tragfläche am Übergang zum Rumpf mithilfe zweier ganzrationaler Funktionen *f* und *p* im Intervall $[0; 7]$ beschrieben.

a) Der Graph der Funktion *f* beschreibt die Oberseite des Tragflächenprofils.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von *f*, wenn folgende Daten der Funktion bekannt sind:

- *f* ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, mit den drei Nullstellen $x = -4$, $x = 0$ und $x = 7$.
- (2| 0,6) ist ein Punkt des Graphen von *f*.

Ein Ausschnitt des Graphen von *f* ist in das Koordinatensystem der Anlage bereits eingezeichnet.
Zur Kontrolle: $f(x) = -0,01 \cdot (x^3 - 3x^2 - 28x)$. **15 P**

b) Bei der Funktion *p* handelt es sich um eine Parabel, die mit den Nullstellen $x = 0$ und $x = 7$ und mit der Bedingung $p'(7) = 0,35$ die Unterseite des Tragflächenprofils beschreibt.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $p(x)$.
Zur Kontrolle: $p(x) = 0,05 \cdot (x^2 - 7x)$. **15 P**

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion *p* in das Koordinatensystem in der Anlage. **10 P**

d) Für ein europäisches Projekt zur Klimaforschung soll eine stangenförmige Messsonde an der Unterseite der Tragfläche an der Stelle $x = 5$ angebracht werden. Die Messsonde wird wegen der Strömungsverhältnisse der Luft tangential an der Profilunterseite montiert.
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden *t*, auf der die Messsonde liegt. **15 P**

e) In die Tragflächen sollen Tanks eingebaut werden. Bestimmen Sie hierfür den Flächeninhalt des Tragflächenprofils, das von *f* und *p* im Intervall [0;7] umschlossen wird. **10 P**

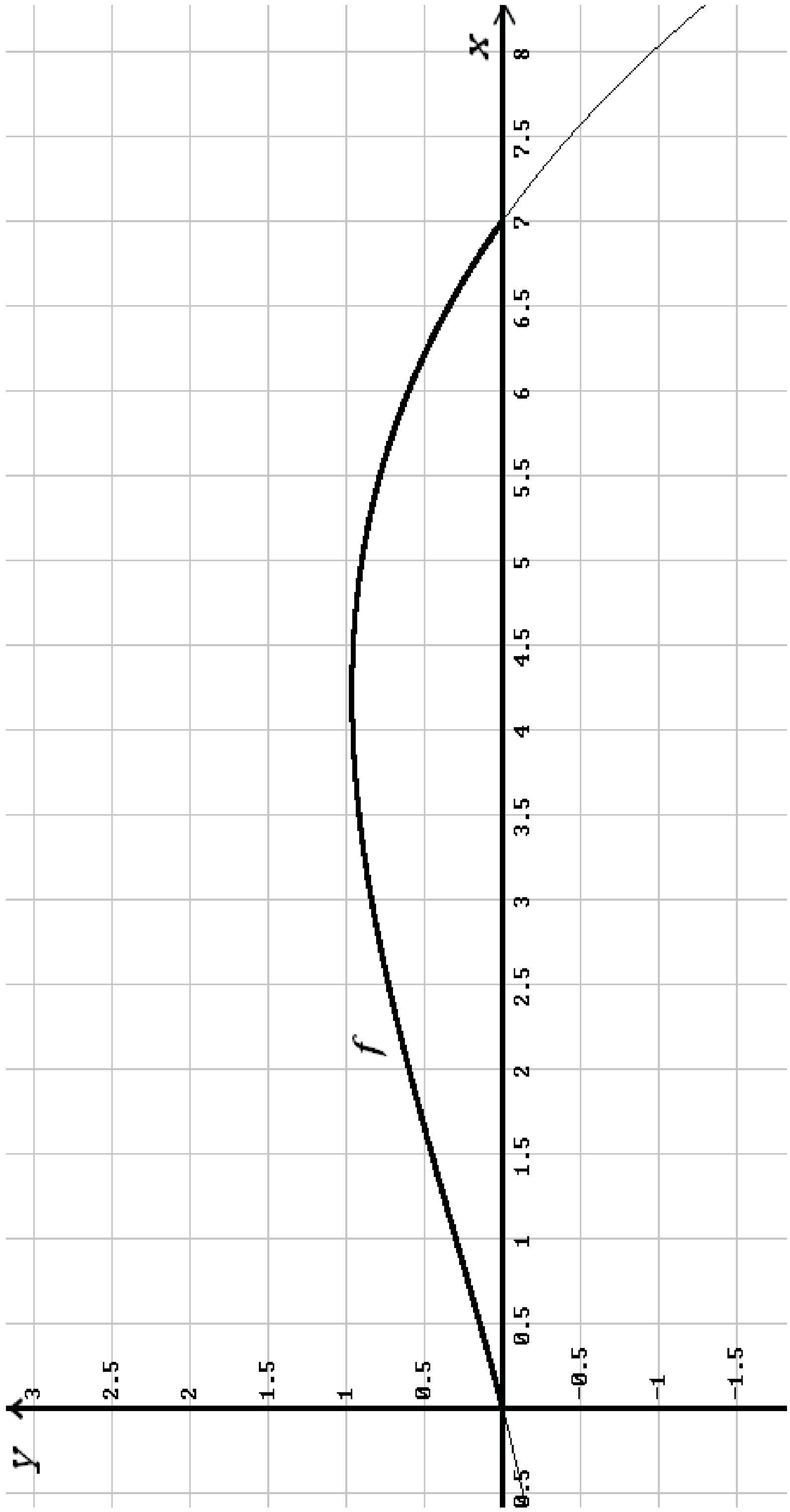
f) Bestimmen Sie die Stelle, an der das Tragflächenprofil maximale Dicke in *y*-Richtung aufweist, und ermitteln Sie auch diese maximale Dicke des Tragflächenprofils. **15 P**

In der Entwicklungsphase dieses Flugzeugtyps werden von den Konstrukteuren unterschiedliche Tragflächenprofile getestet. Um die Flugeigenschaften des Flugzeugs zu verbessern, soll die Profilunterseite der Tragfläche im Intervall [0;7] flacher gestaltet werden.

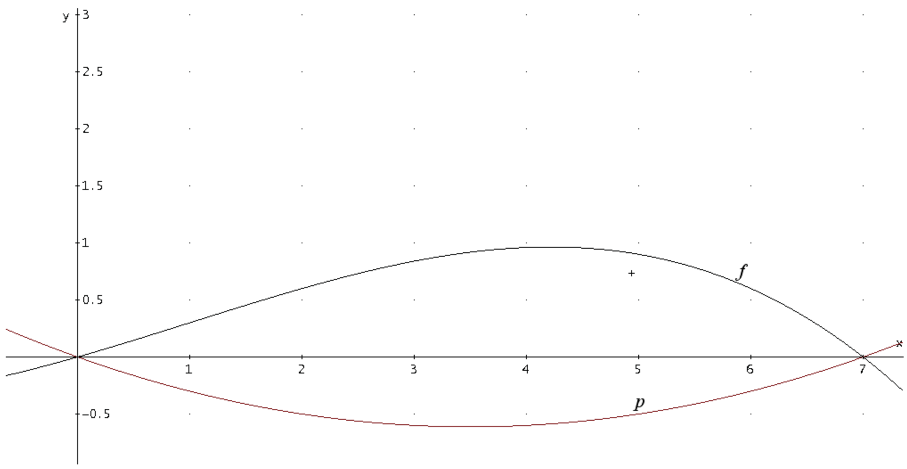
g)
- Bestimmen Sie zunächst den Abstand *a* der waagerechten Tangente an der Unterseite des Tragflächenprofils zur *x*-Achse.
- In einem ersten Ansatz wird die Parabel beibehalten, aber der Abstand *a* soll um 20 % reduziert werden.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der zu dieser Vorgabe passenden Parabel *q*. **10 P**

h) Ein Konstrukteur macht einen anderen Ansatz für die Modellierung der Tragflächenunterseite mithilfe der Funktion *r* mit der Gleichung $r(x) = \dfrac{p(x)}{8-x}$.
Vergleichen Sie die durch *q* und *r* gegebenen Ansätze. **10 P**

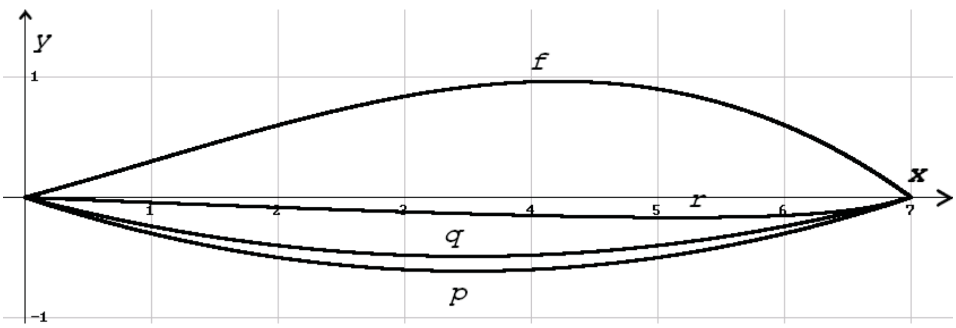
Anlage zur Aufgabe „Tragfläche“:



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Funktion f hat die Nullstellen – 4, 0 und 7. Damit lässt sich zunächst f_1 als eine erste Näherung für f mit $f_1(x) = (x+4)\cdot x\cdot(x-7)$ darstellen. Die Vorgabe, dass der Punkt (2| 0,6) auf dem Graphen von f liegt, führt wegen $f_1(2) = (2+4)\cdot 2\cdot(2-7) = -60$ mit dem Vorfaktor –0,01 auf die gesuchte Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}01\cdot(x+4)\cdot x\cdot(x-7)$ bzw. ausmultipliziert $f(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}03x^2 + 0{,}28x$. *Das Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems mit Hilfe der allgemeinen Funktionsgleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ist ebenfalls möglich.*		15	
b)	Da die Nullstellen der Parabel 0 und 7 sind, folgt zunächst für p eine Näherung $p_1(x) = x\cdot(x-7) = x^2 - 7x$. Mit $p_1'(7) = 2\cdot 7 - 7 = 7$ ergibt sich unter der Bedingung $p'(7) = 0{,}35$ die gesuchte Parabelgleichung mit $p(x) = 0{,}05\cdot x\cdot(x-7)$.	15		
c)	Die Skizze in der Anlage wird mit dem Graphen von p ergänzt.  	5	5	
d)	Da die Gerade t die Tragflächenunterseite p an der Stelle $x = 5$ berühren soll, kann man die Steigung der Tangente über die erste Ableitung der Parabel p an der Stelle $x = 5$ erhalten. Mit $p'(x) = 0{,}1x - 0{,}35$ und $p'(5) = 0{,}15$ ergibt sich die Steigung der Tangente mit $m = 0{,}15$. Da der Berührpunkt (5 |–0,5) ein Punkt der Tangente ist, folgt: $-0{,}5 = 0{,}75 + b$. Die gesuchte Funktionsgleichung von t lautet: $t(x) = 0{,}15\cdot x - 1{,}25$. <u>*Alternativ kurz und direkt:*</u> $t(x) = p(5) + p'(5)\cdot(x-5) = 0{,}15x - 1{,}25$.		10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
e)	Da die Querschnittsfläche der Tragfläche von den Funktionen f und p eingeschlossen wird, lässt sich der Flächeninhalt durch das folgende Integral bestimmen. $A = \int_0^7 (f(x) - p(x))\,dx$ $= -0{,}01 \cdot \int_0^7 (x^3 + 2x^2 - 63x)\,dx$ $= -0{,}01 \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{63}{2}x^2\right]_0^7$ $= \frac{343}{48}$ $A = 7{,}14583...$ Die Querschnittsfläche hat einen Inhalt von ca. 7,15 Flächeneinheiten.		10	
f)	Die Dicke d des Profils in y-Richtung lässt sich als $d(x) = f(x) - p(x)$ darstellen. Die Dicke d ist an der Stelle x maximal, falls gilt: $d'(x) = 0$ und $d''(x) < 0$. $d(x) = -0{,}01 \cdot (x^3 + 2x^2 - 63x)$ $d'(x) = -0{,}01 \cdot (3x^2 + 4x - 63)$ $0 = -0{,}01 \cdot (3x^2 + 4x - 63)$ $0 = x^2 + \frac{4}{3}x - 21$ $x = -5{,}297... \vee x = 3{,}964...$ Da nur $x \approx 3{,}96$ innerhalb des Definitionsbereiches liegt, muss nur für diesen Wert die 2. Bedingung überprüft werden. $d'(x) = -0{,}01 \cdot (3x^2 + 4x - 63)$ $d''(x) = -0{,}01 \cdot (6x + 4)$ $d''(3{,}96) = -0{,}2776 < 0$ Damit ist die Stelle $x \approx 3{,}96$ die gesuchte Stelle. Die maximale Dicke der Tragfläche erhält man, indem man $x \approx 3{,}96$ in $d(x) = -0{,}01 \cdot (x^3 + 2x^2 - 63x)$ einsetzt. Die maximale Dicke beträgt $d(3{,}964) \approx 1{,}56$ Längeneinheiten.		10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
g)	Der Abstand *a* ist identisch mit dem Betrag der Funktionswerte am Scheitelpunkt der Parabel *p*. Da die Nullstellen der Parabel bei 0 und 7 liegen, liegt der *x*-Wert des Scheitelpunktes bei 3,5. Dann folgt für den *y*-Wert: bzw. für den Abstand: $a = p(3,5)$ $a = 0,05\cdot 3,5^2 - 0,35\cdot 3,5$ $a = -0,6125$. Der gesuchte Abstand der waagerechten Tangente der Unterseite des Tragflächenprofils zur *x*-Achse beträgt somit 0,6125 Längeneinheiten. Eine Minderung des Abstandes um 20 % ergibt einen neuen Abstand von $a_{neu} = 0,49$. Da die Nullstellen der neuen Parabel p_{neu} mit denen der alten Parabel *p* übereinstimmen, ändert sich auch der *x*-Wert des Scheitelpunktes nicht. Es muss lediglich der Koeffizient *k* neu bestimmt werden: $p_{neu}(3,5) = k\cdot 3,5\cdot(3,5-7)$ $-0,49 = -12,25k$ $k = 0,04$. *Kürzere Lösungsvariante*: Man verändert den Koeffizienten direkt auf 80 % des alten. Die Funktionsgleichung für eine neue Funktion p_{neu} für das untere flachere Profil lautet sodann: $p_{neu}(x) = 0,04\cdot x\cdot(x-7)$ oder $p_{neu}(x) = 0,04x^2 - 0,28x$.		5	5
h)	 Die Funktion *r* staucht den Graphen von *p* unterschiedlich stark im betrachteten Intervall und zwar am linken Rand – also hinten – stark mit dem Faktor $\frac{1}{7} \approx 0,14$, in der Mitte um den Faktor $\frac{1}{4,5} = 0,\overline{2}$ und am rechten Rand (also vorne) gar nicht mehr. Dadurch wird das Profil vor allem hinten flach.		5	5
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

ANALYSIS 2

I.2 Glaskugeln

Ein Unternehmen stellt Glaskugeln für Großabnehmer her. Die Gesamtkosten K_g der Produktion können in Abhängigkeit der produzierten Mengeneinheiten *x* mit folgender Funktion beschrieben werden:

$$K_g(x) = \frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 125x + 900 .$$

Das Unternehmen will die Glaskugeln zum Preis von 200 Geldeinheiten (GE) pro Mengeneinheit (ME) anbieten. Der Erlös, der als Produkt aus Menge und Preis definiert ist, ergibt sich dann als

$$E_1(x) = 200x .$$

a) Wenn das Unternehmen 60 Mengeneinheiten produziert und verkauft, dann sind die Kosten genauso hoch wie der Erlös.
Bestimmen Sie die Gewinnzone (d. h. den Bereich der Produktion *x*, in dem die Kosten geringer sind als der Erlös beim Verkauf). **15 P**

b) Geben Sie die Gewinnfunktion an und berechnen Sie den maximal möglichen Gewinn. **15 P**

Marktbeobachtungen haben folgende Informationen ergeben:

Wenn folgende Anzahlen von Mengeneinheiten (ME) verkauft werden sollen,	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
dann darf der Preis (in GE) nicht höher sein als	320	300	280	250	220	200	160	155	120	100

c) • Stellen Sie die in der Tabelle gegebenen Informationen im Koordinatensystem in der Anlage dar.

• Skizzieren Sie den Graphen einer möglichst einfachen Funktion *p*, die den dargestellten Zusammenhang näherungsweise beschreibt.
Geben Sie die Gleichung dieser Funktion *p* an. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise.

• Mit *p* ergibt sich eine andere Erlösfunktion als E_1. Bestimmen Sie die Gleichung dieser neuen Erlösfunktion E_2. **15 P**

Da verschiedene Wege zur Bestimmung einer Näherungsfunktion möglich sind, rechnen Sie im Folgenden weiter mit $E_2(x) = -2{,}5x^2 + 350x$.

d) Berechnen Sie analog zu a) die Gewinnzone.
Untersuchen Sie, wie sich die neue Erlösfunktion E_2 auf das Gewinnmaximum auswirkt.
Hinweis: Auch für die Funktion E_2 gilt, dass das Unternehmen bei 60 verkauften Mengeneinheiten keinen Gewinn mehr erwirtschaftet. **15 P**

Für das Unternehmen sind auch die so genannten Stückkosten (Kosten pro Mengeneinheit) $K_{St}(x) = \frac{K_g(x)}{x}$ von Interesse.

e) Geben Sie die Gleichung der Stückkostenfunktion K_{St} an und zeichnen Sie den Graphen im Intervall [0;70] in das gegebene Koordinatensystem. **10 P**

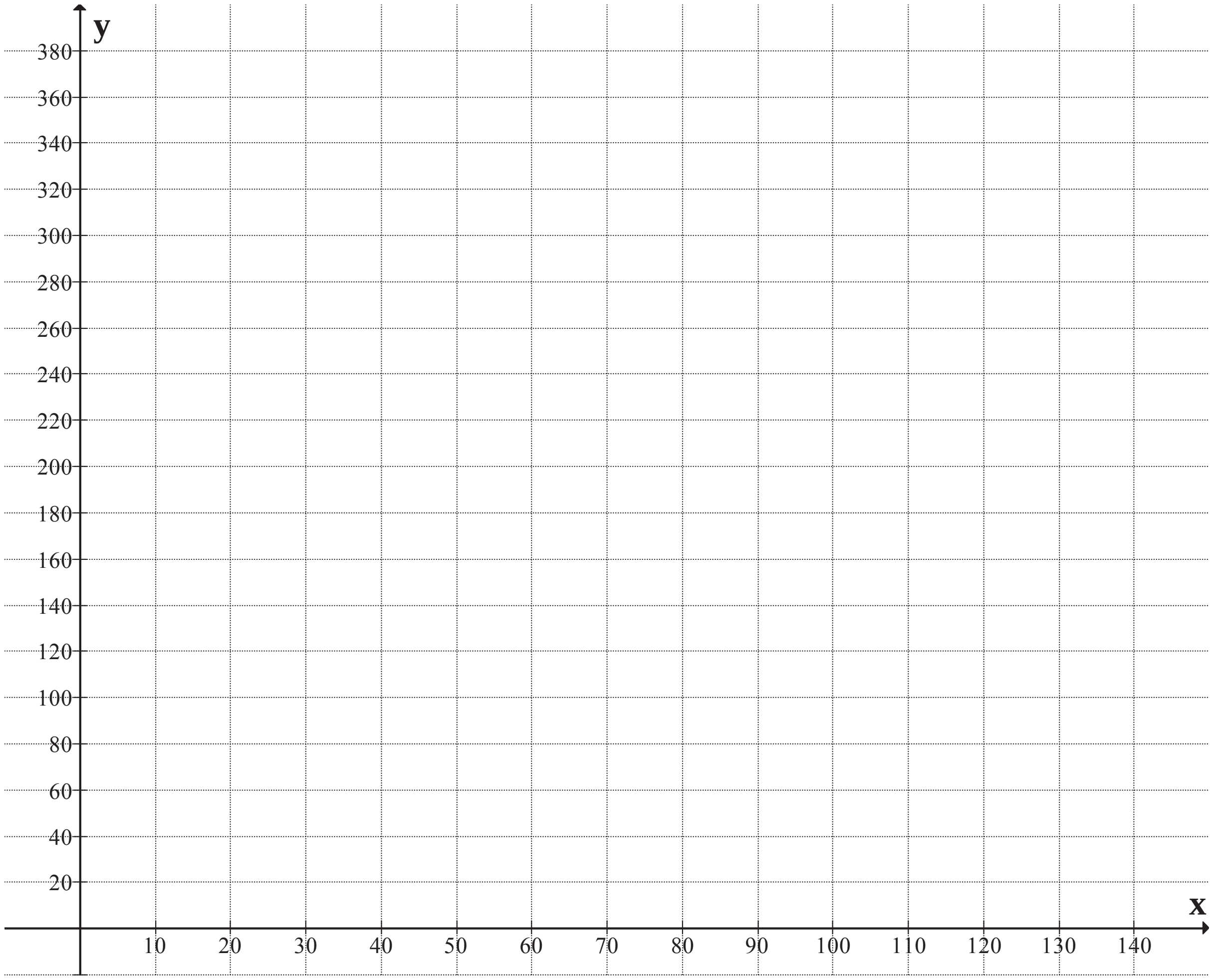
f) Bestätigen Sie, dass die Stückkosten bei $x = 30$ minimal sind. **10 P**

Das Unternehmen erwägt, im Rahmen einer Sonderpreisaktion die Glaskugeln zum jeweiligen Stückkostenpreis auf dem Markt anzubieten. Aus c) und d) geht hervor, dass das Unternehmen bei dieser Aktion teilweise unter dem tatsächlich erzielbaren Preis bleibt.

g) Stellen Sie in Ihrer Skizze denjenigen Bereich durch Schraffur dar, in dem das Unternehmen mit dieser Strategie den tatsächlich erzielbaren Preis nicht ausschöpft. **10 P**

h) Bestimmen Sie im Intervall [20;50] die durchschnittliche Differenz zwischen dem tatsächlich erzielbaren Marktpreis und den jeweiligen Stückkosten.
Verwenden Sie hier $p(x) = -2{,}5x + 350$. **10 P**

Anlage zur Aufgabe „Glaskugeln“

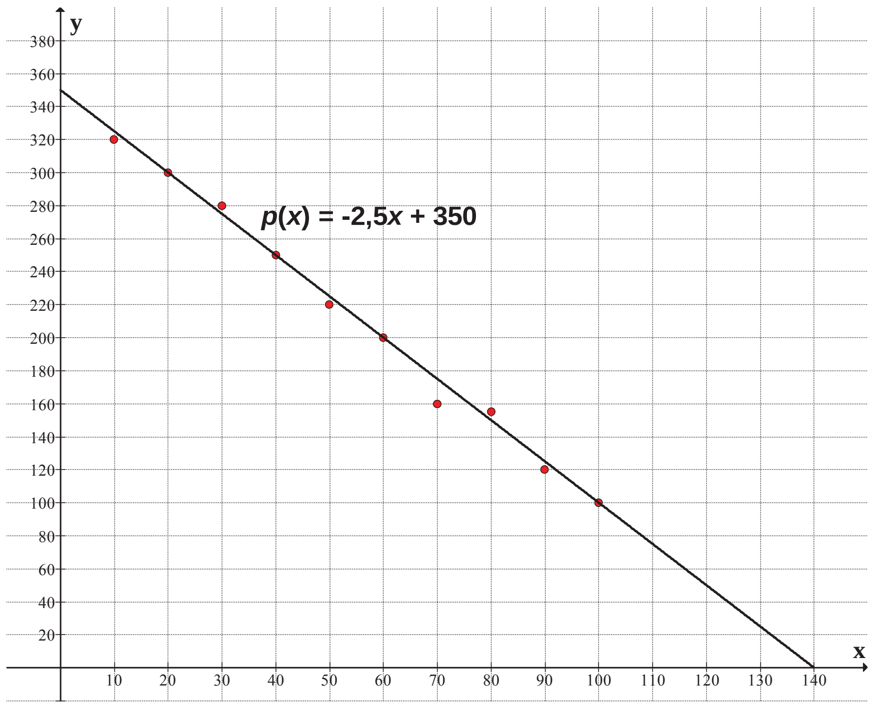


Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Zur Berechnung der Gewinnzone: $E_1(x) = K_g(x)$: $\frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 125x + 900 = 200x$ $\frac{1}{10}x^3 - 5x^2 - 75x + 900 = 0$ Die erste Nullstelle $x = 60$ ist gegeben, weitere Zerlegung (Polynomdivision oder Horner Schema) führt zu: $\frac{1}{10} \cdot (x - 60)(x^2 + 10x - 150) = 0$ $x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{175}$ $x_1 = 8{,}228...$ $x_2 \approx -18{,}228...$ ist im Sachkontext nicht relevant. Zu überlegen ist hier noch, dass zwischen $x \approx 8{,}23$ und $x = 60$ der Graph der Erlösfunktion oberhalb des Graphen der Kostenfunktion verläuft. Damit ergibt sich als Gewinnzone der Produktionsbereich $\approx 8{,}23 \leq x \leq 60$.		15	
b)	Der Gewinn ergibt sich als Differenz aus Erlös und Kosten. $G(x) = 200x - \left(\frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 125x + 900\right)$ $G(x) = -\frac{1}{10}x^3 + 5x^2 + 75x - 900$ Zur Berechnung des Gewinnmaximums ist die erste Ableitung zu betrachten. $G'(x) = -\frac{3}{10}x^2 + 10x + 75$. $-\frac{3}{10}x^2 + 10x + 75 = 0$ $x^2 - \frac{100}{3}x - 250 = 0$ $x_1 = 39{,}640...$ $x_2 = -6{,}306...$ im Sachkontext nicht relevant. Der Nachweis, dass es sich um ein Maximum handelt, kann z.B. über die 2. Ableitung von G erfolgen. $G(39{,}640...) = 3700{,}897...$. Es ergibt sich ein maximaler Gewinn von ca. 3700 GE, wenn ca. 40 Mengeneinheiten produziert und verkauft werden.	10	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

c)



Lösungshinweis: die Punkte werden ins Koordinatensystem eingetragen und liegen fast auf einer Geraden. Deshalb kann eine einfache Modellierung mithilfe einer linearen Funktion vorgenommen werden. Die Abweichungen sind tolerierbar. Sinnvollerweise sollten sich die Schülerinnen geeignete Punkte auswählen, um die Funktionsvorschrift herzuleiten. Hier sind verschiedene Lösungen möglich. Exemplarisch wird hier mit Punkten gearbeitet, die zu dem Kontrollergebnis führen.

$P(20;300)$, $Q(40;250)$

$$p(x) = mx + b$$
$$300 = 20m + b$$
$$250 = 40m + b$$
$$-50 = 20m$$
$$m = -2,5 \text{ und } b = 350\,.$$

Eine mögliche Preis(-Angebots-)funktion hat die Gleichung:

$$p(x) = -2,5x + 350\,.$$

Eine Überprüfung ergibt, dass nur wenige Punkte nicht auf der Geraden liegen.

(Argumentation mithilfe der Zeichnung allein reicht aus.)

Der Erlös ergibt sich als Produkt aus Menge und Preis, d. h.
$E_2 = (-2,5x + 350) \cdot x$ bzw. $E_2 = -2,5x^2 + 350x\,.$

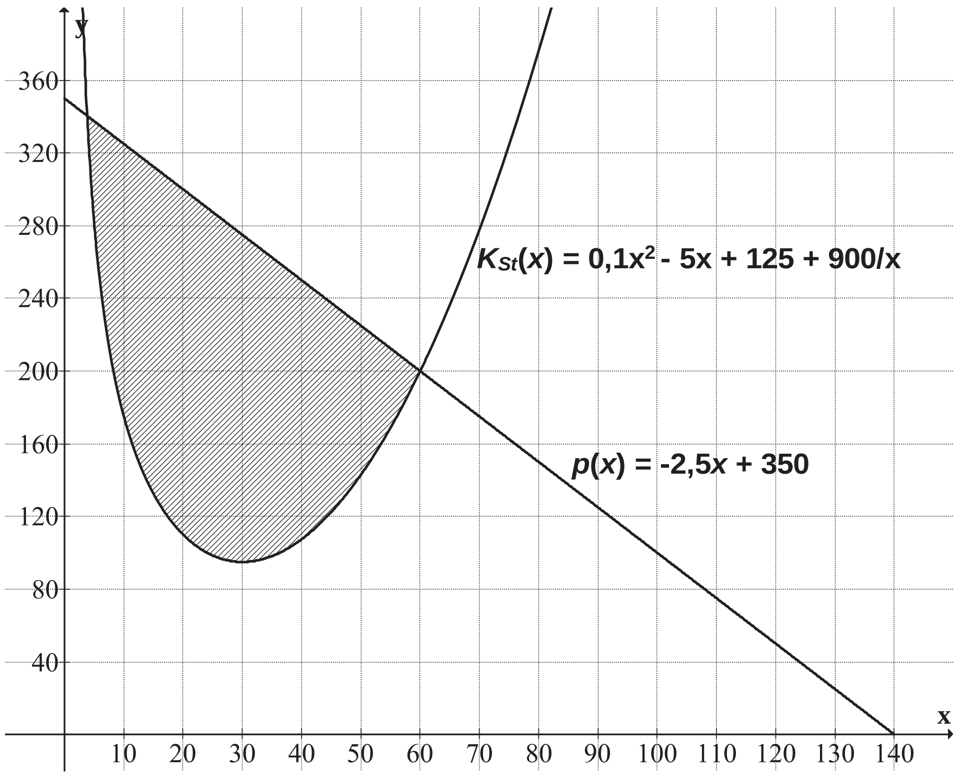
	I	II	III
	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Zur Berechnung des Gewinnbereichs: $E_2(x) = K_g(x)$ $\frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 125x + 900 = -2,5x^2 + 350x$ $\frac{1}{10}x^3 - 2,5x^2 - 225x + 900 = 0$ Die erste Nullstelle liegt wieder bei $x = 60$, weitere Zerlegung (Polynomdivision oder Horner Schema) führt zu: $x^3 - 25x^2 - 2250x + 9000 = 0$ $(x-60)(x^2 + 35x - 150) = 0$ $x_1 = 3,860...$ $x_2 = -38,860...$ im Sachkontext nicht relevant. Damit ergibt sich als Gewinnzone $\approx 3,86 \le x \le 60$. Zur Berechnung der gewinnmaximalen Menge ist wieder die erste Ableitung der Gewinnfunktion zu betrachten. $G_1(x) = -2,5x^2 + 350x - \frac{1}{10}x^3 + 5x^2 - 125x - 900$ $G_1(x) = +2,5x^2 + 225x - \frac{1}{10}x^3 - 900$ $G_1{}'(x) = 5x + 225 - \frac{3}{10}x^2 = 0$ $x^2 - \frac{50}{3}x - \frac{2250}{3} = 0$ $x = 36,95 \vee x \approx -20,29$ im Sachkontext nicht relevant. Damit ergibt sich eine gewinnmaximale Menge von $x \approx 37$ Mengeneinheiten. Unterschiede zwischen beiden Ansätzen:		10	5

Erlösfunktion	Gewinnzone	Gewinnmaximale Menge	Maximaler Gewinn
$E_1(x)$	[9;60]	40 ME	3 700 GE
$E_2(x)$	[4;60]	37 ME	5 782,20 GE

	Lösungsskizze	I	II	III
e)	Stückkosten: $K_{St}(x) = \frac{K_g(x)}{x} = \frac{1}{10}x^2 - 5x + 125 + \frac{900}{x}$. Wertetabelle:			

x	5	10	20	30	40	50	60	70
K_{St}	282,5	175	110	95	107,5	143	200	277,85

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	 Die Schraffur ist das Ergebnis von Teilaufgabe g).	5	5	
f)	Eine Bestätigung ist z. B. über das Einsetzen des Wertes in die Ableitungen möglich. Wenn die Stückkosten bei $x = 30$ minimal sind, muss gelten: $K'_{St}(30) = 0$ und $K''_{St}(30) > 0$. $K'_{St}(x) = \frac{1}{5}x - 5 - \frac{900}{x^2}$ $K'_{St}(30) = 0$. $K''_{St}(x) = \frac{1}{5} + \frac{1800}{x^3} > 0$ für alle $x > 0$.		10	
g)	Zu schraffieren ist die Fläche zwischen, die die Graphen von p und K_{St} einschließen (siehe oben).		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
h)	*Ansatz* $:\frac{1}{30}\cdot\int_{20}^{50}\left(p(x)-K_{St}(x)\right)dx.$ Es sei $v(x)=p(x)-K_{St}(x)=-\frac{1}{10}x^2+2{,}5x+225-\frac{900}{x}.$ Mit $V(x)=-\frac{1}{30}x^3+\frac{2{,}5}{2}x^2+225x-900\cdot\ln x$ ist V eine Stammfunktion von v. $V(50)=6687{,}51$ und $V(20)=2037{,}2$. $\frac{1}{30}\cdot\left(6687{,}51-2037{,}2\right)=155{,}010...$ Es ergibt sich damit eine durchschnittliche Differenz von 155 GE. *Möglich wäre auch die Berechnung des Mittelwertes unter Benutzung der Daten aus der Tabelle.*			10
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15

LA/AG 1

II.1 Kirchturm

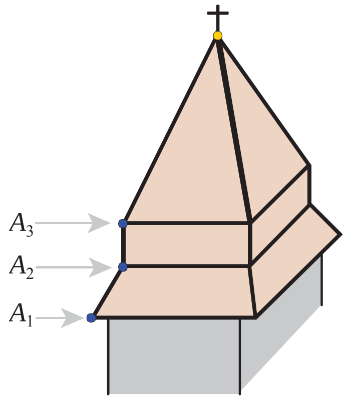
Das Kupferdach des Kirchturms einer kleinen Kirche besteht aus einem Pyramidenstumpf, einem aufgesetzten Quader und einer auf den Quader aufgesetzten Pyramide (siehe Abbildung).

In den Kirchenbüchern befinden sich folgende Angaben:

<u>Pyramidenstumpf</u>:
Grundfläche: Quadrat mit der Seitenlänge 8 m
Deckfläche: Quadrat mit der Seitenlänge 6 m.
Höhe: 2 m

<u>Quader</u>:
Grund- und Deckfläche: Quadrat mit der Seitenlänge 6 m.
Höhe: 2 m

<u>Pyramide</u>:
Grundfläche: Quadrat mit der Seitenlänge 6 m.
Höhe: 6 m



a) Berechnen Sie den Inhalt der gesamten Dachfläche, zu der auch die vier Seiten des Quaders gehören. **15 P**

b) Untersuchen Sie, ob die unteren Dachflächen des Pyramidenstumpfes und die zugehörigen oberen Dachflächen der Pyramide parallel sind.
Geben Sie die jeweiligen Neigungswinkel auch in Grad an. **15 P**

c) Nun soll ein Schrägbild des Kirchturms im Koordinatensystem der Anlage angefertigt werden. Die Spitze des Turmdaches liege dabei auf der x_3-Achse und heiße S, die Kanten der Grundfläche liegen in der x_1-x_2-Ebene und die Kanten der Deckflächen verlaufen parallel zur x_1- bzw. x_2-Achse.
Auf allen Achsen gilt: 1 LE $\widehat{=}$ 1 m.
In der unteren Ebene sollen die Eckpunkte A_1, B_1, C_1, D_1 heißen (von oben gesehen gegen den Uhrzeigersinn), entsprechend in der mittleren Ebene A_2, B_2, C_2, D_2 und in der oberen Ebene A_3, B_3, C_3, D_3.
Dabei liegen dann A_1, A_2 und A_3 so auf einer Dachkante, wie oben in der nicht maßstabsgetreuen Abbildung dargestellt.
Geben Sie in der Anlage die fehlenden Koordinaten der acht Punkte an und zeichnen Sie das Dach in das Koordinatensystem ein. **15 P**

d) Es soll ein Stützbalken eingezogen werden, der von der Mitte M_3 der Dachkante $\overline{C_3D_3}$ die gegenüberliegende Dachfläche A_3B_3S in einem Punkt P senkrecht abstützt.
- Zeigen Sie, dass der Punkt P (1,8 | 0 | 6,4) die angegebenen Eigenschaften hat.
- Berechnen Sie die Länge des Balkens (ohne Berücksichtigung seiner Dicke).
- Begründen Sie: Nicht bei jedem Dachstuhl in Form einer quadratischen Pyramide ist es möglich, vom Mittelpunkt M einer Kante der Grundfläche aus die gegenüberliegende dreieckige Dachfläche F senkrecht abzustützen. **30 P**

e) Ein weiterer Stützbalken soll von A_3 aus die diagonal gegenüberliegende Kante von C_3 nach S im Punkt Q (–1 | 1 | 8) abstützen.

- Zeigen Sie, dass dieser Balken mit jenem aus Teilaufgabe d) nicht kollidiert, wenn man die Dicke der Balken nicht berücksichtigt.
- Zeigen Sie die Richtigkeit der folgenden drei Aussagen:

  1. Der Punkt O_1 mit $O_1\left(\frac{6}{7}\,|\,0\,|\,\frac{83}{14}\right)$ liegt auf dem Balken von M_3 nach P (Teilaufgabe d)).
  2. Der Punkt O_2 mit $O_2\left(\frac{9}{14}\,|\,-\frac{9}{14}\,|\,\frac{89}{14}\right)$ liegt auf dem Balken von A_3 nach Q.
  3. Die Strecke $\overline{O_1O_2}$ verläuft senkrecht zu beiden Balken.

  Hinweis: Die Rechnung wird übersichtlicher, wenn Sie geeignet ausklammern:
  O_1: $\left(\frac{6}{7}\,|\,0\,|\,\frac{83}{14}\right) = \frac{1}{14}\cdot(12\,|\,0\,|\,83)$ bzw. O_2: $\left(\frac{9}{14}\,|\,-\frac{9}{14}\,|\,\frac{89}{14}\right) = \frac{1}{14}\cdot(9\,|\,-9\,|\,89)$.

- Bestimmen Sie nun begründet, bis zu welcher „Dicke“ beide Balken problemlos eingebaut werden können. **25 P**

Anlage zur Aufgabe „Kirchturm“

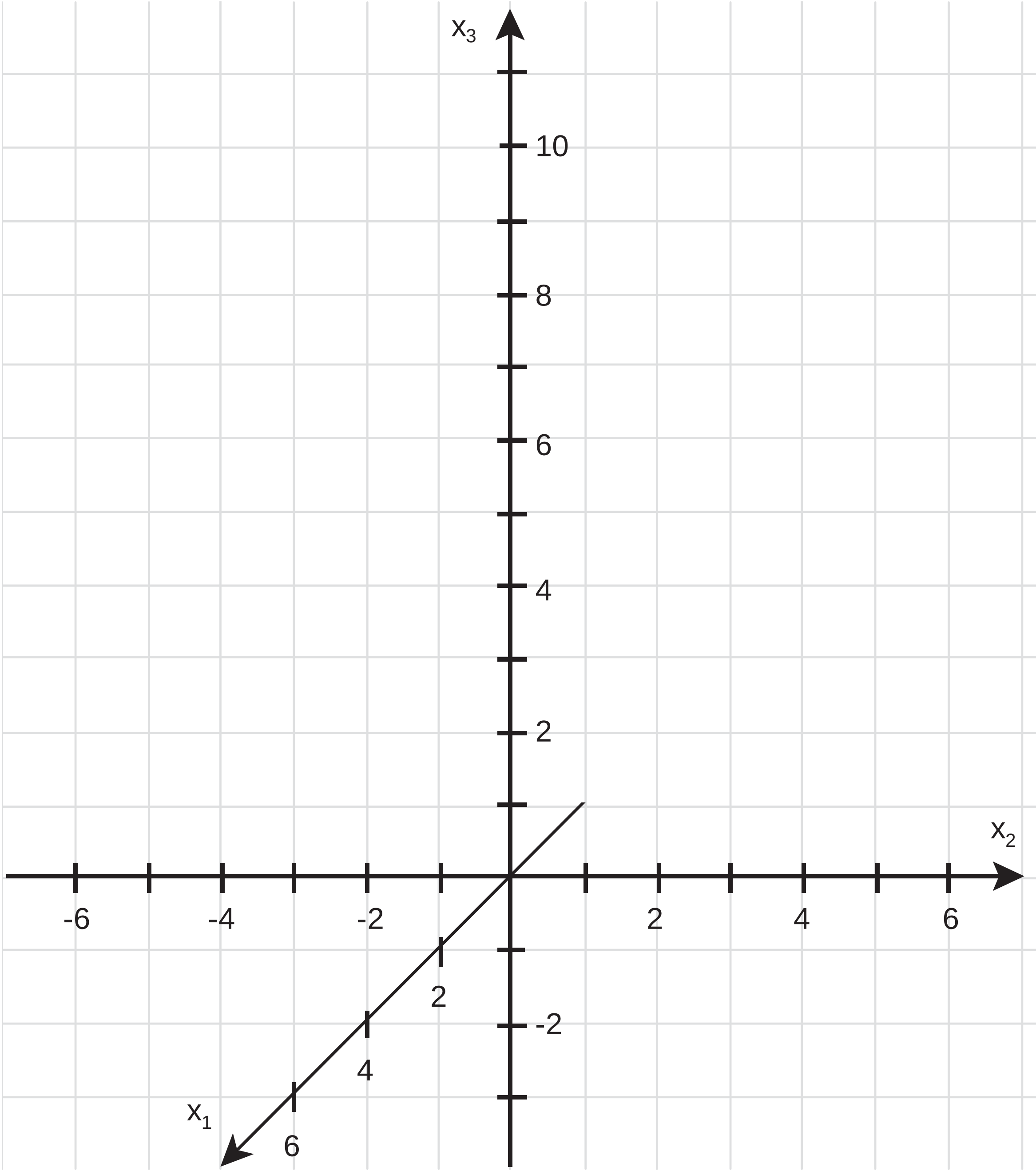
Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten.

$A_1(\quad|\quad|\quad)$, $B_1(\quad|\quad|\quad)$, $C_1(\quad|\quad|\quad)$, $D_1(\quad|\quad|\quad)$,

$A_2(\quad|\quad|\quad)$, $B_2(\quad|\quad|\quad)$, $C_2(\quad|\quad|\quad)$, $D_2(\quad|\quad|\quad)$,

$A_3(3\,|-3\,|\,4)$, $B_3(3\,|\,3\,|\,4)$, $C_3(-3\,|\,3\,|\,4)$, $D_3(-3\,|-3\,|\,4)$,

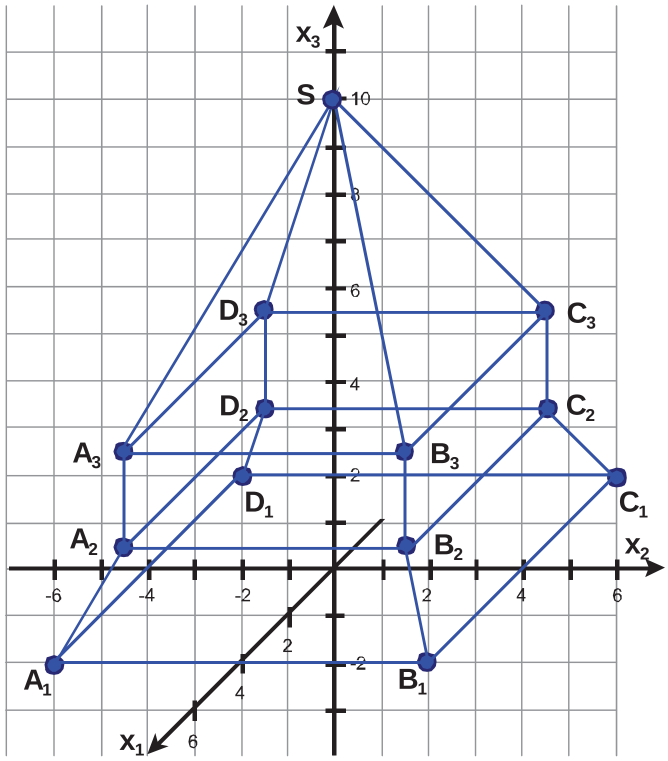
$S(0\,|\,0\,|\,10)$.



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die gesamte Dachfläche besteht aus jeweils vier kongruenten – Trapezflächen – Rechtecksflächen – Dreiecksflächen. <u>Berechnung einer Trapezfläche:</u> Grundseite unten: 8 m; Grundseite oben: 6 m. Die Trapezhöhe kann man auffassen als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen 2 m (Höhe des Pyramidenstumpfes) und 1 m (halbe Differenz der Seitenlängen von Grundquadrat und Deckquadrat). Mit dem Satz des Pythagoras erhält man die Trapezhöhe: $h_T = \sqrt{5}$ m. Der Inhalt einer Trapezfläche beträgt also: $\frac{8+6}{2}\cdot\sqrt{5}\ \text{m}^2 = 7\cdot\sqrt{5}\ \text{m}^2 \approx 15{,}65\ \text{m}^2$. <u>Berechnung einer Rechtecksfläche:</u> Seitenlänge: 6 m, Höhe: 2 m. Flächeninhalt: 12 m^2. <u>Berechnung einer Dreiecksfläche :</u> Länge der Grundseite: 6 m. Die Dreieckshöhe kann man auffassen als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen 6 m (Höhe der Pyramide) und 3 m (halbe Seitenlänge des Grundquadrats). Mit dem Satz des Pythagoras erhält man die Dreieckshöhe: $h_\Delta = \sqrt{45}\ \text{m} = 3\cdot\sqrt{5}\ \text{m}$. Der Inhalt einer Dreiecksfläche beträgt also: $3\cdot 3\cdot\sqrt{5}\ \text{m}^2 \approx 20{,}12\ \text{m}^2$. <u>Das gesamte Kirchturmdach</u> hat also folgenden Flächeninhalt: $A_D = 4\cdot\left(7\sqrt{5}+12+9\sqrt{5}\right)\ \text{m}^2 = 4\cdot\left(16\sqrt{5}+12\right)\ \text{m}^2 \approx 191\ \text{m}^2$.	15		
b)	In den in a) betrachteten rechtwinkligen Dreiecken tauchen die Neigungswinkel der betreffenden Dachfläche auf: Trapezfläche (am Kegelstumpf): $\tan(\alpha) = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63{,}4°$. Dreiecksfläche (an der Pyramide): $\tan(\beta) = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow \beta \approx 63{,}4°$. Die Neigungswinkel sind gleich, die betrachteten Flächen sind also parallel. Wegen der Symmetrie der Figur gilt die Aussage auch für die anderen Seiten. *Nachweis kann auch mit Methoden der Analytischen Geometrie geführt werden.*	5	10	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>



Gesucht Koordinaten:

$A_1(4 \mid -4 \mid 0)$, $B_1(4 \mid 4 \mid 0)$, $C_1(-4 \mid 4 \mid 0)$, $D_1(-4 \mid -4 \mid 0)$,

$A_2(3 \mid -3 \mid 2)$, $B_2(3 \mid 3 \mid 2)$, $C_2(-3 \mid 3 \mid 2)$, $D_2(-3 \mid -3 \mid 2)$.

Gegebene Koordinaten (Eckpunkte Quaderdeckfläche, Kirchturmspitze):

$A_3(3 \mid -3 \mid 4)$, $B_3(3 \mid 3 \mid 4)$, $C_3(-3 \mid 3 \mid 4)$, $D_3(-3 \mid -3 \mid 4)$, $S(0 \mid 0 \mid 10)$.

</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

<u>Nachweis der Behauptung:</u>

Für den Mittelpunkt M_3 der Dachkante von C_3 nach D_3 gilt $M_3\ (-3 \mid 0 \mid 4)$.

Mit dem gegebenen Punkt $P\ (1{,}8 \mid 0 \mid 6{,}4)$ folgt $\overrightarrow{M_3P} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{pmatrix}$.

Die Ebene E, in der die Dachfläche A_3B_3S liegt, hat z. B. folgende Gleichung:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Es gilt: $\begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = 0 \wedge \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

Daraus folgt: $\overrightarrow{M_3P} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{pmatrix}$ ist ein **Normalenvektor** der Ebene E,

da er auf deren beiden Richtungsvektoren senkrecht steht:

P ist zudem ein **Punkt der Ebene** E, weil aus $\begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 0 \\ 6{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

folgt:
I $\quad 3r + 3s = 1{,}8$
II $\quad -3r + 3s = 0$
III $\quad 10 - 6r - 6s = 6{,}4$

Aus II folgt $r = s$, woraus eingesetzt in I $6s = 1{,}8$ folgt, also $r = s = 0{,}3$.
Probe mit III: $10 - 6 \cdot 0{,}3 - 6 \cdot 0{,}3 = 10 - 1{,}8 - 1{,}8 = 6{,}4$.

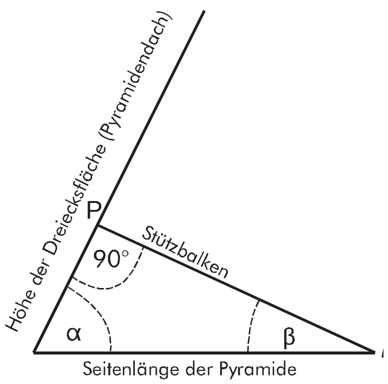
P ist ein **Punkt der Dachfläche** $A_3\, B_3\, S$, denn für die x_1-Koordinate 1,8 gilt: $0 < 1{,}8 < 3$ und für die x_3-Koordinate 6,4 gilt: $4 < 6{,}4 < 10$.

Es kann auch elementargeometrisch argumentiert werden: da P in der x_1-x_3-Ebene liegt, genügt es zu zeigen, dass P Punkt der Höhe des Dreiecks $A_3\, B_3\, S$ mit den Endpunkten S und (3 | 0 | 4) ist.

<u>Berechnung der Länge des Balkens:</u>

$\left|\overrightarrow{M_3P}\right| = \sqrt{4{,}8^2 + 0 + 2{,}4^2} = 5{,}3665...$. Damit ist der Balken ca. 5,40 m lang.

<u>Lösung ist nicht immer möglich:</u>



Die Winkel α und β ergänzen sich zu 90°: je kleiner α wird, desto größer wird β.

In Abhängigkeit von der Höhe des Dreiecks und der Seitenlänge der Pyramide kann bei großem Winkel β die Situation eintreten, dass das Lot die Seitenfläche nicht mehr trifft.

Auch die Angabe eines konkreten Beispiels ist als Begründung natürlich korrekt.

I	II	III
5	15	10

e) Um die Aussage zu beweisen, muss man zeigen, dass die Geraden durch M_3 und P einerseits und die Gerade durch A_3 und Q andererseits keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Die Gerade durch M_3 und P heiße g, die Gerade durch A_3 und Q heiße h. Dann gilt:

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

I $\quad -3 + 4{,}8r = 3 - 4s$

II $\quad 0 = -3 + 4s$

III $\quad 4 + 2{,}4r = 4 + 4s$

Aus II folgt: $0 = -3 + 4s$ und daher $s = \frac{3}{4}$.

Setzt man diesen Wert in I ein, so folgt $-3 + 4{,}8\,r = 3 - 3$, also $r = \frac{3}{4{,}8} = \frac{5}{8}$.

Setzt man beide Werte in III ein, so folgt

auf der linken Seite: $4 + 1{,}5 = 5{,}5$ und

auf der rechten Seite: $4 + 3 = 7$.

Da die beiden Seiten von III verschieden sind, gibt es keinen Schnittpunkt der beiden Geraden.

<u>Begründungen:</u>

1. $O_1: \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ 0 \\ \frac{83}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{45}{56} \cdot \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ 0 \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$. Da $0 < \frac{45}{56} < 1$, liegt O_1 zwischen M_3 und P.

2. $O_2: \begin{pmatrix} \frac{9}{14} \\ -\frac{9}{14} \\ \frac{89}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{33}{56} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Da $0 < \frac{33}{56} < 1$, liegt O_2 zwischen A_3 und Q.

3. $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{3}{14} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft senkrecht zu $\overrightarrow{M_3P}$, denn $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

$\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{3}{14} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft senkrecht zu $\overrightarrow{A_3Q}$, denn $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

<u>Abstand:</u>
Die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen den beiden Balken muss senkrecht zu jedem der Balken stehen. Das trifft zu für $\overrightarrow{O_1O_2}$, also ist die Länge der Strecke von O_1 nach O_2 der „Abstand" zwischen den beiden Geraden g und h.

$\left|O_1O_2\right| = \frac{3}{14} \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14} \approx 0{,}8$.

Solange die halbe Summe der beiden Durchmesser (jeweils vom Umkreis der Schnittfläche) kleiner als 80 cm ausfällt, ist der Einbau der beiden Stützen ohne Probleme möglich.

</td><td></td><td>15</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

LA /AG 2

II.2 Heuschrecken

Berichte über Heuschreckenplagen liegen seit vorchristlicher Zeit z. B. aus dem alten Ägypten vor. Wanderheuschrecken haben die Fähigkeit, ihr Verhalten zu ändern, sich zu Schwärmen zusammenzuschließen und in diesen Schwärmen große Entfernungen zurückzulegen.
In „ruhigen" Jahren ist der Lebensraum der Wanderheuschrecke auf die trockenen und halbtrockenen Wüsten Afrikas, des Nahen Ostens und Südwestasiens auf ein Gebiet von ca. 16 Millionen Quadratkilometern beschränkt. Während einer Plage können sich Wanderheuschrecken hingegen über ein Gebiet von ca. 29 Millionen Quadratkilometern verbreiten. In Abhängigkeit von Umwelteinflüssen und davon, ob Wanderheuschrecken vereinzelt oder in Schwärmen leben, entwickeln sich diese Populationen sehr unterschiedlich.

Die Lebensstadien einer Heuschrecke werden im Folgenden durch Eier (E), Larven 1 (L_1), Larven 2 (L_2), Larven 3 (L_3), Larven 4 (L_4) und Adulte (A) beschrieben, die sie der Reihe nach durchläuft.
Nur adulte (ausgewachsene) weibliche Heuschrecken legen Eier.

Das Geschlechterverhältnis in den betrachteten Populationen ist 1:1.

a) Eine Population von Heuschrecken wird durch den Vektor $\begin{pmatrix} E \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ A \end{pmatrix}$ beschrieben.

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Zeitspannen, in denen sich die Heuschrecken von einem Lebensstadium zum nächsten entwickeln, gleich sind. Dieser Zeitabschnitt beträgt 10 Tage.
Für eine Population gilt:
Aus 8 % der Eier eines Geleges entwickeln sich Larven 1.
Die Überlebenswahrscheinlichkeit für die Larven 1 beträgt 72 %, für L_2 und L_3 jeweils 76 %.
Aus 89 % der Larven 4 werden adulte Heuschrecken, 70 % der adulten Heuschrecken überleben die nächsten 10 Tage.
Jede weibliche adulte Heuschrecke legt pro Zeitabschnitt von 10 Tagen ein Gelege mit 120 Eiern.

Stellen Sie die Entwicklung dieser Population in einem Übergangsgraphen dar. **15 P**

b) Entscheiden Sie, ob die Matrix M mit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0,08 & 0,72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,72 & 0,76 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,76 & 0,76 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,76 & 0,89 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,89 & 0,7 \end{pmatrix}$$

zur Modellierung des in a) dargestellten Sachverhalts geeignet ist.
Erstellen Sie gegebenenfalls eine Populationsmatrix, die den Sachverhalt aus a) richtig wiedergibt. **15 P**

c) Eine Heuschreckenpopulation setzt sich zum Untersuchungszeitpunkt aus ca. 15000 Eiern, aus 1300 Larven 1, aus 1000 Larven 2, aus 800 Larven 3, aus 600 Larven 4 und aus 400 adulten Heuschrecken zusammen.
Berechnen Sie mit Hilfe der zur Modellierung geeigneten Populationsmatrix aus b), wie sich unter den in Aufgabenteil a) vorgegebenen Bedingungen diese Heuschreckenpopulation nach einem Zeitabschnitt von 10 Tagen entwickelt hat. **10 P**

In den Aufgabenteilen d) und e) geht es nur um adulte Heuschrecken.
Wenn Wanderheuschrecken sich zu Schwärmen zusammengeschlossen haben, verringert sich die Größe der Gelege. Gehen Sie von durchschnittlich 70 Eiern pro Gelege aus. Gehen Sie außerdem davon aus, dass ein ausgewachsenes Weibchen im Schnitt fünfmal Eier legt, bevor es stirbt. Die Überlebensraten für Eier und Larven seien unverändert diejenigen aus Teil a).

d) Zeigen Sie, dass von den Nachkommen eines Heuschreckenweibchens im Durchschnitt 10,36 das „Erwachsenenalter“ erreichen, also Adulte werden. **15 P**

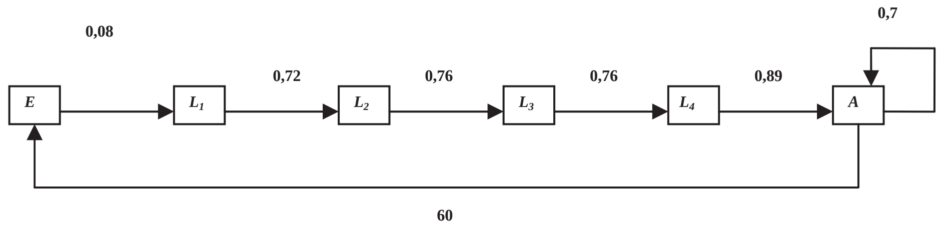
e) Zu Beobachtungsbeginn besteht ein Heuschreckenschwarm aus ca. 30 Millionen erwachsenen (adulten) Heuschrecken. Diese werden als „Generation 0“ (G_0) bezeichnet.

- Begründen Sie, dass man mit der Formel $G_n = G_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 10{,}36\right)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der adulten Heuschrecken in der *n*-ten Folgegenerationen berechnen kann.
- Bestimmen Sie die Anzahl der adulten Heuschrecken in der 4. Folgegeneration. **20 P**

Heuschreckenschwärme richten riesige Schäden in der Landwirtschaft an. Eine erwachsene Heuschrecke frisst pro Tag etwa 2 g Pflanzenmasse.

f) Bestimmen Sie näherungsweise mit Hilfe einer Abschätzung aus den bisherigen Ergebnissen, wie viel Pflanzenmasse der Heuschreckenschwarm aus e) bis einschließlich der 4. Folgegeneration vernichtet hat.
Gehen Sie davon aus, dass eine erwachsene Heuschrecke im Schnitt 50 Tage lebt.
Beurteilen Sie das Ergebnis Ihrer Schätzung. **25 P**

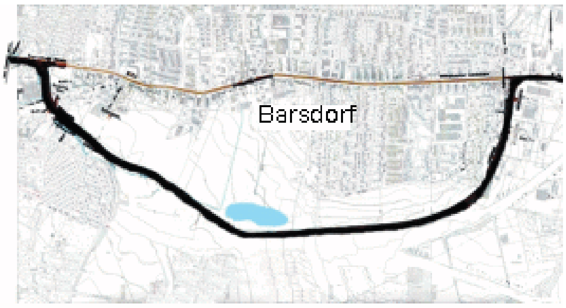
Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	 Zu beachten ist, dass am Pfeil von *A* zu *E* eine 60 erscheint. Nur die Weibchen legen Eier.	10	5	
b)	Falsch sind die Matrixelemente $a_{ii,}$ mit $i = 2, 3, 4, 5$. Da sich nach Voraussetzung die Heuschreckenlarven nach jeweils 10 Tagen in das nächste Stadium entwickelt haben, müssen dort Nullen stehen. Die richtige Matrix lautet daher: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0,08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,76 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,76 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,89 & 0,7 \end{pmatrix}$.	5	10	
c)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0,08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,76 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,76 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,89 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15\,000 \\ 1300 \\ 1000 \\ 800 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24000 \\ 1200 \\ 936 \\ 760 \\ 608 \\ 814 \end{pmatrix}$. Nach einem Beobachtungsabschnitt von 10 Tagen setzt sich die Heuschreckenpopulation aus ca. 24 000 Eiern, 1200 Larven 1, 900 Larven 2, 800 Larven 3, 600 Larven 4 und 800 adulten Heuschrecken zusammen. *Wenn nicht auf Hunderter gerundet wird, sondern eine Genauigkeit bis auf einzelne Individuen im Antwortsatz angegeben wird, so führt dies zu einem Abzug von einem Punkt von der Gesamtpunktzahl.* *Wird mit einer falschen Matrix aus b) folgerichtig weitergerechnet, führt dies nicht zu Punktabzug.*	10		
d)	Von den fünf Gelegen mit je 70 Eiern entwickeln sich nach den Vorgaben aus a) $5\cdot 70\cdot 0,08\cdot 0,72\cdot 0,76\cdot 0,76\cdot 0,89 \approx 10,36$ zu adulten Heuschrecken.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	Nach Voraussetzung beträgt das Geschlechterverhältnis 1:1. Die Hälfte der Heuschrecken sind Weibchen, von deren Nachkommen dann nach d) im Schnitt 10,36 das Erwachsenenalter erreichen. $G_0 = 30$ $G_4 = G_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 10{,}36\right)^4 = 30 \cdot 5{,}18^4 \approx 21\ 599$ Die Anzahl der adulten Nachkommen in der 4. Generation beträgt ca. 21 599 Millionen Heuschrecken.		10	10
f)	*Hier sind recht unterschiedliche Lösungswege und damit auch Ergebnisse und deren Beurteilung möglich. Für die volle Punktzahl muss das exponentielle Wachstum beachtet werden und müssen die Schäden, die von der gesamten Population angerichtet werden, Erwähnung finden.* Um die Anzahl der adulten Heuschrecken, die im vorgegebenen Zeitraum gelebt und gefressen haben, abzuschätzen, kann man z. B. die Summe $G_0 + G_1 + G_2 + G_3 + G_4$ betrachten. $30 \cdot (1 + 5{,}18 + 5{,}18^2 + 5{,}18^3 + 5{,}18^4) \approx 26\ 759$ Insgesamt sind es einschließlich der 4. Generation 26 759 Millionen Tiere.			10
	Eine erwachsene Heuschrecke frisst nach Voraussetzung 100 g an Pflanzenmasse, eine Million Adulter also 100 Tonnen. Geht man von dem Schätzwert von 26 759 Millionen erwachsener Tiere aus, so wurden 2 675 900 Tonnen an Pflanzenmasse vernichtet.		10	
	Nicht berücksichtigt wurden hierbei die Schäden, die durch die Larven angerichtet wurden.			5
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

STOCHASTIK 1

III.1 Umgehungsstraße



Die Gemeinde Barsdorf plant eine Umgehungsstraße. Dieses Projekt ist bei den Barsdorfer Bürgern und Kommunalpolitikern gleichermaßen umstritten. Bei der letzten Gemeinderatswahl erhielten die Parteien in Barsdorf folgende Stimmenanteile:
DCU 44,1 %, DPS 35,4 %, AFB 12,5 %, Sonstige 8 %.
Die Wahlbeteiligung betrug trotz des kontroversen Themas nur 75,5 %.
Eine Bürgerinitiative legt eine Umfrage vor, nach der in Barsdorf 47,5 % der DCU-Wähler, 75,3 % der DPS-Wähler und 94,5 % der AFB-Wähler gegen den Bau der Umgehungsstraße sind. Von den Wählern der restlichen Parteien und den Nichtwählern haben sich in der Umfrage jeweils 43,6 % gegen die Umgehungsstraße ausgesprochen.

a) Bestätigen Sie aus den Ergebnissen der Wahl und der Umfrage, dass ungefähr $p = 40\ \%$ der wahlberechtigten Bürger von Barsdorf die Umgehungsstraße befürworten. **20 P**

b) Stellen Sie die genannten Ergebnisse aus der Wahl und der Umfrage grafisch so dar, dass möglichst viele Informationen ablesbar sind. **15 P**

In den folgenden Aufgabenteilen sollen Sie mit $p = 60\ \%$ Gegnern der Umgehungsstraße und 40 % Befürwortern rechnen.

c) Aufgrund des Umfrageergebnisses fordert die Bürgerinitiative einen Volksentscheid über den Bau der Umgehungsstraße.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 50 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten in Barsdorf mehr als die Hälfte gegen den Bau der Umgehungsstraße stimmen würden, falls die Umfrageergebnisse der Bürgerinitiative richtig sind.. **15 P**

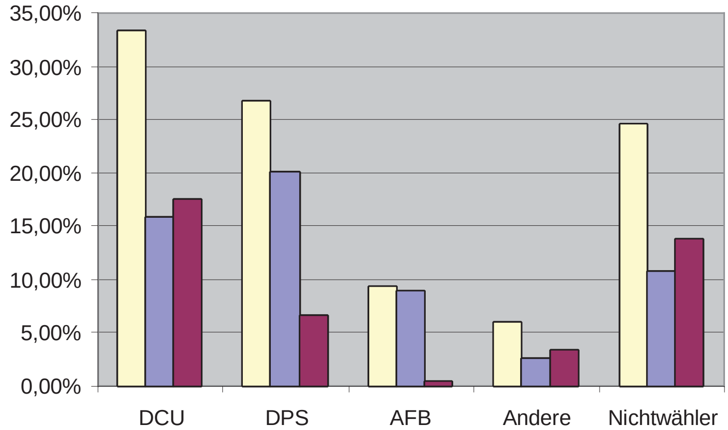
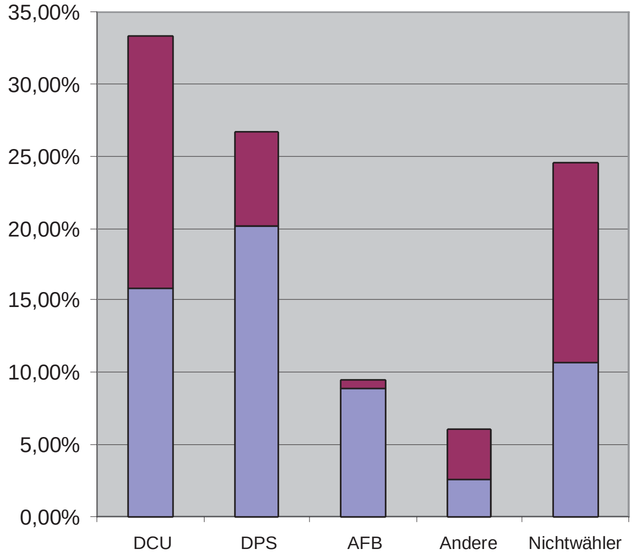
d) Die Bürgerinitiative führt eine Unterschriftensammlung gegen die Umgehungsstraße durch. Dabei gibt ein Bürger an, gegen die Umgehungsstraße zu sein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei diesem Bürger um einen DCU-Wähler handelt. **15 P**

e) Auf einer Mitgliederversammlung der DCU haben sich 855 von 1298 Anwesenden gegen den Bau der Umgehungsstraße ausgesprochen.
In der nächsten Ausgabe des Wochenblatts wird von einem deutlichen Meinungswandel innerhalb der DCU gesprochen.
Ermitteln Sie, ob sich diese Behauptung der Zeitung statistisch rechtfertigen lässt. **20 P**

f) Trotz des Ergebnisses in e) hält der Bürgermeister von Barsdorf an der Umgehungsstraße fest. Er will mit Hilfe einer erneuten zufälligen Befragung von Barsdorfer Bürgern argumentieren, dass die Umgehungsstraße mehrheitsfähig ist. Er hofft, dass dann eine Mehrheit der Befragten für die Umgehungsstraße stimmt. Er kennt sich mit den Manipulationsmöglichkeiten statistischer Verfahren gut aus und überlegt, ob er bei einem Hypothesentest als Nullhypothese $p \leq 50\%$ oder $p \geq 50\%$ wählen sollte, und ob er eher eine größere ($n = 100$) oder eine kleinere ($n = 50$) Stichprobengröße wählen sollte, um sein Ziel zu erreichen.

Beurteilen Sie dieses Problemfeld, indem Sie einen möglichen Plan des Bürgermeisters bestimmen. **15 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Der Anteil der Gegner beträgt: $G = 0{,}755 \cdot (0{,}441 \cdot 0{,}475 + 0{,}354 \cdot 0{,}753 + 0{,}125 \cdot 0{,}945 + 0{,}436 \cdot 0{,}080)$ $+ 0{,}436 \cdot 0{,}245$ $\approx 0{,}582 \approx 60\,\%$. $B = 100\,\% - G = 40\,\%$ ist der Anteil der Befürworter der Umgehungsstraße.	20		
b)	Es gibt mehrere Möglichkeiten der grafischen Darstellung:  Die Säulen, die jeweils links stehen, beziehen sich auf die erwähnte Gemeinderatswahl und geben den Anteil aller Wahlberechtigten von Barsdorf an, die mittleren Säulen stehen jeweils für die Gegner, die Säulen rechts stehen jeweils für die Befürworter der Umgehungsstraße. Alternative: gestapeltes Säulendiagramm:  			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Unten sind die Gegner der Umgehungsstraße dargestellt, oben stehen die Befürworter. Die Gesamtsäule gibt den jeweiligen Anteil aller Wahlberechtigten bei der erwähnten Gemeinderatswahl an. *Anmerkung:* *Eine Darstellung, bei der die Verbindung des Wahlergebnisses mit der Umfrage nicht deutlich wird, führt nicht zur vollen Punktzahl.*	5	10	
c)	Da die Einwohnerzahl von Barsdorf groß ist im Verhältnis zur Stichprobe, kann hier vereinfachend die Binomialverteilung für die Anzahl *G* der Gegner verwendet werden. Mehr als die Hälfte der Befragten sind mindestens 26 Personen. Gesucht ist: $P(G \geq 26) = 1 - \sum_{i=0}^{25} B(50\,;0{,}6\,;i) = \sum_{i=0}^{24} B(50\,;0{,}4\,;i) \approx 0{,}90 = 90\,\%$. Der Wert ist aus der Tabelle der summierten Binomialverteilung entnommen.		15	
d)	Es ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit zu bestimmen. Man kann ein Baumdiagramm verwenden oder direkt den Satz von Bayes. Es gilt: $p_{Gegner}(DCU - Wähler) = \frac{0{,}755 \cdot 0{,}441 \cdot 0{,}475}{0{,}6} \approx \frac{0{,}158}{0{,}6} \approx 0{,}26$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Unterzeichner DCU-Wähler ist, beträgt 26 %.		15	
e)	<u>*Bemerkung:*</u> *je nach Unterrichtsverlauf sind hier mehr oder weniger scharfe Argumentationen zu erwarten, z.B.* In der Versammlung haben sich $\frac{855}{1298} \approx 0{,}66 = 66\%$. der Anwesenden gegen die Umgehungsstraße ausgesprochen. Das sind deutlich mehr als die 47,5 %, die vorher diese Meinung hatten. Zu untersuchen ist, ob es sich dabei um eine zufällige Schwankung aufgrund der Stichprobe handelt. Wenn kein Meinungswandel eingetreten wäre, hätte die obige Stichprobe folgenden Erwartungswert und folgende Standardabweichung: $E = n \cdot p = 1298 \cdot 0{,}475 = 616{,}6 \approx 617$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{1298 \cdot 0{,}475 \cdot 0{,}525} \approx 17{,}99 \approx 18$, $2 \cdot \sigma \approx 36$. Wenn die Anzahl der Gegner unter $E + 2 \cdot \sigma \approx 653$ bleibt, kann man noch von einer zufälligen Abweichung ausgehen. Die Wahrscheinlichkeit für Umfrageergebnisse mit <u>mehr</u> als 653 Gegnern unter den 1298 befragten DCU-Mitgliedern ist unter der Annahme, dass kein Meinungswandel eingetreten ist, dann nur ca. 2%. Die Behauptung der Zeitung ist also glaubhaft.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	*Hinter dieser- nicht ganz ausgeschärften - Argumentation steckt entweder eine Betrachtung über ein Vertrauensintervall oder ein Hypothesentest mit der Nullhypothese H_0 : $p \le 0{,}475$, die auf dem 5%-Niveau verworfen werden kann, wenn mehr als ca. 653 der 1298 anwesenden DCU-Wähler gegen die Umgehungsstraße votieren. Die Unschärfe liegt darin, dass nicht deutlich gemacht wird, ob hier über Abweichungen von 47,5 % **nach oben** oder **überhaupt** argumentiert wird. Statt von 2 % könnte also auch von 5 % gesprochen werden.*		5	15
f)	Wenn sich die Situation nicht grundlegend geändert hat, dürfte es dem Bürgermeister kaum gelingen, Umfragedaten so zu erhalten, dass statistisch solide argumentiert werden kann, dass eine Mehrheit für die Umgehungsstraße ist. Aber folgende „windige“ in den Medien nicht unübliche Manipulationsmöglichkeiten wären denkbar: • Er hofft auf eine Mehrheit für die Umgehungsstraße innerhalb seiner Stichprobe (das kann vor allem bei geringer Stichprobengröße leicht passieren) und argumentiert danach unsolide mit dieser „Mehrheit“, • oder noch raffinierter: er wählt einen Hypothesentest mit der Nullhypothese, dass die Bürger mehrheitlich für den Bau der Umgehungsstraße seien. Wenn er z. B. als Stichprobengröße $n = 50$ ($n = 100$) wählt, dann kann die Hypothese auf dem 5%-Niveau erst verworfen werden, wenn mehr als 31 (58) Bürger gegen den Bau stimmen. Diese beiden Tests hätten bei unverändert angenommenem $p = 0{,}6$ *ß*-Fehler-Wahrscheinlichkeiten von 66 % (bzw. 38 %). Vor allem bei einer kleinen Stichprobe ist diese also sehr hoch. Die unsolide Argumentation läge dann darin, dass behauptet werden würde, dass die Nullhypothese gilt, obwohl im Falle, dass keine Signifikanz vorliegt, gar kein Schluss aus den Umfragedaten gezogen werden kann.		10	5
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

STOCHASTIK 2

III.2 Würfelprobleme

Der Würfel ist Bestandteil vieler Glücks- und Gesellschaftsspiele. Dabei hat das Ergebnis „6“ häufig eine besondere Bedeutung.
Für das **Werfen mit drei Würfeln** (gleichzeitig oder hintereinander) lassen sich unterschiedliche Fragestellungen betrachten, z.B. die nach der Anzahl $\boldsymbol{X}$ der gewürfelten Sechsen oder die nach der Augensumme $\boldsymbol{S}$.
Beim Spiel „chuck-a-luck“ entscheidet die Anzahl der Sechsen über die Gewinnhöhe.
Beim „Mensch-ärgere-dich-nicht“-Spiel darf der Spieler seine Spielfigur nur in das Spiel bringen, wenn er mit einem Würfel eine Sechs wirft – dies darf er zu Beginn dreimal nacheinander versuchen.
In den Aufgabenteilen a) bis e) handelt es sich um faire Würfeln, d.h. jede Augenzahl (1,…,6) hat die gleiche Wahrscheinlichkeit.

a) Berechnen Sie für das Spiel „chuck-a-luck“ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
A:„Es fällt keine Sechs” und
B:„Es fallen drei Sechsen“. **10 P**

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim Spiel „Mensch-ärgere-dich-nicht“ zu Beginn eine Spielfigur in das Spiel zu bringen. **10 P**

Der Fürst der Toskana wandte sich zu Beginn des 17. Jahrhunderts in einem Brief an Galileo Galilei (1564-1642) mit folgendem Problem: „Beim gleichzeitigen Wurf von drei gleich aussehenden Würfeln konnte ich beobachten, dass die Summe 11 häufiger erschien als die Summe 12 und die Summe 10 häufiger als die Summe 9. Jedoch können meiner Meinung nach alle diese Summen auf genau gleich viele Arten entstehen, nämlich auf sechs Arten und sind demzufolge gleich wahrscheinlich.“

c) Untersuchen Sie die Aussagen des Fürsten zur Wahrscheinlichkeit und begründen Sie Ihre Einschätzung.
Sie können dabei voraussetzen, dass das gleichzeitige Werfen von drei (gleich aussehenden) Würfeln und das Hintereinanderwerfen dieser Würfel in Bezug auf die Augensumme äquivalente Zufallsexperimente sind. Argumentieren Sie deshalb mit einem gedachten Baumdiagramm. **20 P**

d) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Augensumme von drei Würfeln ist symmetrisch.
Beschreiben Sie diese Symmetrieeigenschaft. **15 P**

e) Betrachten Sie nun das 15-malige Werfen eines Würfels (oder das gleichzeitige Werfen von 15 Würfeln). Es sei Z die binomialverteilte Anzahl der Sechsen und $W = Z + 3$.
(*W* zählt also zur Anzahl der Sechsen 3 dazu).
Ebenso wie die Augensumme S von 3 Würfeln kann auch W genau die Werte 3, 4, …17, 18 annehmen.

Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von S und W in Bezug auf

- das Ereignis, einen Wert größer als 16 zu erhalten,
- das Ereignis, einen Wert kleiner als 5 zu erhalten,
- Symmetrie (vgl. d))
- den Erwartungswert. **25 P**

f) Auf einen Würfel fällt der Verdacht der Manipulation: Ein Spielleiter behauptet, dass die „Sechs" zu häufig fällt. Deswegen soll der Würfel 100-mal geworfen werden, um eventuell die Nullhypothese $p \leq \frac{1}{6}$ auf dem Signifikanzniveau 5 % zu verwerfen.
Bestimmen Sie mithilfe der Tabelle in der Anlage den Verwerfungsbereich V und schätzen Sie die tatsächliche Größe des Fehlers 1. Art ab. **20 P**

Anlage: Tabelle akkumulierter Binomialverteilungen $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{(n-k)}$

			n =	100				
p:		0,1	1/6	0,2	0,25	0,3	0,4	
	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	1	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	2	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	3	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	4	0,0237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	5	0,0576	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	6	0,1172	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	
	7	0,2061	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	
	8	0,3209	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	
k	9	0,4513	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	
	10	0,5832	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	
	11	0,7030	0,0777	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	
	12	0,8018	0,1297	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	
	13	0,8761	0,2000	0,0469	0,0025	0,0000	0,0000	
	14	0,9274	0,2874	0,0804	0,0054	0,0001	0,0000	
	15	0,9601	0,3877	0,1285	0,0111	0,0002	0,0000	
	16	0,9794	0,4942	0,1923	0,0211	0,0006	0,0000	
	17	0,9900	0,5994	0,2712	0,0376	0,0012	0,0000	
	18	0,9954	0,6965	0,3621	0,0630	0,0024	0,0000	
	19	0,9980	0,7803	0,4602	0,0995	0,0044	0,0000	
	20	0,9992	0,8481	0,5595	0,1488	0,0076	0,0000	
	21	0,9997	0,8998	0,6540	0,2114	0,0124	0,0000	
	22	0,9999	0,9369	0,7389	0,2864	0,0190	0,0001	
	23	1,0000	0,9621	0,8109	0,3711	0,0277	0,0001	
	24	1,0000	0,9783	0,8686	0,4617	0,0380	0,0003	
	25	1,0000	0,9881	0,9125	0,5535	0,0496	0,0006	
	26	1,0000	0,9938	0,9442	0,6417	0,1108	0,0018	
	27	1,0000	0,9969	0,9658	0,7224	0,1828	0,0040	
	28	1,0000	0,9985	0,9800	0,7925	0,2632	0,0079	
	29	1,0000	0,9993	0,9888	0,8505	0,3488	0,0142	

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A lässt sich berechnen aus der Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel keine Sechs zu würfeln:
$P(A)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{216}\approx 58\%$.
Analog lässt sich für das Ereignis B berechnen: $P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}\approx 0{,}5\%$.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Eine Spielfigur kann nach dem ersten, zweiten oder dritten Wurf in das Spiel gebracht werden, jedoch nur im Falle einer Sechs.
Eine einfache Lösung ergibt sich aus der Überlegung, dass das Ereignis, „eine Spielfigur in das Spiel bringen“ (als Ereignis $\overline{A}$ bezeichnet) das Gegenereignis zum Ereignis A aus a) ist.
$P(\overline{A})=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$.
Die Wahrscheinlichkeit, zu Beginn eine Spielfigur in das Spiel zu bringen, beträgt $\frac{91}{216}\approx 42\%$.
Eine alternative Lösung ist die Betrachtung aller drei Stufen:
Die Wahrscheinlichkeit einer Sechs im ersten Wurf ist $p_1=\frac{1}{6}$.
Der zweite Wurf ist nur möglich, wenn im ersten Wurf keine Sechs geworfen worden ist. Die Wahrscheinlichkeit einer Sechs im zweiten Wurf ist
$p_2=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$.
Der dritte Wurf ist nur möglich, wenn in den ersten beiden Würfen keine Sechs geworfen worden ist. Die Wahrscheinlichkeit einer Sechs im dritten Wurf ist
$p_3=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$.
Dann ist $p_1+p_2+p_3=\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}=\frac{36+30+25}{216}=\frac{91}{216}$.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Wenn man sich das Würfeln mit 3 Würfeln als Stufenexperiment vorstellt und dazu ein dreistufiges Baumdiagramm mit je 6 Verzweigungen auf jeder Stufe, dann haben alle 216 Wege die gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich $\frac{1}{216}$.
Der Fürst hat zwar Recht, dass alle Augensummen auf sechs „Arten“ gebildet werden können:
Summe 9: (1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4) und (3,3,3),
Summe 10: (1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4) und (3,3,4),
Summe 11: (1,4,6), (1,5,5), (3,4,4), (2,4,5), (2,3,6) und (3,3,5),
Summe 12: (1,5,6), (2,4,6), (2,5,5), (3,3,6), (3,4,5) und (4,4,4).</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Diese „Arten“ (Tripel) sind aber nicht gleichwahrscheinlich, denn für die Bestimmung ihrer Wahrscheinlichkeiten sind jeweils die Wege im Baumdiagramm auszuzählen, die sie realisieren: Jedes Tripel mit drei verschiedenen Augenzahlen lässt sich durch sechs Wege realisieren z.B. 126, 162, 216, 261, 612, 621. Jedes Tripel mit zwei gleichen Augenzahlen lässt sich durch drei Wege realisieren, z.B. 144, 414, 441 und jedes Tripel mit 3 gleichen Augenzahlen lässt sich durch genau einen Weg realisieren. Damit ergibt sich $P(S=12)=\frac{6+6+3+3+6+1}{216}=\frac{25}{216}=P(S=9)$ und $P(S=11)=\frac{6+6+3+6+3+3}{216}=\frac{27}{216}=P(S=10)$. Also sind die Wahrscheinlichkeiten nicht gleich.		15	5
d)	<u>Beschreibung der Symmetrieeigenschaft:</u> In Aufgabenteil c) ist bereits gezeigt worden, dass gilt: $P(S=10)=P(S=11)$ und $P(S=9)=P(S=12)$. Leicht zu sehen ist auch, dass $P(S=3)=P(S=18)$, denn einzig möglich für diese Augensummen sind die Tripel (1,1,1) bzw. (6,6,6). Eine mögliche Überlegung geht zusätzlich von der Symmetrie des Würfels aus: Wenn bei einem Würfel die „1“ oben liegt, liegt die „6“ unten; wenn die „2“ oben liegt, liegt die „5“ unten; usw. Dies bedeutet für drei Würfel: Wenn die Augensumme 4 oben liegt, liegt die Augensumme 17 unten; wenn die Augensumme 5 oben liegt, liegt die Augensumme 16 unten; usw. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind gleich, was zur Symmetrie der W-Verteilung führt. *Alternativ kann man auch mit Hilfe der möglichen Tripel – wie in c) – argumentieren, ohne dass dabei jede Wahrscheinlichkeit berechnet werden muss.*	5	10	
e)	• $P\{S>16\}=P\{S=17\}+P\{S=18\}=\frac{3}{216}+\frac{1}{216}=\frac{1}{54}\approx 2\%$ Die Zufallsvariable Z ist $15-\frac{1}{6}$-binomialverteilt. $P\{W>16\}=P\{W>13\}=P\{W=14\}+P\{W=15\}=15\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{14}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{15}$ $=\frac{5}{6^{15}}\approx 1\cdot 10^{-11}$ $P\{W>16\}$ ist also <u>wesentlich</u> kleiner als $P\{S>16\}$ • $P\{S<5\}=P\{S>16\}\approx 2\%$ wegen der Symmetrie (vgl. d). $P\{W<5\}=P\{W<2\}=P\{W=0\}+P\{W=1\}=\left(\frac{5}{6}\right)^{15}+15\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{14}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)$ $=\frac{15\cdot 5^{14}}{6^{15}}\approx 19\%$. $P\{W<5\}$ ist also <u>größer</u> als $P\{S<5\}$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
• Symmetrie: Die Symmetrie der Verteilung von S wurde schon in d) begründet.
Für $p \neq \frac{1}{2}$ ist jede Binomialverteilung nicht symmetrisch, das kann vorausgesetzt werden, kann aber auch hier für n = 15 und $p = \frac{1}{6}$ leicht begründet werden, denn offensichtlich ist es wahrscheinlicher „keine Sechs“ zu werfen ($\left(\frac{5}{6}\right)^{15}$) als „15 Sechsen“ zu werfen ($\left(\frac{1}{6}\right)^{15}$). Dann ist aber auch die Verteilung von W nicht symmetrisch.
• Bestimmung des Erwartungswerte von S und W:
Aufgrund der Symmetrie der Verteilung von S haben jeweils die Werte S und $21–S$ die gleiche Wahrscheinlichkeit, können also in der Produktsumme zusammengefasst werden. Klammert man danach 21 aus, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}$. Also $E(S) = \frac{21}{2} = 10{,}5$.
Einfacher ist es, die (wahrscheinlich im Unterricht nicht behandelte) Additivität des Erwartungswertes auszunutzen. $E(S) = 3 \cdot 3{,}5 = 10{,}5$.
Der Erwartungswert einer Binomialverteilung beträgt $n \cdot p$, hier also $E(Z) = 15 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$. Also $E(W) = E(Z) + 3 = \frac{11}{2} = 5{,}5$.
$E(W)$ ist also nur etwa halb so groß wie $E(S)$.
</td><td></td><td>15</td><td>10</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>
Viele Sechsen sprechen gegen die Nullhypothese.
X bezeichne die Anzahl der Sechsen. Aus der Tabelle ergibt sich:
falls $p = \frac{1}{6}$, gilt für K = 23: $P\left(\{X < K\}\right) \leq 5\%$.
Falls also 23 oder mehr Sechsen fallen, sollte die Nullhypothese abgelehnt werden.
Die tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art ist kleiner oder gleich 3,3 %.
</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>