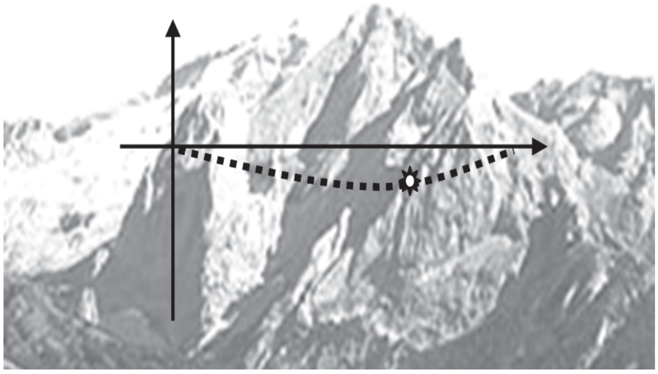
ANALYSIS 1

I.1 Tunnelbohrung

In den Alpen sind zwei Wanderwege durch ein Bergmassiv voneinander getrennt.
Um die Attraktivität des Wandergebietes für Touristen zu erhöhen, ist geplant, beide Wege durch einen Tunnel miteinander zu verbinden. Im Berginneren befindet sich außerdem eine Tropfsteinhöhle, deren Zugang ebenfalls auf der Route des Tunnels liegen soll.



Es werden **zwei Alternativen A und B für den Tunnelverlauf** vorgelegt. Abweichungen bezüglich der Himmelsrichtung sind in beiden Vorschlägen nicht vorgesehen. Die Alternativen lassen sich also durch die Graphen zweier Funktionen darstellen.

Tunneleingang und -ausgang liegen beide 10 Meter höher als der Höhlenzugang. Der Höhlenzugang befindet sich in x-Richtung in einer Entfernung von 100 Metern zum Eingang und 50 Metern zum Ausgang. Der Tunneleingang liege im Koordinatenursprung.

Damit ergeben sich die Koordinaten:

	x	y
Tunneleingang	0	0
Tunnelausgang	150	0
Höhleneingang	100	–10

Im Tunneleingang beträgt die Steigung Null.

a) Bei der **Alternative A** handelt es sich um eine ganzrationale Funktion 3. Grades.
Geben Sie die vier Bedingungen an, die die Funktion festlegen.
Bestimmen Sie mithilfe eines linearen Gleichungssystems die Funktionsgleichung. **(20P)**
(Kontrollergebnis: $f(x) = \frac{1}{50000}x^3 - \frac{3}{1000}x^2$)

b) Bestätigen Sie für die **Alternative B**, dass auch die folgende Funktionsgleichung die obigen Bedingungen erfüllt: $g(x) = \frac{20}{3}cos\left(\frac{\pi}{75}x\right) - \frac{20}{3}$. **(10P)**

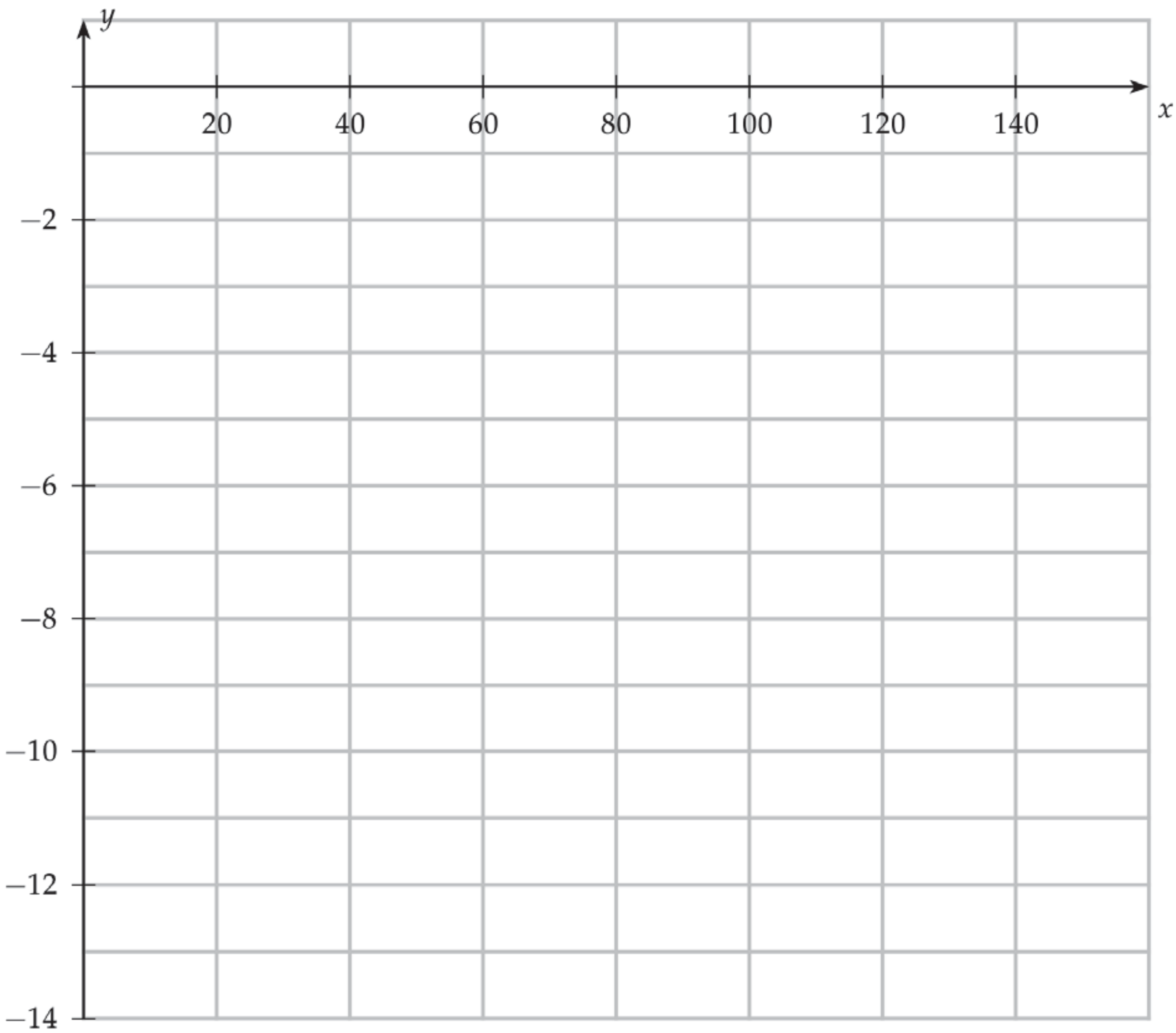
c) Bestimmen Sie für beide Tunnel A und B die Koordinaten des jeweils tiefsten Punktes und skizzieren Sie die beiden Graphen in das beigefügte Koordinatensystem. **(25P)**

d) Der <u>Betrag</u> des Gefälles bzw. der Steigung darf einen Wert von 0,3 nicht überschreiten. Wird diese Vorgabe nicht eingehalten, so müssen Stufen eingebaut werden. Ermitteln Sie, auf welchen Streckenabschnitten bei der Alternative A Stufen eingebaut werden müssen. **(20P)**

e) Zeigen Sie, dass G mit $G(x)=\frac{500}{\pi}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{75}\cdot x\right)-\frac{20}{3}\cdot x$ eine Stammfunktion von g ist. **(5P)**

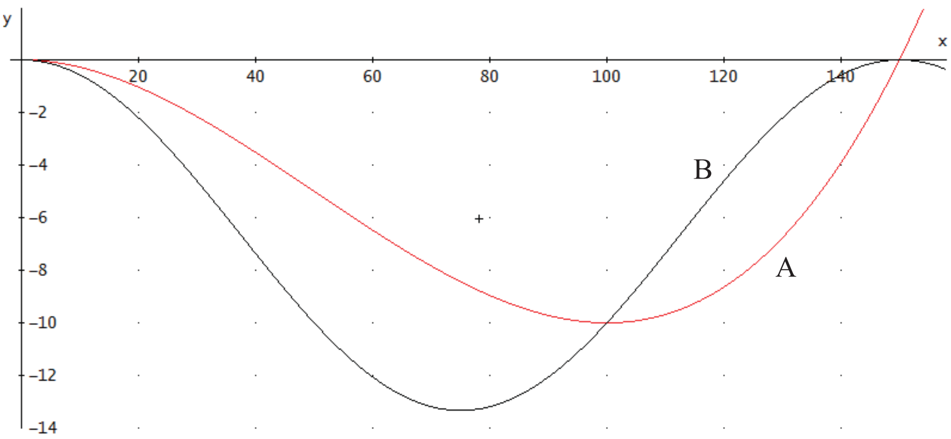
f) Bestimmen Sie, wie viele Meter die Tunnelvariante B, über die gesamte Tunnellänge gesehen, im Mittel tiefer liegt als die Variante A. **(20P)**

Anlage zur Aufgabe „Tunnelbohrung“:



Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Bedingungen: $f(0)=0$, $f(150)=0$, $f'(0)=0$, $f(100)=-10$.
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ Aus der ersten und der dritten Bedingung folgt:
$d=0$ und wegen $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ auch $c=0$.
Die beiden anderen Bedingungen ergeben:
$3375000a+22500b=0$
$1000000a+10000b=-10$
Daraus folgt:
$150000a+1000b=0$
$100000a+1000b=-1$
bzw.
$a=\frac{1}{50000} \wedge b=-\frac{3}{1000}$.
Es ergibt sich also die angegebene Lösung.</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Einsetzen in die Funktionsgleichung liefert:
$g(0)=0$, $g(150)=0$ und $g(100)=-10$.
Da die Funktionsgleichung keine Verschiebung in x-Richtung aufweist, besitzt die Kosinusfunktion an der Stelle 0 eine Maximalstelle, also gilt: $g'(0)=0$.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>**A:** $f'(x)=\frac{3}{50000}x^2-\frac{3}{500}x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=100$.
$f''(x)=\frac{3}{25000}x-\frac{3}{500}$. $f''(100)=\frac{3}{250}-\frac{3}{500}=\frac{3}{500}>0$.
Offensichtlich befindet sich an der Stelle 100 ein lokales Minimum. Die Funktion fällt links davon und steigt rechts davon. Also ist der Höhlenzugang der tiefste Punkt.
B: Wegen der Steigung 0 im Ursprung und weil der Höhleneingang unterhalb des Ursprunges liegt, ist der Ursprung ein Hochpunkt. Wegen der Symmetrie der Kosinusfunktion ist der Tunnelausgang auch ein Hochpunkt und liegt die Minimalstelle in der Mitte zwischen den beiden Maximalstellen, also bei 75.
Es gilt: $g(75)=-\frac{40}{3}$. Also ist $\left(75 \mid -\frac{40}{3}\right)$ der tiefste Punkt.
(*Anmerkung: Wendepunkt zu A: $(50 \mid -5)$ ist nicht verlangt. Da nur eine Skizze gefragt ist, kommt es hier nur auf die Lage der Tiefpunkte, den gemeinsamen Schnittpunkt und die Steigung am Eingang an.*)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
		10	15	
d)	$f'(x) = \pm 0{,}3$ $\frac{3}{50000}x^2 - \frac{3}{500}x \pm 0{,}3 = 0$ $x^2 - 100x \pm 5000 = 0$ $x_{1,2,3,4} = 50 \pm \sqrt{2500 \mp 5000}$ Lösungen gibt es nur für $x_{1,2} = 50 \pm \sqrt{2500 + 5000}$ $x_1 = 50 + \sqrt{7500} = 136{,}602...$ $x_2 = 50 - \sqrt{7500} = -36{,}602...$ Nur $x_1 \approx 136{,}60$ ist positiv und damit relevant. Aus dem Verlauf des Graphen kann man schließen, dass zwischen 136,6 m und 150 m horizontaler Entfernung vom Tunneleingang Stufen eingebaut werden müssen.		10	10
e)	Durch Anwendung der Kettenregel erhält man $G'(x) = \frac{500}{\pi} \cdot \frac{\pi}{75} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{75} \cdot x\right) - \frac{20}{3}$ $= \frac{20}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{75} \cdot x\right) - \frac{20}{3} = g(x)$.		5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Bestimmung der durchschnittlichen Abstände zwischen Graphen und x-Achse: Tunnel A: $\frac{1}{150}\cdot\int_0^{150}\left(\frac{1}{50000}x^3-\frac{3}{1000}x^2\right)dx=\frac{1}{150}\cdot\left[\frac{1}{200000}x^4-\frac{1}{1000}x^3\right]_0^{150}=-5,625$ Tunnel B: $\frac{1}{150}\cdot\int_0^{150}\left(-\frac{20}{3}\cos\left(\frac{\pi}{75}x\right)+\frac{20}{3}\right)dx=\frac{1}{150}\cdot\left[-\frac{500}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{75}x\right)+\frac{20}{3}x\right]_0^{150}=-\frac{20}{3}$. Durchschnittliche Höhendifferenz zwischen den beiden Tunneln: $-5,625-\left(\frac{20}{3}\right)=1,041...$ Damit haben die beiden Tunnel eine mittlere Höhendifferenz von etwa 1,04 m.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

ANALYSIS 2

I.2 Fischexperiment

In einem See werden einige Fische einer bisher dort nicht lebenden Art ausgesetzt. Die Anzahl der Fische wird regelmäßig ermittelt und nach einer Weile wird festgestellt, dass die Populationsentwicklung in zwei Phasen ablief, die durch die folgende zweiteilige Funktion beschrieben werden kann. Die Zeitachse für die erste Phase beginnt bei $t = -20$ und endet bei $t = 0$, wobei die zweite Phase zu diesem Zeitpunkt anfängt. Die Einheit der Zeit t ist *Tage*.

$$f(t) = \begin{cases} 300 \cdot e^{0,1t} & \text{in Phase I für } t < 0 \\ 600 - 300 \cdot e^{-0,1t} & \text{in Phase II für } t \geq 0 \end{cases}$$

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f mit Hilfe einer Wertetabelle für $-20 \leq t \leq 20$ in das als Anlage beigefügte Koordinatensystem ein. **(10P)**

b) Die Wahl der Zeitachse mit dem Beginn des Experiments bei $t = -20$ ist ungewöhnlich. Sie ist durch Symmetrieeigenschaften der Funktion begründet.

- Beschreiben Sie die Symmetrie der Funktion und geben Sie an, warum dies die Wahl der Zeitachse sinnvoll macht.
- Weisen Sie nach, dass beide Rechenausdrücke der Funktion für $t = 0$ dasselbe Ergebnis liefern und beschreiben Sie, was das für die Funktion bzw. die Fischpopulation bedeutet.
- Weisen Sie nach, dass der Funktionsgraph für $t = 0$ keinen Knick hat. **(15P)**

c) Beschreiben Sie die Entwicklung der Fischpopulation unter Verwendung

- der Anzahl der zu Beginn der ersten Phase ausgesetzten Fische sowie
- der Anzahl der Fische, die man für sehr große Zeitwerte erwartet.

Geben Sie die Bedeutung der Zahlenwerte 300, 600 sowie 0,1 in der Funktionsvorschrift in Bezug auf die Fischpopulation an. **(15P)**

d) Die Funktion hat für $t = 0$ einen Wendepunkt. Dieser kann nicht mit den üblichen Mitteln bestimmt werden.

Begründen Sie, dass für $t = 0$ ein Wendepunkt vorliegt und beschreiben Sie die Bedeutung des Wendepunktes für die Entwicklung der Fischpopulation. **(15P)**

e) Bestimmen Sie die durchschnittliche Fischanzahl für den Zeitraum [–20; 0[sowie für den Zeitraum [–20; 20]. **(15P)**

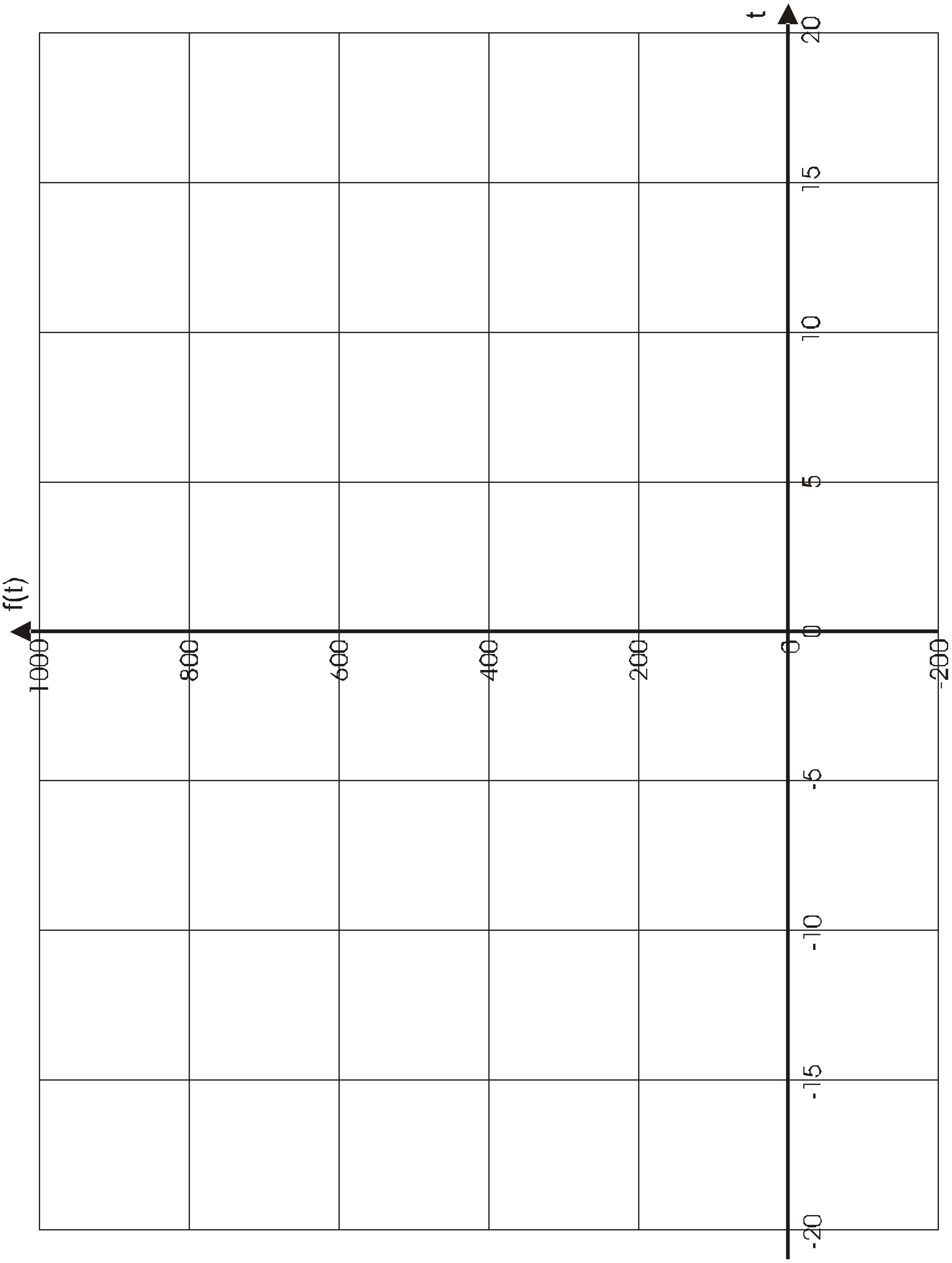
f) Die Ergebnisse der Forschung sollen veröffentlicht werden. Hierfür scheint es sinnvoller zu sein, die Funktion so zu formulieren, dass die Fische zum Zeitpunkt $t = 0$ ausgesetzt werden und dementsprechend die Phase II zum Zeitpunkt $t = 20$ beginnt.

Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift, die für die Veröffentlichung benötigt wird. **(15P)**

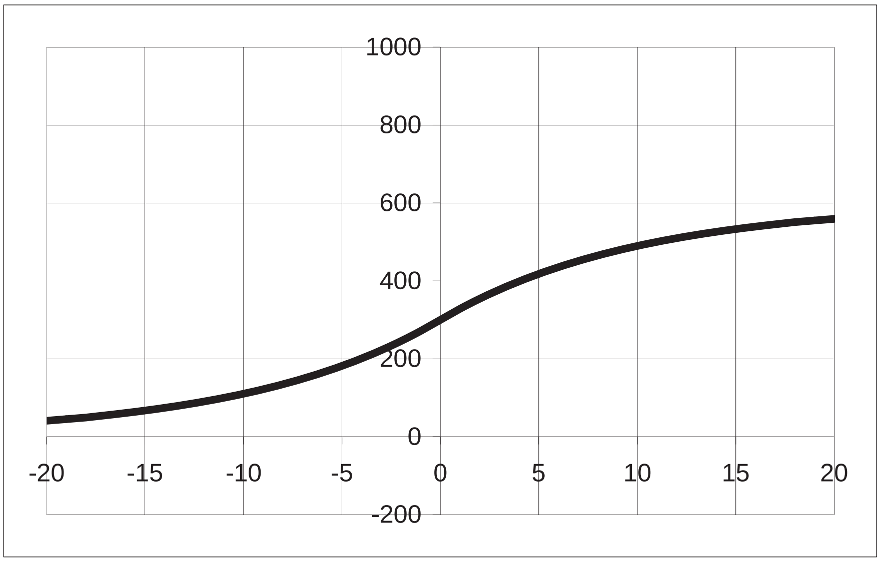
g) Die Fische werden aus dem See komplett abgefischt, um das Experiment zu wiederholen. Bei der zweiten Durchführung des Experimentes soll den Fischen ständig mehr Futter zur Verfügung stehen. Es ist eine biologische Gesetzmäßigkeit, dass eine Erhöhung des Futterangebots zu einer Vergrößerung der Population führt.

Bestimmen Sie eine mögliche Funktionsvorschrift, die Sie für das neue Experiment bei gleichen Anfangsbedingungen erwarten. Wählen Sie dabei die Zahlenwerte in der Funktionsvorschrift sinnvoll und begründen Sie die Wahl. **(15P)**

Anlage zur Aufgabe „Fischexperiment“



Erwartungshorizont

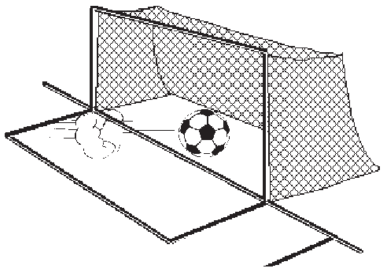
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	 	10		
b)	• Durch die Wahl der Zeitachse ist die Funktion symmetrisch zum Punkt (0; 300). (Die beiden Phasen werden dadurch besonders gut vergleichbar.) $300\cdot e^{0,1\cdot 0} = 600 - 300\cdot e^{-0,1\cdot 0} = 300$. • Wäre dies nicht der Fall, würde die Funktion nicht durchgehend verlaufen, bzw. die Fischpopulation würde sprunghaft steigen oder fallen, was nicht realistisch wäre. • „Kein Knick“ heißt, dass die Ableitung für die beiden Phasen an der Stelle Null denselben Wert liefert. $f'(t) = \begin{cases} 300\cdot 0,1\cdot e^{0,1t} & \text{in Phase I für } t < 0 \\ 300\cdot 0,1\cdot e^{-0,1t} & \text{in Phase II für } t \geq 0 \end{cases}$ Beide Ausdrücke ergeben für $t = 0$ den Wert 30, die Funktion hat also keinen Knick.	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	$f(-20) \approx 40{,}6$, es werden etwa 40 / 41 Fische ausgesetzt. Die Fischpopulation wächst über den gesamten Zeitraum an. Von $t = -20$ bis $t = 0$ steigt dabei die Wachstumsrate an, danach sinkt die Wachstumsrate. Die Anzahl der Fische nähert sich immer mehr der Grenze 600 an, da der Ausdruck $e^{-0{,}1t}$ immer kleiner wird / gegen Null geht. Die Zahl 300 in der Funktionsvorschrift für die erste Phase gibt die Anzahl der Fische zum Zeitpunkt $t = 0$ an. Die 600 in der Funktionsvorschrift für die zweite Phase gibt die maximal mögliche Fischanzahl an. Der Koeffizient 300 in diesem Ausdruck bewirkt, dass zum Zeitpunkt Null 300 Fische weniger als die Maximalzahl 600 vorhanden sind. Der Exponent 0,1 hat Einfluss auf die Wachstumsgeschwindigkeit: Je größer dieser Wert ist, desto steiler verläuft der Graph in der näheren Umgebung von $t = 0$. Die Wachstumsgeschwindigkeit ist hier also größer als in der weiteren Umgebung.	10	5	
d)	$f''(t) = \begin{cases} 3 \cdot e^{0{,}1t} & \text{in Phase I für } t < 0 \\ -3 \cdot e^{-0{,}1t} & \text{in Phase II für } t \geq 0 \end{cases}$ Die Potenz e^{at} ist immer positiv; in Phase I ist die zweite Ableitung also immer positiv, in Phase 2 negativ, dazwischen muss also ein Wendepunkt liegen. Die Fischpopulation wächst für $t = 0$ am stärksten.	5	10	
e)	Der Durchschnittswert kann mit dem Integral bestimmt werden: $\frac{\int_{-20}^{0} 300 \cdot e^{0{,}1t}\,dt}{20} = \frac{3000 \cdot e^{0{,}1t}\Big\vert_{-20}^{0}}{20} = \frac{3000 - 3000 \cdot e^{-2}}{20} \approx 130$. Auch das Berechnen mehrerer Funktionswerte im Intervall [–20; 0[und das anschließende Ermitteln des arithmetischen Mittelwertes soll so bewertet werden wie der Integralansatz. *Werden für den Mittelwert z.B. nur die Funktionswerte an den Intervallgrenzen berechnet und daraus der arithmetische Mittelwert gebildet, so soll es dafür eine geringere Punktzahl geben.* Für das Intervall [–20; 20] gilt: Aus Symmetriegründen sind über den Gesamtzeitraum durchschnittlich 300 Fische im Teich.		10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Eine Verschiebung des Koordinatensystems in negativer x-Richtung bewirkt folgende Form der Funktionsterme: $\tilde{f}(t)=\begin{cases} 300\cdot e^{0,1(t-20)} & \text{in Phase I für } t<20 \\ 600-300\cdot e^{-0,1(t-20)} & \text{in Phase II für } t\geq 20 \end{cases}$		15	
g)	Die Erhöhung der Futtermenge wird in gewissem Maße die Wachstumsgeschwindigkeit erhöhen und somit den Faktor 0,1 leicht erhöhen. Gleichzeitig wird die Maximalzahl der Fische steigen. Unter der Annahme, dass in $t=-20$ wieder nur 40 Fische ausgesetzt werden und der Faktor sich beispielsweise von 0,1 auf 0,15 erhöht, ergibt sich für die Ermittlung des konstanten Faktors k im Funktionsterm der Phase I folgende Rechnung: $40=k\cdot e^{0,15\cdot(-20)} \Leftrightarrow k=803,421..\approx 803$. Aus der Symmetrieeigenschaft lässt sich die zugehörige Maximalzahl der Fische von 1606 unmittelbar herleiten. Ein mögliches Ergebnis ist somit: $g(t)=\begin{cases} 803\cdot e^{0,15t} & \text{in Phase I für } t<0 \\ 1606-803\cdot e^{-0,15t} & \text{in Phase II für } t\geq 0 \end{cases}$			15
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA / AG 1

II.1 Fußball



Das Fußballfeld des FC Schienbein 08 ist 100 m lang und 60 m breit.

Ein Fußballtor hat als Innenmaße näherungsweise eine Breite von 7,3 m und eine Höhe von 2,4 m. Das Tor befindet sich genau in der Mitte der kurzen Spielfeldbegrenzungen.

In der Abbildung (siehe Anlage) ist eine Spielfeldecke im Koordinatenursprung. Eine Einheit des Koordinatensystems entspricht 1 m in der Realität.

a) Geben Sie die Koordinaten der in der Anlage mit *A* bezeichneten oberen Innenecke des rechten Tores an. **(10P)**

Bei der zweidimensionalen Darstellung eines dreidimensionalen Geschehens tritt das Problem auf, dass aus der Lage eines Punktes in der zweidimensionalen Darstellung nicht eindeutig auf die Lage des Punktes im tatsächlichen dreidimensionalen Geschehen geschlossen werden kann.
So könnte der Punkt *B* in der Abbildung (Anlage) die Koordinaten $B(40|80|10)$, aber auch die Koordinaten $B(30|75|5)$ haben. Es gibt sogar eine unbegrenzte Anzahl an Möglichkeiten, passende Koordinaten anzugeben.

b) Zeichnen Sie zur Bestätigung des oben beschriebenen Phänomens in das obige Koordinatensystem die Punkte $P\ (10|30|30)$ und $Q\ (20|35|35)$ ein und ermitteln Sie die Koordinaten eines möglichen dritten Punktes, der in der Zeichnung von *P* und *Q* nicht unterschieden werden kann. **(15P)**

Beim Pokalendspiel zwischen FC Schienbein 08 gegen Eintracht Ausdauer 98 kommt es nach einem Foulspiel zu einem Freistoß. Der Freistoß wird vom Punkt *F* aus ausgeführt, der näherungsweise durch die Koordinaten $F(20|75|0)$ gegeben ist. Bei der Fernsehübertragung wird die Entfernung zum Tor eingeblendet.

c) Beschreiben Sie, dass es mehrere sinnvolle Möglichkeiten gibt, die Entfernung des Freistoßpunktes zur Torlinie zwischen den Pfosten anzugeben. Nennen Sie mindestens zwei und berechnen Sie **eine** Entfernung. **(15P)**

Obwohl sich ein paar Spieler zum Schutz des Tores als „Mauer“ aufgestellt haben, schießt Hansi Hammerhart den Freistoß direkt in die von ihm aus rechte obere Ecke des Tores (unmittelbar links unterhalb des Punktes *A* aus Aufgabenteil a).

Dieser Torschuss soll mathematisch untersucht werden.

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Flugbahn des Balles näherungsweise eine Gerade ist und dass der Balldurchmesser 22 cm beträgt.

d) Bestimmen Sie die Geradengleichung für den Flug des Ballmittelpunktes. **(15P)**

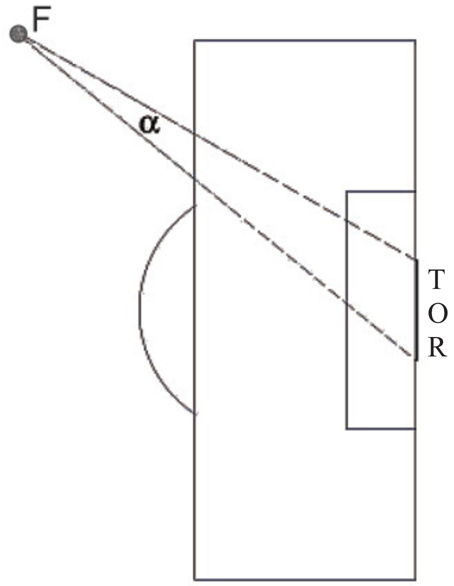
Hinweis:
Falls Sie im Aufgabenteil d) keine Gleichung ermitteln konnten, verwenden Sie die folgende:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 13{,}23 \\ 62{,}5 \\ -0{,}98 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 27{,}08 \\ 50 \\ 4{,}36 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}.$$

Bei diesem Freistoß stellt sich die Mauer etwa an der 16-Meter-Linie (Strecke, die parallel zur Torlinie ist und im Abstand von 16 m zu ihr verläuft) auf.

e) Ermitteln Sie, in welcher Höhe über dem Boden der Ballmittelpunkt die 16-Meter-Linie passiert. **(15P)**

Für den Schützen ist das Tor umso leichter zu treffen, je größer der „Torwinkel“ ist. Dieser Torwinkel α hat seinen Scheitel in der Ballposition $F(20|75|0)$, in der der Ball den Boden berührt. Seine Schenkel enthalten die Schnittpunkte der beiden Torpfosten und dem Boden (siehe Abbildung rechts).

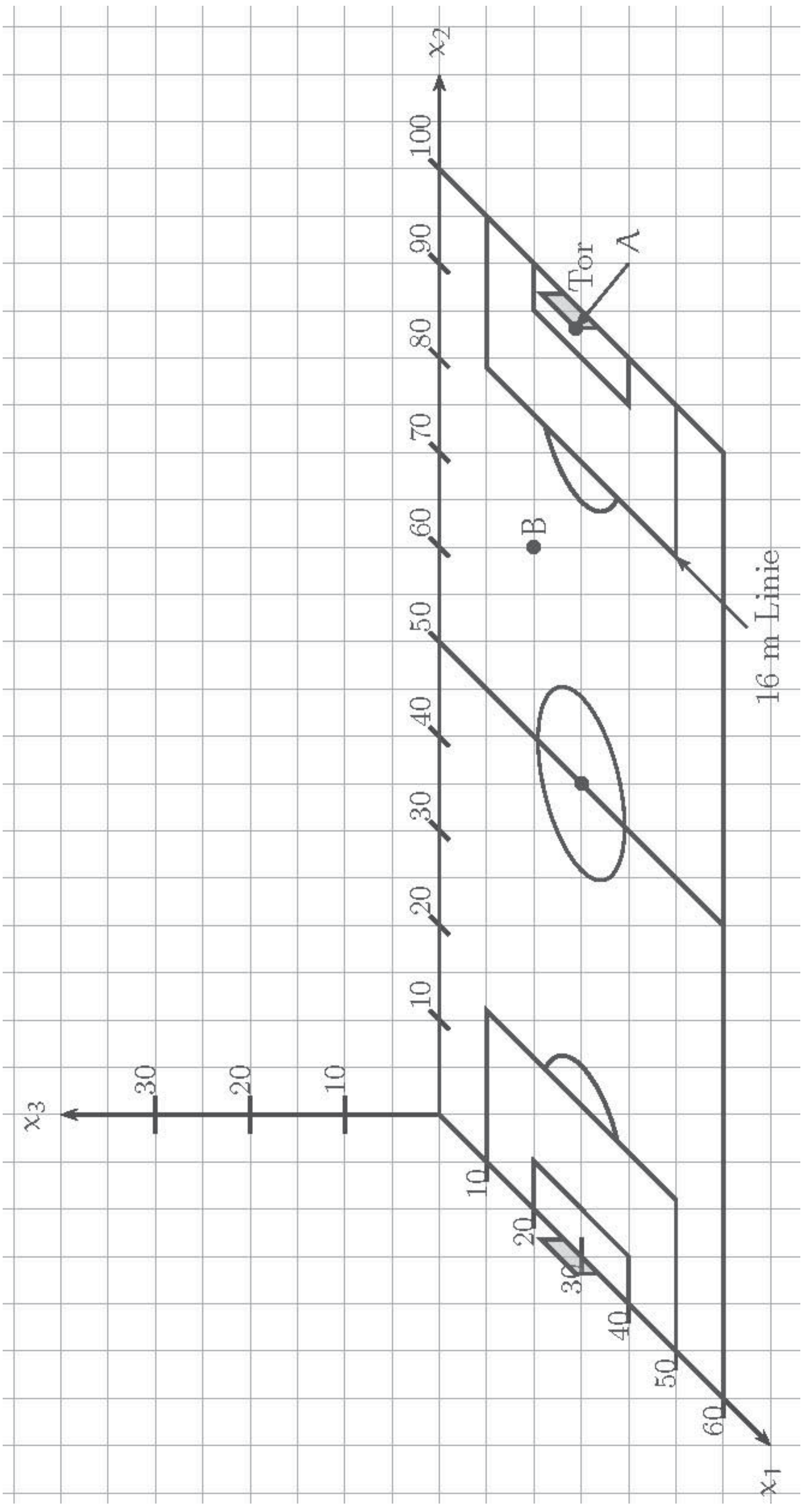


f) Bestimmen Sie den Torwinkel α für den Freistoß von Hansi Hammerhart. **(15P)**

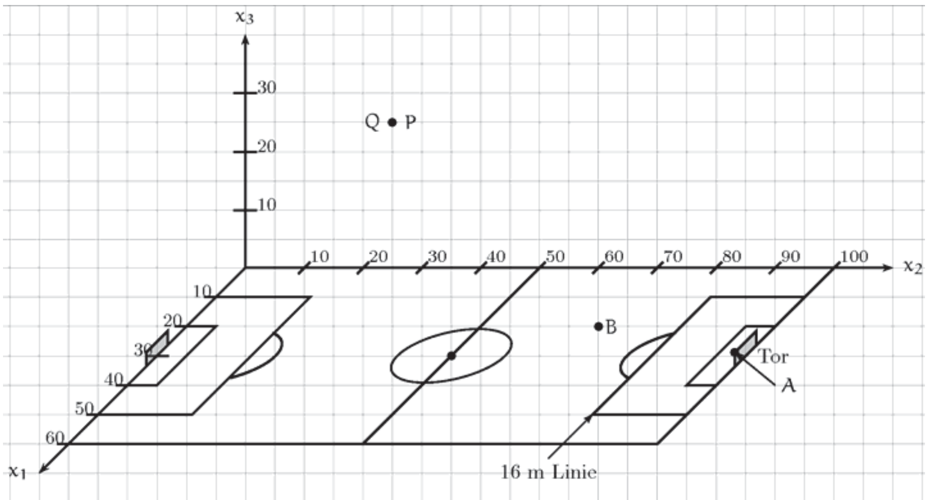
g) Gemäß den Spielregeln muss die Mauer beim Freistoß einen Mindestabstand von 9,15 m zum Freistoßpunkt einhalten.

Ermitteln Sie die Mindestlänge einer geraden Mauer, die regelgerecht einen Torwinkel von 16° vollständig abdeckt. **(15P)**

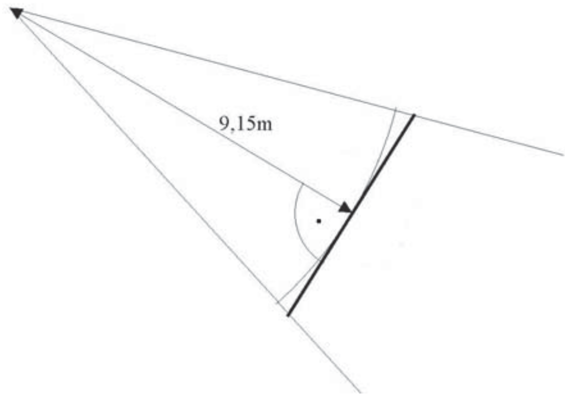
Anlage zur Aufgabe „Fußball“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Koordinaten von A: Es gilt $x_2 = 100$ und $x_3 = 2{,}4$ und weiter $x_1 = 30 + \frac{7{,}3}{2} = 33{,}65$, also $A(33{,}65 \mid 100 \mid 2{,}4)$.	10		
b)	 Das Einzeichnen ergibt, dass P und Q die gleiche Lage auf dem Papier haben. Ein möglicher dritter Punkt kann bestimmt werden, indem zuerst eine frei gewählte Länge in x_3-Richtung im Koordinatensystem abgetragen wird, z.B. $x_3 = 40$, und anschließend passend die Lage des Punktes in der x_1-x_2-Ebene bestimmt wird: (30 | 40 | 40). Das Verfahren zur Bestimmung sollte entweder beschrieben werden oder aus der Zeichnung im Koordinatensystem erkennbar sein. Auch die freie Wahl der x_1-Koordinate (oder x_2-Koordinate) ist möglich.	5	10	
c)	Die Torlinie zwischen den Pfosten besteht im Prinzip aus unendlich vielen Punkten. Zur Abstandsbestimmung des Freistoßpunktes $F(20 \mid 75 \mid 0)$ mit dieser Torlinie können unterschiedliche Punkte gewählt werden. Zwei Möglichkeiten sind: 1. Die **kürzeste Entfernung** zum vom Spieler aus linken Pfosten (Koordinaten (26,35 | 100 | 0)). $s_1 = \sqrt{(26{,}35-20)^2 + (100-75)^2 + (0-0)^2} \approx 25{,}79\ (m)$. 2. Der **Abstand zur Tormitte** (Koordinaten (30 | 100 | 0)): $s_2 = \sqrt{(30-20)^2 + (100-75)^2 + (0-0)^2} \approx 26{,}93\ (m)$.	10	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	Der Ballmittelpunkt ist 11 cm über dem Freistoßpunkt, denn der Radius ist zu beachten: $G(20 \mid 75 \mid 0{,}11)$. Für den Punkt W im Torwinkel ist der Punkt A aus Aufgabenteil a) Ausgangspunkt, doch der Ballmittelpunkt (Radius $r = 0{,}11$ m) ist zu beachten! Mit $x_1 = 30 + 7{,}3 : 2 - 0{,}11$ und $x_3 = 2{,}4 - 0{,}11$ ergibt sich $W(33{,}54 \mid 100 \mid 2{,}29)$. Aus den zwei Punkten G und W ergibt sich dann die Geradengleichung: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 75 \\ 0{,}11 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 33{,}54 - 20 \\ 100 - 75 \\ 2{,}29 - 0{,}11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 75 \\ 0{,}11 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 13{,}54 \\ 25 \\ 2{,}18 \end{pmatrix}.$		5	10
e)	Am gesuchten Punkt der 16-m-Linie ist die x_2-Koordinate des Ballmittelpunktes 84, mit der Geradengleichung aus d) ergibt sich die einfache Gleichung $\begin{pmatrix} 20 \\ 75 \\ 0{,}11 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 13{,}54 \\ 25 \\ 2{,}18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 84 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow r = \frac{9}{25} = 0{,}36$ Eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich eine Höhe des Ballmittelpunktes $x_3 = 0{,}11 + 0{,}36 \cdot 2{,}18 = 0{,}8948$. Der Ballmittelpunkt passiert die 16-m-Linie etwa in einer Höhe von 89 cm.		15	
f)	Die zwei Richtungsvektoren von $F(20 \mid 75 \mid 0)$ zu den Torpfosten $(26{,}35 \mid 100 \mid 0)$ bzw. $(33{,}65 \mid 100 \mid 0)$ müssen bestimmt werden. Damit ist der Winkel zu berechnen gemäß: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 6{,}35 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13{,}65 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 6{,}35 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 13{,}65 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} \approx \dfrac{711{,}7}{734{,}7} \approx 0{,}969.$ Damit gilt: $\alpha \approx 14{,}4°$.	5	10	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>g)</td><td>Eine Skizze könnte wie folgt aussehen:


Nach der Regel vom Mindestabstand dürften die Abwehrspieler auf einem Kreisbogen stehen, der den Torwinkel abdeckt. Da die Mauer jedoch gerade ist, verläuft sie tangential zu diesem Kreisbogen, wenn die Länge minimal sein soll. Der Berührpunkt der Mauer mit dem Bogen ist dann die Mitte der Mauer (unmittelbar aus der Anschauung einsichtig, ein Nachweis hierfür wird nicht verlangt).
Für die halbe Länge $\frac{l}{2}$ dieser Mauer gilt:
$\tan 8° = \frac{\frac{l}{2}}{9,15}$
$l = \tan 8° \cdot 18,3$
$l = 2,571...$
Die Länge der Mauer beträgt ca. 2,60 m.</td><td></td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

LA / AG 2

II.2 Bevölkerungsentwicklung in Deutschland

Gegen Ende des Jahres 2005 lebten ca. 82,5 Millionen Menschen in Deutschland.

Die Verteilung der Bevölkerung auf verschiedene Altersklassen ist der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Altersklasse	Anzahl in Mio.
0-19 Jahre	16,5
20-39 Jahre	21,4
40-59 Jahre	24,0
ab 60 Jahre	20,6
gesamt	**82,5**

Im Folgenden soll die Bevölkerungsentwicklung in Deutschland mit Hilfe eines dem Leslie-Modell ähnlichen Modells prognostiziert werden. Die jährliche Bevölkerungsentwicklung wird dafür stark vereinfacht – ohne Berücksichtigung der Auswirkungen von Aus- und Zuwanderungen – durch die nachstehende Populationsmatrix L beschrieben:

$$L = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,95 & 0 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0,96 \end{pmatrix}.$$

Liegt die Verteilung der Bevölkerung auf die oben angegebenen vier Altersklassen in einem Populationsvektor $\vec{v}_{2005}$ vor, so kann man die Bevölkerung nach einem Jahr mit $\vec{v}_{2006} = L \cdot \vec{v}_{2005}$ berechnen.

a) Aufgrund der Einteilung in nur vier Altersklassen verbleibt von Jahr zu Jahr jeweils ein Teil der Menschen in seiner bisherigen Altersklasse. Beispielsweise wird ein 45-jähriger auch nach einem Jahr noch der Altersklasse „40-59 Jahre“ angehören.

- Geben Sie den Matrix-Eintrag an, der den jährlichen Anteil von Menschen beschreibt, die in der Altersklasse „40-59 Jahre“ verbleiben.
- Geben Sie mithilfe der Populationsmatrix an, wie viel Prozent der Menschen der Altersklasse „40-59 Jahre“ in die Altersklasse „ab 60 Jahre“ übergehen.
- Bestimmen Sie, welcher Anteil von Menschen der Altersklasse „40-59 Jahre“ jährlich stirbt (Angabe in Prozent).
- Geben Sie die Bedeutung des Matrixelements $a_{1,2} = 0,03$ an. **(20P)**

b) Stellen Sie das Modell mit einem Übergangsgraphen dar. **(10P)**

c) Die Zusammensetzung der deutschen Bevölkerung zum Ende des Jahres 2005 ist der obigen Tabelle zu entnehmen.

- Berechnen Sie unter Verwendung der Matrix L, wie sich die Bevölkerung am Ende des Jahres 2006, im Rahmen des Modells zusammensetzen würde.
- Bestimmen Sie mit Hilfe des Modells die Zusammensetzung der Bevölkerung am Ende des Jahres 2004. **(25P)**

d) Bestimmen Sie die Matrix L^2, ohne die Matrizenelemente zu runden, und ermitteln Sie mit deren Hilfe die Bevölkerungszahlen am Ende des Jahres 2007. **(15P)**

e) Tatsächlich lebten Ende des Jahres 2007 mit ca. 82,2 Millionen Menschen in Deutschland, also noch rund eine Million Menschen mehr, als vom Modell her prognostiziert.

Begründen Sie, welche Faktoren außer einer Zuwanderung zu dieser Abweichung führen können. **(5P)**

f) Prognosen zur Bevölkerungsentwicklung basieren auf Hypothesen und sind deshalb mit Unsicherheiten behaftet. Ihre Ergebnisse hängen zum einen von der aktuellen Bevölkerungszahl und ihrer Zusammensetzung und zum anderen von den Annahmen zur Entwicklung ab. Da der Verlauf der einzelnen Komponenten mit zunehmendem Abstand vom Basiszeitpunkt (hier 2005) immer schwerer vorhersehbar ist, haben langfristige Prognosen nur reinen Modellcharakter.

Gegeben ist die Matrix L^{10}:

$$L^{10} = \begin{pmatrix} 0,644 & 0,193 & 0 & 0 \\ 0,321 & 0,644 & 0 & 0 \\ 0,060 & 0,257 & 0,599 & 0 \\ 0,007 & 0,050 & 0,264 & 0,655 \end{pmatrix}.$$

- Beschreiben Sie die Bedeutung der Matrix L^{10} für die Prognose der Bevölkerungsentwicklung in Deutschland.
- Bestimmen Sie die mit Hilfe der Matrix L^{10} zu prognostizierende Zusammensetzung der Bevölkerung in Deutschland jeweils zum Ende des Jahres 2015 und des Jahres 2025.
- Beurteilen Sie die Aussage eines Mitarbeiters des statistischen Bundesamtes, dass in den nächsten zwanzig Jahren bei unveränderten Annahmen zur Bevölkerungsentwicklung der Anteil der Menschen, die mindestens 60 Jahre alt sind, an der Gesamtbevölkerung trotz sinkender Bevölkerungszahlen ständig steigt. **(25P)**

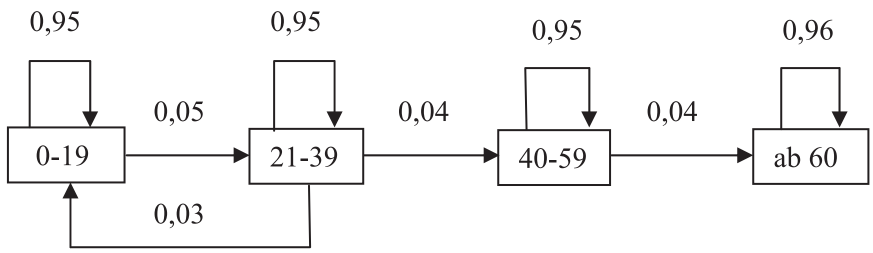
Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

- $a_{33} = 0{,}95$, also verbleiben 95 % in der 3. Altersklasse (40-59 Jahre).
- $a_{43} = 0{,}04$, also gehen 4 % in die 4. Altersklasse (ab 60 Jahre) über.
- 95 % verbleiben, 4 % wechseln in die nächste Altersklasse.
Daraus folgt, dass 1 % der 40-59-jährigen stirbt.
- Die Anzahl der Neugeborenen beträgt 3 % der Anzahl der 20-39-jährigen.

</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Übergangsgraph:



</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

- $\vec{v}_{2006} = L \cdot \vec{v}_{2005}$

$$L \cdot \vec{v}_{2005} = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}04 & 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}96 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16{,}5 \\ 21{,}4 \\ 24{,}0 \\ 20{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16{,}317 \\ 21{,}155 \\ 23{,}656 \\ 20{,}736 \end{bmatrix} = \vec{v}_{2006}$$

Die Zusammensetzung der Bevölkerung am Ende des Jahres 2006 lässt sich aus dem Vektor $\vec{v}_{2006}$ ablesen.

- $\vec{v}_{2005} = L \cdot \vec{v}_{2004}$ Das sich ergebende lineare Gleichungssystem lässt sich in eine erweiterte Koeffizientenmatrix übertragen.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0{,}95 & 0{,}03 & 0 & 0 & 16{,}5 \\ 0{,}05 & 0{,}95 & 0 & 0 & 21{,}4 \\ 0 & 0{,}04 & 0{,}95 & 0 & 24{,}0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}96 & 20{,}6 \end{array}\right]$$

Die ersten beiden Zeilen liefern die ersten beiden Werte *a* und *b* des gesuchten Vektors. Durch weiteres Einsetzen in die letzten beiden Zeilen lassen sich die Werte *c* und *d* ermitteln. Somit ergibt sich:

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>$$\vec{v}_{2004} = \begin{bmatrix} 16,685 \\ 21,648 \\ 24,352 \\ 20,444 \end{bmatrix}$$
Die Zusammensetzung der Bevölkerung am Ende des Jahres 2004 lässt sich aus dem Vektor $\vec{v}_{2004}$ ablesen.</td><td>10</td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>$$L^2 = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,95 & 0 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0,96 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0,904 & 0,057 & 0 & 0 \\ 0,095 & 0,904 & 0 & 0 \\ 0,002 & 0,076 & 0,9025 & 0 \\ 0 & 0,0016 & 0,0764 & 0,9216 \end{bmatrix}$$
$$\vec{v}_{2007} = L^2 \cdot \vec{v}_{2005}$$
$$\vec{v}_{2007} = \begin{bmatrix} 0,904 & 0,057 & 0 & 0 \\ 0,095 & 0,904 & 0 & 0 \\ 0,002 & 0,076 & 0,9025 & 0 \\ 0 & 0,0016 & 0,0764 & 0,9216 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16,5 \\ 21,4 \\ 24,0 \\ 20,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,1358 \\ 20,9131 \\ 23,3194 \\ 20,8528 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 16,14 \\ 20,91 \\ 23,32 \\ 20,85 \end{bmatrix}$$
Die Zusammensetzung der Bevölkerung am Ende des Jahres 2007 lässt sich aus dem Vektor $\vec{v}_{2007}$ ablesen.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Die grobe Einteilung der Altersklassen kann zu Abweichungen zwischen Prognose und tatsächlicher Entwicklung der Bevölkerung führen.
Eine durch finanzielle Anreize hervorgerufene höhere Geburtenrate bzw. eine durch bessere medizinische Versorgung resultierende niedrigere Sterberate könnte zur, im Vergleich zur Prognose, höheren Bevölkerungszahl geführt haben.</td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>

- Mit Hilfe der Matrix L^{10} kann im Rhythmus von 10 Jahren eine Prognose für die Bevölkerungsentwicklung in Deutschland ermittelt werden. Durch die Gleichung $\vec{v}_{2015} = L^{10} \cdot \vec{v}_{2005}$ ist z. B. eine Prognose für die Bevölkerungsentwicklung am Ende 2015 möglich.

- Zusammensetzung der Bevölkerung Ende 2015 und Ende 2025:

$\vec{v}_{2015} = L^{10} \cdot \vec{v}_{2005}$

$$\vec{v}_{2015} = \begin{bmatrix} 0,644 & 0,193 & 0 & 0 \\ 0,321 & 0,644 & 0 & 0 \\ 0,060 & 0,257 & 0,599 & 0 \\ 0,007 & 0,050 & 0,264 & 0,655 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16,5 \\ 21,4 \\ 24,0 \\ 20,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,756 \\ 19,078 \\ 20,866 \\ 21,015 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 14,76 \\ 19,08 \\ 20,87 \\ 21,02 \end{bmatrix}$$

$\vec{v}_{2025} = L^{10} \cdot L^{10} \cdot \vec{v}_{2005} \Leftrightarrow \vec{v}_{2025} = L^{10} \cdot \vec{v}_{2015}$

$$\vec{v}_{2025} = \begin{bmatrix} 0,644 & 0,193 & 0 & 0 \\ 0,321 & 0,644 & 0 & 0 \\ 0,060 & 0,257 & 0,599 & 0 \\ 0,007 & 0,050 & 0,264 & 0,655 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14,756 \\ 19,078 \\ 20,866 \\ 21,015 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,185 \\ 17,023 \\ 18,287 \\ 20,330 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 13,19 \\ 17,02 \\ 18,29 \\ 20,33 \end{bmatrix}$$

Die Zusammensetzung der Bevölkerung lässt sich aus den jeweiligen Vektoren $\vec{v}_{2015}$ oder $\vec{v}_{2025}$ ablesen.

- Anteil der Menschen, die mindestens 60 Jahre alt sind, an der Gesamtbevölkerung:

Ende 2005: $\frac{20,6}{82,5} \cdot 100 = 24,969.. \approx 25\%$

Ende 2015: $\frac{21,02}{75,73} \cdot 100 = 27,756.. \approx 27,8\%$

Ende 2025: $\frac{20,33}{68,83} \cdot 100 = 29,536.. \approx 29,5\%$

Die Aussage des Mitarbeiters stimmt, der Anteil steigt von 25 % im Jahre 2005 auf 29,5 % im Jahre 2025.

</td><td>5</td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

STOCHASTIK 1

III.1 Passierschein A38

An einem Mittwoch auf ihrem Weg zur Eroberung Roms müssen die beiden Gallier Asterix und Obelix in eine Behörde, um den Passierschein A38 zu besorgen.

Die mathematisch angepasste Sichtweise auf den Verlauf der Geschichte sieht folgendermaßen aus: Der Portier gibt Asterix und Obelix einen Laufzettel und schickt sie in Zimmer 100, da er nicht einschätzen kann, welcher Sachbearbeiter zuständig ist. Niemand in dieser Behörde kann einschätzen, wer zuständig ist. In dem gesamten Verlauf hält sich kein Sachbearbeiter für zuständig.
Jeder Sachbearbeiter, auch der in Zimmer 100, macht einen Stempel auf den Laufzettel und schickt die beiden Gallier mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ nach rechts (eine Zimmernummer größer) und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ nach links (eine Zimmernummer kleiner). Ein solcher Vorgang des Prüfens und Weiterschickens dauert jedes Mal 10 Minuten. Das bedeutet zum Beispiel, dass die beiden Gallier das vierte Zimmer nach 30 Minuten betreten. Alle Zimmer liegen durchnummeriert nebeneinander in einem Gang.

Wenn Asterix und Obelix ein Zimmer wiederholt betreten, so wird genauso geprüft und weitergeschickt, als ob sie noch nie in diesem Zimmer gewesen wären.

a) Ergänzen Sie das Baumdiagramm (Anlage), das den Aufenthalt der beiden Gallier in den einzelnen Zimmern des Flures während der ersten Stunde nach dem Eintreffen in Zimmer 100 beschreibt, um die folgenden Angaben:
- alle fehlenden Zimmernummern,
- Angaben, die den Zeitablauf deutlich machen,
- Angaben zu den Wahrscheinlichkeiten an mindestens sechs Pfadstücken des Baumdiagramms. **(15P)**

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

- Asterix und Obelix 40 Minuten nach Eintritt in die Behörde wieder Zimmer Nr. 100 betreten,
- Asterix und Obelix 50 Minuten nach Eintritt in die Behörde Zimmer Nr. 99 betreten,
- Asterix und Obelix 60 Minuten nach Eintritt in die Behörde Zimmer Nr. 106 betreten.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Asterix und Obelix 50 Minuten nach Eintritt in die Behörde wieder Zimmer Nr. 100 betreten. **(20P)**

c) Bestimmen Sie den erwarteten Aufenthaltsort der beiden Gallier 60 Minuten nach Eintritt in die Behörde. **(15P)**

d) Asterix und Obelix betreten nach einiger Zeit wieder Zimmer Nr. 100. Zwischenzeitlich ist der Sachbearbeiter abgelöst worden, er weiß also nicht, in welches Zimmer die beiden Gallier beim ersten Mal geschickt wurden. Er sieht aber am Laufzettel, dass Asterix und Obelix bisher nur in Zimmer 100 und einem weiteren Zimmer gewesen sein können, weil es nur zwei Stempel auf dem Laufzettel gibt.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der neue Mitarbeiter (mathematisch korrekt) einschätzt, dass die beiden Gallier aus Zimmer 101 kamen.
- Zeigen Sie, in welcher Weise diese Wahrscheinlichkeit von dem Wert der Wahrscheinlichkeiten „nach rechts“ und „nach links“ abhängt. **(20P)**

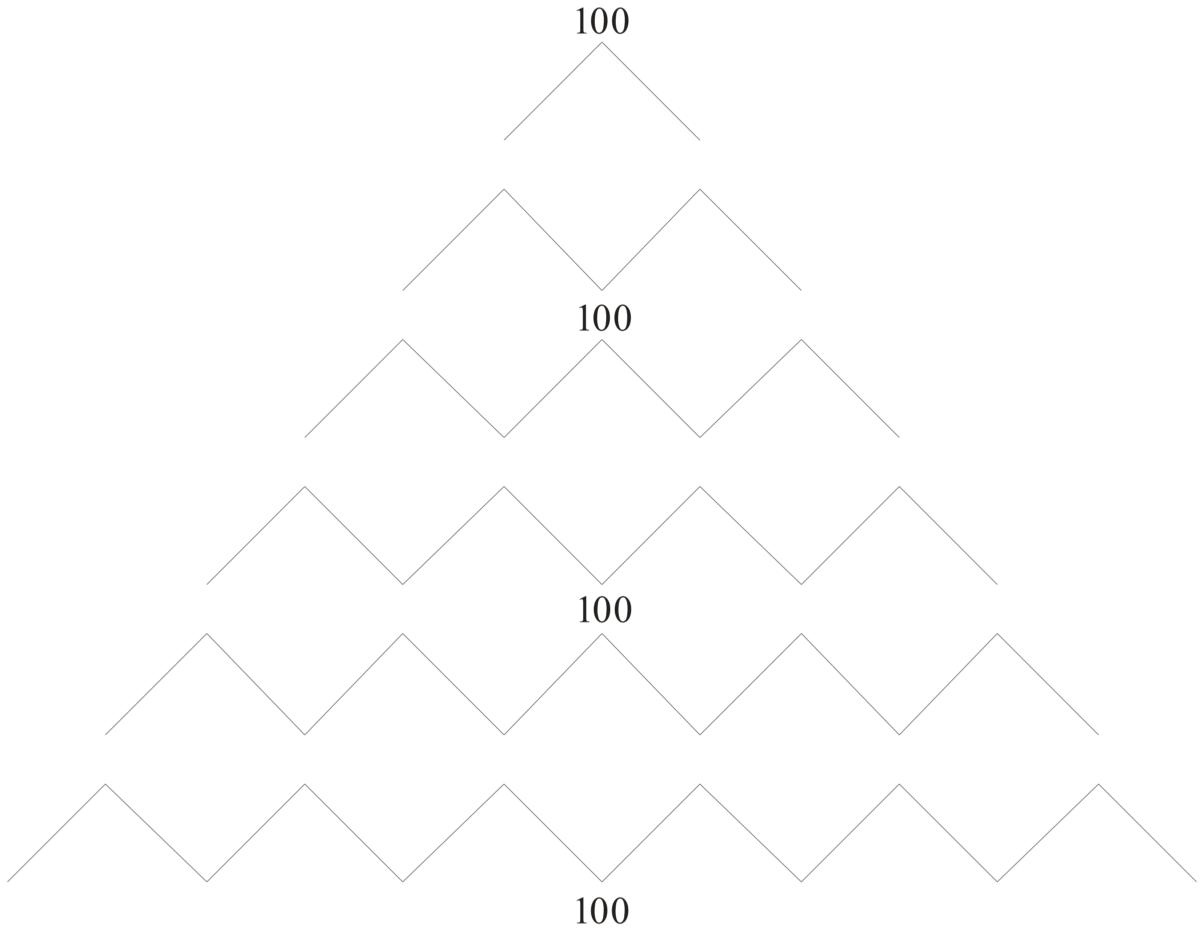
e) Der Behördenleiter überlegt selbst Passierscheine auszugeben. Kein Mitarbeiter soll das erfahren. Er will dienstags von 10:30 Uhr bis 11:40 Uhr in Zimmer 104 Dienst tun. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Antragsteller, der am Dienstag um 10:30 Uhr Zimmer 100 betritt, den Passierschein A38 bekommt. **(10P)**

f) Nach 160 Minuten, es ist Mittwoch und nicht Dienstag, betreten Asterix und Obelix Zimmer Nr. 104. Sie bemerken an der Wand ein Plakat mit der abgebildeten Darstellung, die sie als Anspielung auf ihren Weg durch die Behörde verstehen.

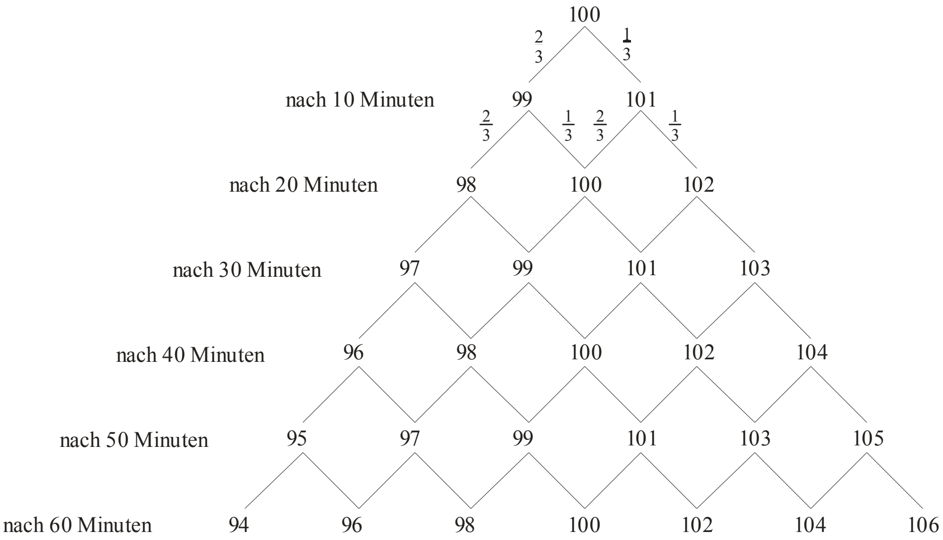
e	s	i	s	t	e	i	n	l	a	n
s	i	s	t	e	i	n	l	a	n	g
i	s	t	e	i	n	l	a	n	g	e
s	t	e	i	n	l	**a**	n	g	e	r
t	e	i	n	l	a	n	g	e	r	W
e	i	n	l	a	n	g	e	r	W	e
i	n	l	a	n	g	e	r	W	e	g

- Sie stellen fest, dass sie, wenn sie immer nur nach rechts oder nach unten lesen, den Satz *„es ist ein langer Weg“* auf vielen verschiedenen Pfaden lesen können.
  Zeichnen Sie einen Beispielpfad ein, der durch das fett gedruckte „**a**“ verläuft.
- Begründen Sie, dass sich die Anzahl der verschiedenen Pfade, auf denen man den Text lesen kann, aus einem Binomialkoeffizienten ergibt.
  Bestimmen Sie diesen und die Anzahl möglicher Pfade.
- Interpretieren Sie die Tatsache, dass sich das Plakat ausgerechnet in Zimmer Nr. 104 befindet. **(20P)**

Anlage zur Aufgabe „Passierschein A38“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)		15		
b)	$P(\text{Zi.100 nach 40 min}) = \binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$. $P(\text{Zi.99 nach 50 min}) = \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$. $P(\text{Zi.106 nach 60 min}) = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$. $P(\text{Zi.100 nach 50 min}) = 0$, da Asterix und Obelix nach 50 Minuten nicht in Zimmer 100 sein können.	15	5	
c)	Der Erwartungswert für die Binomialverteilung ist mit $E(X) = n \cdot p = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$ zu berechnen. Dieses Ergebnis bedeutet, dass Asterix und Obelix durchschnittlich zwei Mal nach rechts und vier Mal nach links gehen, wir erwarten sie also in Zimmer 98. *Bemerkung: Erwartungswerte sind eigentlich nur sinnvoll, wenn die zugehörige Zufallsvariable Werte auf einer Intervallskala liefert. Hier werden Zimmernummern als Abstände vom Zimmer Nr. 000 gedeutet.*		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	Satz von Bayes: $P(\text{Zi.101 nach 10 min} \mid \text{Zi. 100 nach 20 min}) = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$, die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also 50%. Sei nun *P*(„nach rechts“) = *p* und damit *P*(„nach links“) = 1–*p*. Dann ist $P(\text{Zi.101 nach 10 min} \mid \text{Zi. 100 nach 20 min}) = \dfrac{p\cdot(1-p)}{p\cdot(1-p)+(1-p)\cdot p} = \dfrac{1}{2}$. Lösung ohne Satz von Bayes: Nach Aufgabenstellung haben Asterix und Obelix einen von zwei möglichen Wegen nehmen müssen: (1) Zi. 100 – Zi. 99 – Zi. 100 oder (2) Zi. 100 – Zi. 101 – Zi. 100. Beide Wege enthalten einen Teilweg nach rechts und einen nach links, sind also stets gleichwahrscheinlich. Daraus folgen obige Ergebnisse.		10	10
e)	Anhand des Baumdiagramms ergibt sich $p(Zimmer\ 104) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{17}{729}$. Die Wahrscheinlichkeit, den gewünschten Passierschein A38 unter den in der Aufgabe genannten Bedingungen zu erhalten, beträgt etwa 2,3%.		5	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

f) Ein Beispiel ist:

```
e s i s t e i n l a n
s i s t e i n l a n g
i s t e i n l a n g e
s t e i n l a n g e r
t e i n l a n g e r W
e i n l a n g e r W e
i n l a n g e r W e g
```

Dreht man das Plakat um 45°, so ist die Struktur der Pfade identisch mit der des Baumdiagramms in Aufgabenteil a), des Galton-Bretts oder des Pascaldreiecks. Somit muss die Anzahl der Pfade wie dort ein Binomialkoeffizient sein.

Alternative: Beim Lesen sind vom Startbuchstaben aus 16 Entscheidungen zu treffen (nach rechts oder nach unten weiter lesen), davon 10 Mal die Entscheidung „rechts“ und 6 Mal die Entscheidung „unten“. Dies entspricht der Auswahl von 6 aus 16 bzw. 10 aus 16.

Der Binomialkoeffizient lautet somit $\binom{16}{10} = \binom{16}{6} = 8008$.

Weitere Begründungen, die sich auf die Sprachregelungen im Unterricht beziehen, sind ebenfalls möglich.

Die Anspielung ist doppeldeutig. Die beiden Gallier sind schon lange in der Behörde unterwegs (Inhalt des Textes) und sie haben 16-mal das Zimmer gewechselt, nämlich 10-mal nach rechts und 6-mal nach links, und somit ist die Anzahl der möglichen Wege durch die Behörde, um nach 160 Minuten in Zimmer Nr. 104 zu sein, ebenfalls $\binom{16}{10} = \binom{16}{6} = 8008$.

		I	II	III
f)			10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	45	25

STOCHASTIK 2

III.2 Biathlon

Biathlon ist eine der Sportarten bei den nordischen Skiwettbewerben. Neben einer Langlaufstrecke, die zurückgelegt werden muss, müssen die Athleten auch mehrfach auf Zielscheiben schießen. Wenn sie nicht treffen, dürfen sie nachladen und es nochmals versuchen. Sollten sie wiederum nicht treffen, müssen sie für jede nicht getroffene Scheibe eine Strafrunde laufen.

Es zählt die Gesamtzeit.

Zur Vereinfachung werden in dieser Aufgabe vom internationalen Regelwerk leicht abweichende Regeln verwendet, und zwar:

- Man hat drei Schüsse, um drei Zielscheiben zu treffen. Hat man alle drei Zielscheiben getroffen, darf man auf der normalen Route weiterlaufen.
- Hat man nicht alle drei Scheiben getroffen, darf man *genau einmal* nachladen und diesen einen Schuss auf eine der noch nicht getroffenen Zielscheiben abgeben. Wenn nun alle Scheiben getroffen sind, darf man auf der normalen Route weiterlaufen.
- Sind jetzt immer noch nicht alle Scheiben getroffen, muss man für jede nicht getroffene Scheibe eine Strafrunde laufen, bevor man auf der normalen Route weiterlaufen darf.

Bei einem Wettbewerb über 3 km mit einmaligem Stopp am Schießstand vergleichen Paula und Susanne ihre Leistungen.

Erfahrungsgemäß benötigt Paula, die diesen Sport betreibt, für das Nachladen und erneute Schießen 10 Sekunden und für eine Strafrunde 30 Sekunden. Sie ist eine mittelmäßige, aber sehr nervenstarke Schützin, die mit jedem Schuss mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 die Scheibe trifft.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Paula alle drei Scheiben ohne Nachladen trifft. **(10P)**

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit,
   - dass Paula alle drei Scheiben mit einmaligem Nachladen trifft.
   - dass Paula genau eine Strafrunde laufen muss. **(20P)**

c) Die nachfolgende Tabelle beschreibt den Zeitverlust, den Paula durch Fehlschüsse erleidet.

Zeitverlust in s	0	10	40	70	100
Wahrscheinlichkeit	0,729	0,2187	0,0486	0,0036	0,0001

- Geben Sie an, wie man auf die möglichen Zeitverluste kommt.
- Bestätigen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten für 70 s und 100 s.
- Berechnen Sie anschließend den erwarteten Zeitverlust für Paula. **(15P)**

Susanne ist eine etwas bessere Skiläuferin, hat aber eine viel geringere Nervenstärke als Paula. Beim ersten Schuss trifft auch sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 die Scheibe. Immer wenn sie vorher getroffen hat, trifft sie die Scheibe ebenfalls mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9. Wenn aber ein Schuss ein Fehlschuss war, so trifft sie beim nächsten Schuss nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8.

d) Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm für die ersten drei Schüsse. **(20P)**

e) Paula hat nur gesehen, dass Susanne den dritten Schuss verfehlt hat. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auch Susannes erster Schuss ein Fehlschuss war. **(10P)**

Zum Schießen und Nachladen benötigen beide Läuferinnen die gleiche Zeit, allerdings schafft Susanne die Strafrunde in 29 Sekunden.

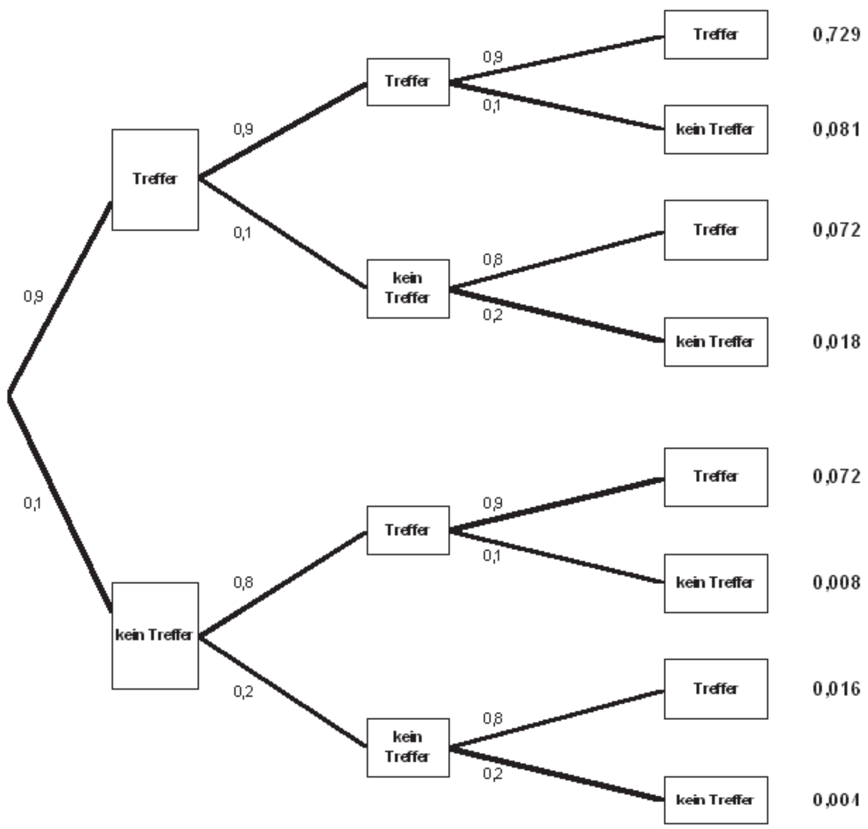
f) Bestimmen Sie die fehlenden Werte in Susannes Tabelle. **(15P)**

Zeitverlust in s	0	10			97
Wahrscheinlichkeit			0,0658	0,01	0,0008

g) Aufgrund der Werte hat sich Susannes Trainer eine Strategie überlegt:
„Susanne muss mindestens 1 Sekunde schneller auf der 3 km-Strecke sein als Paula."
Beurteilen Sie die Strategie des Trainers und Susannes Gewinnchancen in <u>diesem</u> Rennen. **(10P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	$p(\text{alle drei Schüsse sind Treffer}) = 0{,}9^3 = 0{,}729$. Paula erzielt hintereinander drei Treffer mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 73 %.	10		
b)	• Zunächst muss Paula genau 2 der ersten 3 Schüsse erfolgreich absolvieren und dann mit dem nachgeladenen Schuss wiederum erfolgreich sein. $p = 3 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}2187$. Paula trifft also alle Scheiben mit einmaligem Nachladen mit der Wahrscheinlichkeit von etwa 22 %. • Hierbei muss Paula entweder genau 2 der ersten 3 Schüsse erfolgreich absolvieren und dann mit dem nachgeladenen Schuss nicht treffen oder genau 1 der ersten 3 Schüsse erfolgreich absolvieren und dann mit dem nachgeladenen Schuss treffen. Die ist gleichbedeutend damit, dass sie bei 4 Schüssen genau zweimal trifft. $p = 3 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 6 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^2 = B(4\,;\,0{,}9\,;\,2) = 0{,}0486$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Paula genau eine Strafrunde laufen muss, beträgt also knapp 5 %.		15	5
c)	• Bei den angegebenen Werten für die Dauer des Nachladens und der Strafrunden ergeben sich die Zeiten, die Wahrscheinlichkeiten sind in den Teilen a) bis b) berechnet worden. • Wahrscheinlichkeit für 70 s Zeitverlust: Paula hat bei vier Schüssen mit Nachladen (10 s) genau einmal getroffen und muss daher zwei Strafrunden laufen (60 s). $p = 0{,}1^3 \cdot 0{,}9 + 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^3 = 4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^3 = B(4\,;\,0{,}9\,;\,1) = 0{,}0036$. Wahrscheinlichkeit für 100 s Zeitverlust: Paula hat bei vier Schüssen mit Nachladen (10 s) nicht einmal getroffen und muss daher drei Strafrunden laufen (90 s). $p = 0{,}1^4 = 0{,}0001$. • Paulas Erwartungswert für den Zeitverlust: $0 \cdot 0{,}729 + 10 \cdot 0{,}2187 + 40 \cdot 0{,}0486 + 70 \cdot 0{,}0036 + 100 \cdot 0{,}0001 = 4{,}393$. Der gesuchte Erwartungswert für den Zeitverlust ist 4,393s.	10	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	Baumdiagramm:  	5	15	
e)	kT_1: kein Treffer beim ersten Schuss. kT_3: kein Treffer beim dritten Schuss. $P\left(kT_1 / kT_3\right) = \frac{P(kT_1 \cap kT_3)}{P(kT_3)}$ $= \frac{0{,}1 \cdot \left(0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}2\right)}{0{,}1 \cdot \left(0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}2\right) + 0{,}9 \cdot \left(0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}2\right)}$ $= \frac{0{,}008 + 0{,}004}{0{,}008 + 0{,}004 + 0{,}081 + 0{,}018}$ $= \frac{0{,}012}{0{,}111} \approx 0{,}108$. Die Wahrscheinlichkeit, dass auch Susannes erster Schuss daneben ging, beträgt ca. 11 %.		5	5
f)	• Der Zeitverlust beträgt 0 Sekunden, Susanne hat also mit drei Schüssen dreimal getroffen. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt: $p = 0{,}9^3 = 0{,}729$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

- Susanne trifft erst mit Nachladen (also mit 4 Schüssen) das dritte Mal. Dann beträgt der Zeitverlust 10 s. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt:

$$\begin{aligned} p &= 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9 + 0{,}9\cdot 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9 + 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1\cdot 0{,}8 \\ &= 3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9^2 \\ &= 0{,}1944\,. \end{aligned}$$

- Wenn Susanne nur zweimal trifft, kommen zu den 10 s für das Nachladen noch einmal 29 s für die Strafrunde hinzu: 10 s + 29 s = 39 s.
- Wenn Susanne (trotz Nachladen) genau einmal trifft, kommen zu den 10 s für das Nachladen noch einmal 58 s für die beiden Strafrunden hinzu:
10 s + 58 s = 68 s.

Die Tabelle ist also wie folgt zu vervollständigen.

Zeitverlust in s	0	10	**39**	**68**	97
Wahrscheinlichkeit	**0,729**	**0,1944**	0,0658	0,0100	0,0008

</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>

Der Erwartungswert von Susannes Zeitverlust beim Schießen wird analog wie in Aufgabenteil c) berechnet:

$$10\cdot 0{,}1944 + 39\cdot 0{,}0658 + 68\cdot 0{,}01 + 97\cdot 0{,}0008 = 5{,}2678\,.$$

Der erwartete Zeitverlust beträgt also ca. 5,3 s.

Der erwartete Zeitverlust von Paula (siehe Aufgabe c)) beträgt ca. 4,4 s.

Susanne hat also gute Gewinnchancen, wenn sie auf der Laufstrecke mindestens eine Sekunde schneller als Paula läuft, da der Erwartungswert für den Zeitverlust weniger als 1 Sekunde von Paulas Wert nach oben abweicht. Für den Ausgang des konkreten Rennens lässt sich allerdings keine zuverlässige Aussage machen.

Aus der Antwort muss deutlich werden, dass dem Prüfling der Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeiten als Durchschnittswerte und der konkreten Einzelsituation des Rennens deutlich ist.

</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>