ANALYSIS 1

I.1 Vier ganzrationale Funktionen

Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen f_1 und f_2 mit

$$f_1(x) = -x^3 + x^2 \quad \text{und} \quad f_2(x) = -2x^3 + 4x^2 \ \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

sowie ihre grafische Darstellung (s. Anlage).

a) Bestimmen Sie für beide Funktionen rechnerisch die Extremstellen und die Wendestellen.
Geben Sie an, welcher Graph (s. Anlage) zu welcher Funktion gehört.

b) Berechnen Sie alle Schnittpunkte der Graphen von f_1 und f_2 und ermitteln Sie das Maß der von den Graphen eingeschlossenen Fläche.

c) Die in b) betrachtete Fläche liegt teilweise oberhalb und teilweise unterhalb der x-Achse.
Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der Fläche, die oberhalb der x-Achse liegt.

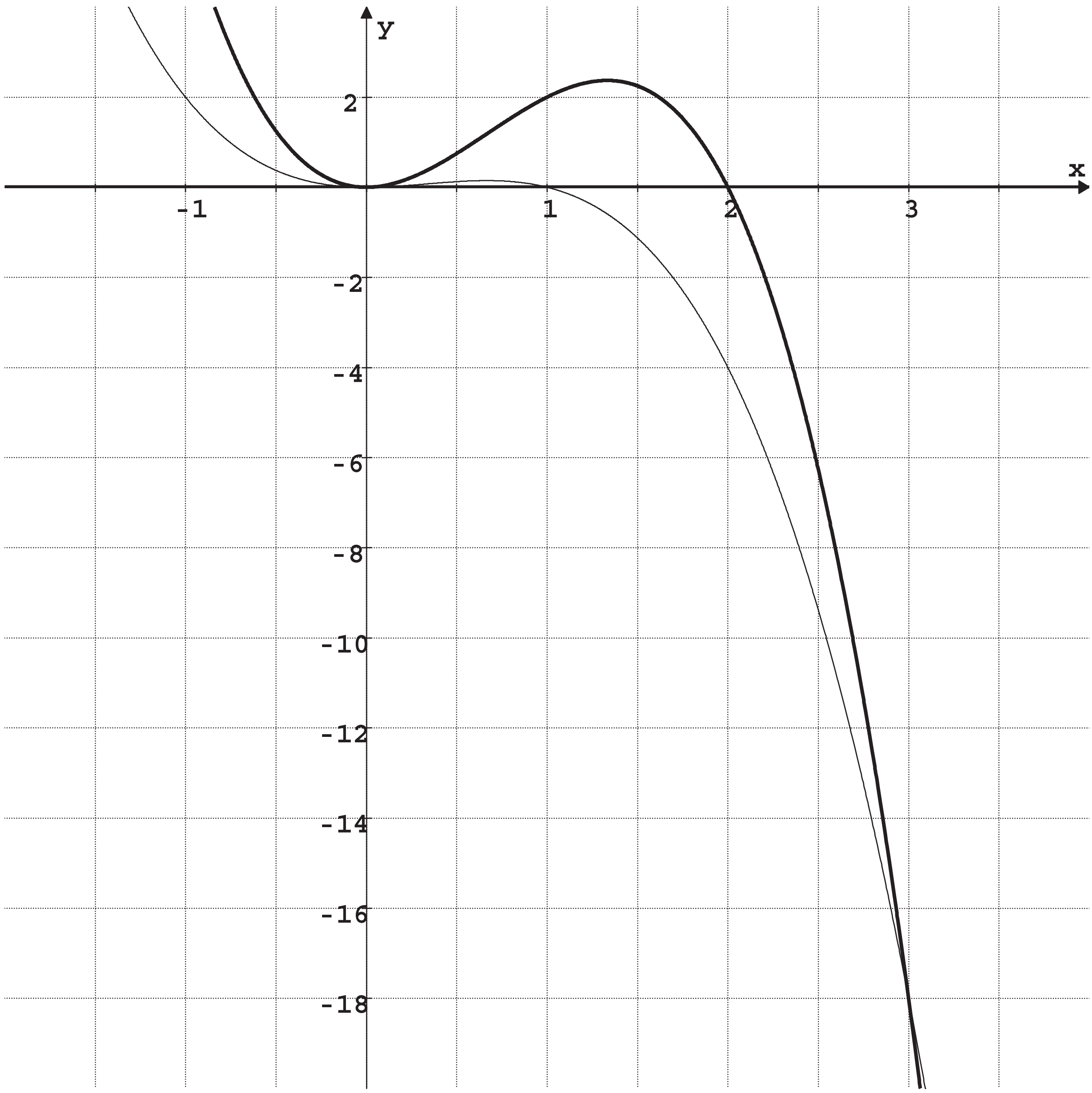
d) Eine weitere Funktion dritten Grades wird gesucht. Sie soll f_3 heißen, Nullstellen bei 0 und 3 und Extremstellen bei 0 und 2 haben. Außerdem soll diese Funktion an der Stelle 1 den Funktionswert 6 haben.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f_3.

<u>*Hinweis:*</u>
Sie können aus den Funktionsgleichungen von f_1 und f_2 eine Vermutung über den Funktionsterm von f_3 anstellen und die angegebenen Daten bestätigen. Sie können aber auch aus den zu f_3 gemachten Angaben die Koeffizienten der Funktion dritten Grades bestimmen.

e) Die Funktionsterme von f_1, f_2 und f_3 haben Gemeinsamkeiten, d.h. die Nummerierung taucht in einer bestimmten Systematik in den Funktionstermen auf.
Bestimmen Sie unter Einbeziehung dieser Gemeinsamkeiten die Gleichung einer Funktion f_5, die ebenfalls eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist.

Aus den einzelnen Funktionstermen kann man jeweils die Lage der Nullstellen, der Extremstellen und der Wendestelle des zugehörigen Graphen direkt ablesen.
Bestimmen Sie – ohne Begründung – die Nullstellen, die Extremstellen und die Wendestelle von f_5.

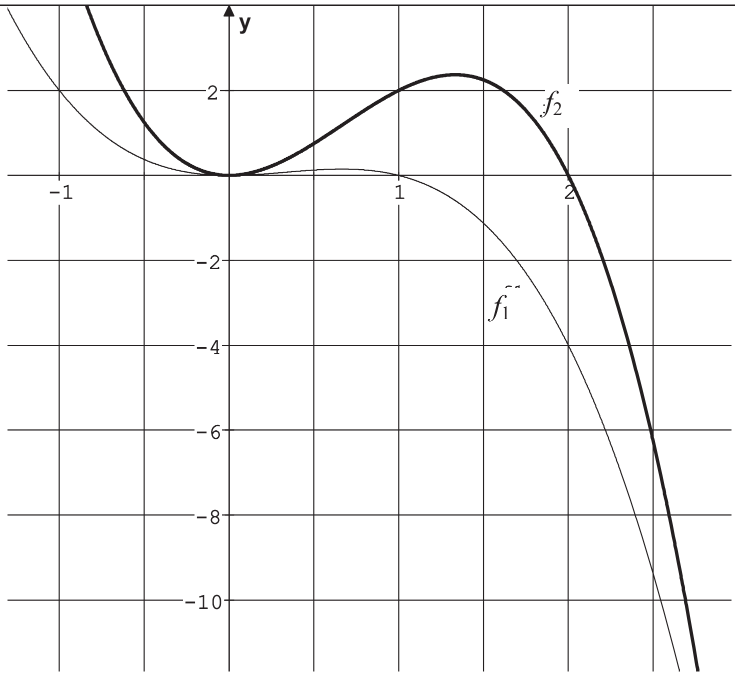
Anlage zu Aufgabe „Vier ganzrationale Funktionen“:



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<u>Bestimmung der Extrem- und Wendestellen von f_1:</u> Es gilt: $f_1'(x) = -3x^2 + 2x$, $f_1''(x) = -6x + 2$, $f_1'''(x) = -6$. Die Nullstellen der 1. Ableitung sind 0 und $\frac{2}{3}$. Aus der Grafik bzw. mit Hilfe der 2. Ableitung ($f_1''(0) = 2 \neq 0$ und $f_1''(\frac{2}{3}) = -2 \neq 0$) folgt, dass f_1 die Extremstellen 0 und $\frac{2}{3}$ hat. *Hinweis: Es ist zulässig, mit Hilfe der grafischen Darstellung zu argumentieren. Die Angabe der Koordinaten von Hoch- bzw. Tiefpunkt ist nicht gefordert.* Die Nullstelle der 2. Ableitung ist $\frac{1}{3}$. Aus der Grafik bzw. mit Hilfe der 3. Ableitung ($f_1'''(x) = -6 \neq 0$) folgt, dass f_1 die Wendestelle $\frac{1}{3}$ hat. <u>Bestimmung der Extrem- und Wendestellen von f_2:</u> Es gilt: $f_2'(x) = -6x^2 + 8x$, $f_2''(x) = -12x + 8$, $f_2'''(x) = -12$. Die Nullstellen der 1. Ableitung sind 0 und $\frac{4}{3}$. Aus der Grafik bzw. mit Hilfe der 2. Ableitung ($f_2''(0) = 8 \neq 0$ und $f_2''(\frac{4}{3}) = -8 \neq 0$) folgt, dass f_2 die Extremstellen 0 und $\frac{4}{3}$ hat. Die Nullstelle der 2. Ableitung ist $\frac{2}{3}$. Aus der Grafik bzw. mit Hilfe der 3. Ableitung ($f_2'''(x) = -12 \neq 0$) folgt, dass f_2 die Wendestelle $\frac{2}{3}$ hat. <u>Zuordnung der Graphen:</u> Der im Intervall $]-\infty;3[$ oberhalb verlaufende Graph ist der der Funktion f_2. *Hier kommt es nur auf die Zuordnung der Funktionen zu ihren Graphen an. Daher sind auch weniger präzise Formulierungen (z.B. „der Graph oben gehört zu f_2“) zugelassen.*			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>



</td><td>10</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

<u>Bestimmung der Schnittpunkte:</u>

$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow -x^3 + x^2 = -2x^3 + 4x^2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3.$

Es gilt $f_1(0) = f_2(0) = 0$ und $f_1(3) = f_2(3) = -18$.

Die Graphen von f_1 und f_2 schneiden sich in den Punkten $S_1(0 \mid 0)$ und $S_2(3 \mid -18)$.

<u>Bestimmung des Flächenmaßes:</u>

Eine Stammfunktion zu $(f_2 - f_1)(x) = -x^3 + 3x^2$ ist F mit $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$.

Es gilt also:

$$A = \left|\int_0^3 (f_2(x) - f_1(x))\,dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3\right]_0^3\right| = \left|-\frac{81}{4} + 27 - 0\right| = \frac{27}{4} = 6{,}75\,.$$

</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Man kann beispielsweise den Inhalt der Fläche oberhalb der x-Achse als Differenz zweier Integrale berechnen. Die Integrationsgrenzen sind die aus der grafischen Darstellung (s. Anlage) abzulesenden Nullstellen.

$$A_1 = \left|\int_0^2 f_2(x)\,dx\right| - \left|\int_0^1 f_1(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[-0{,}5x^4 + \frac{4}{3}x^3\right]_0^2\right| - \left|\left[-0{,}25x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1\right|$$

$$= \left|-8 + \frac{32}{3}\right| - \left|-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right|$$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	$A_1 = \frac{8}{3} - \frac{1}{12}$ $= \frac{31}{12}$ *Betragsstriche sind hier nicht zwingend erforderlich, da die Graphen in dem jeweils betrachteten Intervall oberhalb der x-Achse verlaufen.* Anteil der Fläche an der Gesamtfläche: $A_1 : A = \frac{31}{12} : \frac{27}{4} = \frac{31}{81} = 0{,}3827...$ Der Anteil der oberhalb der x-Achse liegenden Fläche an der Gesamtfläche beträgt ca. 38,3 %.		15	10
d)	<u>1. Variante:</u> Der Vergleich der Funktionsterme von f_1 und f_2 legt die Vermutung nahe: $f_3(x) = -3x^3 + 9x^2$. *Die explizite Angabe der gemeinsamen „Form“ durch* $f_k(x) = -k \cdot x^3 + k^2 \cdot x^2$, *$k > 0$, wird nicht verlangt.* (1) Nullstellen bei 0 und 3: $f_3(0) = 0$ ist klar, $f_3(3) = -3 \cdot 27 + 9 \cdot 9 = 0$ (2) Extremstellen bei 0 und 2: $f_3'(x) = -9x^2 + 18x$ $f_3'(0) = 0$ ist klar, $f_3'(2) = -9 \cdot 4 + 18 \cdot 2 = 0$ (3) $f_3(1) = -3 + 9 = 6$, was zu zeigen war. <u>2. Variante:</u> Umgekehrt lassen sich die Koeffizienten von $f_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ aus den genannten Bedingungen ermitteln: (1) $f_3(0) = 0 \Rightarrow d = 0$, (2) $f_3'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$, (3) $f_3(3) = 0 \Rightarrow 27a + 9b = 0$, (4) $f_3(1) = 6 \Rightarrow a + b = 6$. Gleichung (4’) $b = 6 - a$ eingesetzt in (3) ergibt $27a + 9(6 - a) = 0$ und $a = -3$. Damit ist $b = 9$. Die Gleichung der Funktion lautet: $f_3(x) = -3x^3 + 9x^2$.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Man kann aus den Ergebnissen von a) und den Angaben in d) folgern: $f_5(x) = -5x^3 + 25x^2$, Nullstellen 0 und 5, Extremstellen 0 und $\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3}$, Wendestelle $\frac{5}{3}$.			10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

ANALYSIS 2

I.2 Molkerei

Die Molkerei Meier hat die Rezeptur eines Joghurts mit der neuen Geschmacksrichtung „Apfelbeere" entwickelt. Für die Produktion dieses Joghurts geht die Molkerei von einem s-förmigen Kurvenverlauf der Kostenfunktion aus, die der Produktionsmenge x die Gesamtkosten y zuordnet.

Die Fixkosten betragen 400 Geldeinheiten (GE). Außerdem ist bekannt, dass der Graph der Kostenfunktion einen Wendepunkt in (10 | 700) aufweist und die Wendetangente die Gleichung $t_w(x) = 20x + 500$ hat. Die Kapazitätsgrenze für dieses Produkt liegt bei 50 Mengeneinheiten (ME). Eine Marktanalyse hat ergeben, dass das Produkt in dieser Menge vollständig verkauft werden kann.

Hinweis: Alle zu skizzierenden Graphen sind in einem Koordinatensystem darzustellen. Wählen Sie dabei als Maßstab für die Ordinate 500 GE $\hat{=}$ 1 cm, für die Abszisse 5 ME $\hat{=}$ 1 cm.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der „einfachsten" Kostenfunktion K. Benutzen Sie dazu die oben gemachten Angaben. Geben Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich an.

b) Die Molkerei erwartet einen Erlös von 70 GE je ME. Bestimmen Sie die Erlösfunktion E und zeigen Sie, dass die Gewinnfunktion G die Gleichung $G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}1x^3 + 3x^2 + 20x - 400$ hat.

   Skizzieren Sie die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E.

   Die Gewinnschwelle liegt bei 10 ME. Bestimmen Sie die Gewinngrenze.

   Bestimmen Sie die Produktionsmenge, für die sich der maximale Gewinn ergibt, und berechnen Sie diesen.

c) Ein Mitglied der Geschäftsleitung schlägt vor, durch eine Reduzierung des Preises die Nachfrage zu steigern und mit erhöhtem Absatz den Gewinn des Unternehmens zu steigern.

   Beurteilen Sie diesen Vorschlag unter Berücksichtigung der oben genannten Modellannahmen.

d) Zeitgleich ist eine zweite Molkerei mit diesem neuen Produkt und einem Dumpingpreis auf den Markt gekommen. Nun überlegt man bei der Molkerei Meier, wie man wirtschaftlich vertretbar reagieren soll. Dabei ermittelt ein Abteilungsleiter der Molkerei Meier richtig, dass der niedrigste verlustfreie Preis 50 GE je ME beträgt.

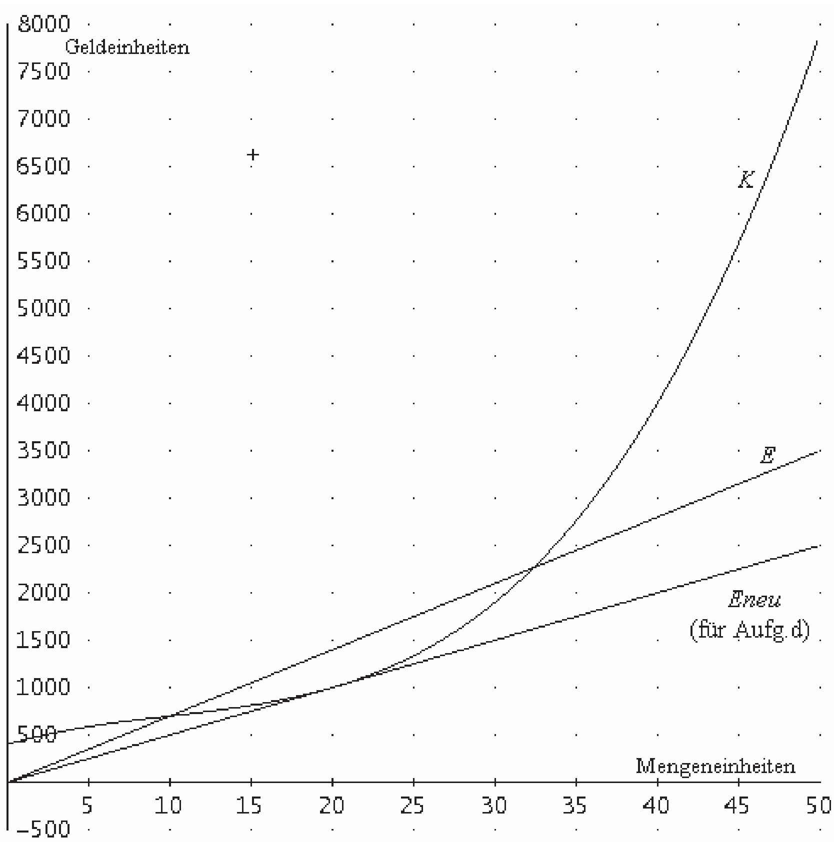
   Skizzieren Sie den Graphen der entsprechenden Erlösfunktion E_{neu} und ermitteln Sie, wie viele Mengeneinheiten bei diesem Preis nur noch produziert und abgesetzt werden dürfen, damit kein Verlust entsteht.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<u>Kostenfunktion:</u> Die „einfachste“ ganzrationale Funktion, die den gegebenen Bedingungen genügt, ist eine Funktion dritten Grades. $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $K''(x) = 6ax + 2b$ fixe Kosten: 400 GE $\qquad d = 400$ Wendepunkt (10 | 700) $\qquad K(10) = 700$ $\qquad K''(10) = 0$ Wendetangente $t_w(x) = 20x + 500$ $\qquad K'(10) = 20$ Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem: $1000a + 100b + 10c + 400 = 700$ $300a + 20b + c = 20$ $60a + 2b = 0$ mit den Lösungen: $a = 0{,}1,\ b = -3,\ c = 50$ und $d = 400$, also $K(x) = 0{,}1x^3 - 3x^2 + 50x + 400$ *Man kann zur Ermittlung der Kostenfunktion auch ausnutzen, dass eine Entwicklung um den Wendepunkt möglich ist.* <u>Definitionsbereich</u>: $D = [0;50]$	10	20	
b)	<u>Erlösfunktion</u>: $E(x) = 70x$ <u>Gewinnfunktion</u>: $G(x) = E(x) - K(x)$, also $G(x) = 70x - (0{,}1x^3 - 3x^2 + 50x + 400)$ $= -0{,}1x^3 + 3x^2 + 20x - 400$ <u>Skizze</u> am Ende der Musterlösung <u>Gewinngrenze</u>: Schnittstelle von Erlös- und Kostenfunktion bzw. Nullstelle der Gewinnfunktion Eine Lösung ist mit $x = 10$ (Gewinnschwelle) gegeben, die anderen Lösungen lassen sich durch Polynomdivision bzw. mit dem Horner Schema ermitteln: $-0{,}1 \cdot (x^3 - 30x^2 - 200x + 4000) = -0{,}1 \cdot (x-10) \cdot (x^2 - 20x - 400)$ $x^2 - 20x - 400 = 0$ ergibt $x = 10 + \sqrt{500} \approx 32{,}36$ oder $x = 10 - \sqrt{500} \notin D$ Die Gewinngrenze liegt bei 32,36 ME.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Maximaler Gewinn: $G'(x)=0 \wedge G''(x)<0$
$G'(x)=-0{,}3x^2+6x+20$
$G''(x)=-0{,}6x+6$
$-0{,}3x^2+6x+20=0$ ergibt
$x=10+\sqrt{\frac{500}{3}}\approx 22{,}91$
oder $x=10-\sqrt{\frac{500}{3}}\notin D$
$G''(22{,}91)=-0{,}6\cdot 22{,}91+6<0$
$G(22{,}91)=430{,}33\text{GE}$.
Bei einer Produktion von ca. 22,9 ME wird ein maximaler Gewinn von ca. 430,33 GE erzielt.</td><td>10</td><td>35</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>In dem angenommenen Modell handelt es sich bei der Erlösfunktion um eine lineare Funktion, die Steigung dieser Funktion entspricht dem Preis pro ME, dieser ist konstant und unabhängig von der Produktionsmenge x.
Hier kann u.a. wie folgt argumentiert werden: Da die Produktion bei ca. 22,9 ME zu einem optimalen Gewinn führt, würde jede Veränderung des Verkaufspreises auch die absetzbare Menge verändern und eine Verringerung des Gewinns bewirken.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>1. Lösungsvariante (über die Steigung der Erlösfunktion):
Der geforderte Preis entspricht der Steigung der Erlösfunktion. Da es sich hier um den niedrigsten Preis handelt, der gerade die Gesamtkosten deckt, kann die Steigung so lange verringert werden, bis aus der Sekante eine Tangente geworden ist. Damit entspricht der Preis dem Wert der ersten Ableitung von K an der Stelle 20.
$K'(20)=50$
Bei einer Produktion von 20 ME deckt ein Mindestpreis von 50 GE die Gesamtkosten. Damit ist die Aussage des Abteilungsleiters bestätigt.

2. Lösungsvariante (über das Stückkostenminimum; der Mindestpreis muss das Minimum der Kosten pro ME abdecken):
Funktion der Stückkosten: $k(x)=0{,}1x^2-3x+50+\frac{400}{x}$
Berechnung des Stückkostenminimums:
$k'(x)=0: \quad 0{,}2x-3-\frac{400}{x^2}=0$
$0{,}2x^3-3x^2-400=0$
$x^3-15x^2-2000=0$
$(x-20)(x^2+5x+100)=0$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Die Gleichung hat genau eine reelle Lösung, nämlich $x = 20$. $k''(x) = 0{,}2 + \frac{800}{x^3} > 0$ für alle $x > 0$. Mindestpreis $k(20) = 40 - 60 + 50 + 20 = 50$. Bei einer Produktions- bzw. Absatzmenge von 20 ME deckt ein Mindestpreis von 50 GE die Gesamtkosten. Damit ist die Aussage des Abteilungsleiters bestätigt. <u>3. Lösungsvariante</u> (über den Berührpunkt der Graphen von K und E): Die Steigung des Graphen der Erlösfunktion entspricht in diesem Sachkontext dem Preis pro ME. Bei $x = 20$ berühren sich die Graphen von K und E. $K(20) = 0{,}1 \cdot 8000 - 3 \cdot 400 + 50 \cdot 20 + 400 = 1000$. Der Graph der Erlösfunktion geht also durch den Punkt (20 | 1000) und hat damit die Steigung $\frac{1000}{20} = 50$. Dieser Wert entspricht dem gesuchten Mindestpreis. Bei einer Produktions- bzw. Absatzmenge von 20 ME deckt ein Mindestpreis von 50 GE die Gesamtkosten. Damit ist die Aussage des Abteilungsleiters bestätigt. <u>Skizze</u> 		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

ANALYSIS 3

I.3 Bevölkerungsentwicklung

In einer Kleinstadt hat der einzige große industrielle Arbeitgeber sein Werk geschlossen. Daraufhin ziehen viele qualifizierte Arbeitskräfte mit ihren Familien aus dieser Kleinstadt weg. Die Politiker versuchen durch Schaffung von Arbeitsplätzen in anderen Bereichen langfristig neue Bewohner zu gewinnen. Es dauert allerdings eine gewisse Zeit, bis diese Maßnahme erste Erfolge zeigt.
Die Statistiker tragen die Einwohnerzahl regelmäßig in eine Grafik ein, wobei die Einteilung der x-Achse in Jahrzehnten erfolgt und die der y-Achse in zehntausend Einwohner.
Es liegt ein Arbeitsblatt mit der Grafik für die ersten drei Jahrzehnte nach Schließung des Werkes bei.

a) Beschreiben Sie den Graphen im Hinblick auf folgende Fragen:
Wie viele Einwohner hatte die Kleinstadt bei Schließung des Werkes?
Wie hat sich die Einwohnerzahl im Laufe der Zeit entwickelt?

Die aufgezeichnete Kurve ist Teil des Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = -5e^{-0.5x} + 6e^{-3x} + 6.$$

b) Untersuchen Sie die Funktion f auf Extrempunkte.
Hinweis: Die Gleichung $f'(x) = 0$ *ist äquivalent zu der Gleichung* $e^{-0.5x} = 7{,}2 \cdot e^{-3x}$ *und damit auch äquivalent zu der Gleichung* $-0{,}5x = \ln(7{,}2) - 3x$.

c) Untersuchen Sie die Funktion f auf Wendestellen.
(*Verwenden Sie zur Berechnung die in b) vorgestellte Methode).*

d) Interpretieren Sie die Bedeutung des Extremwertes und die Bedeutung der Wendestelle im Sachzusammenhang der Aufgabe.

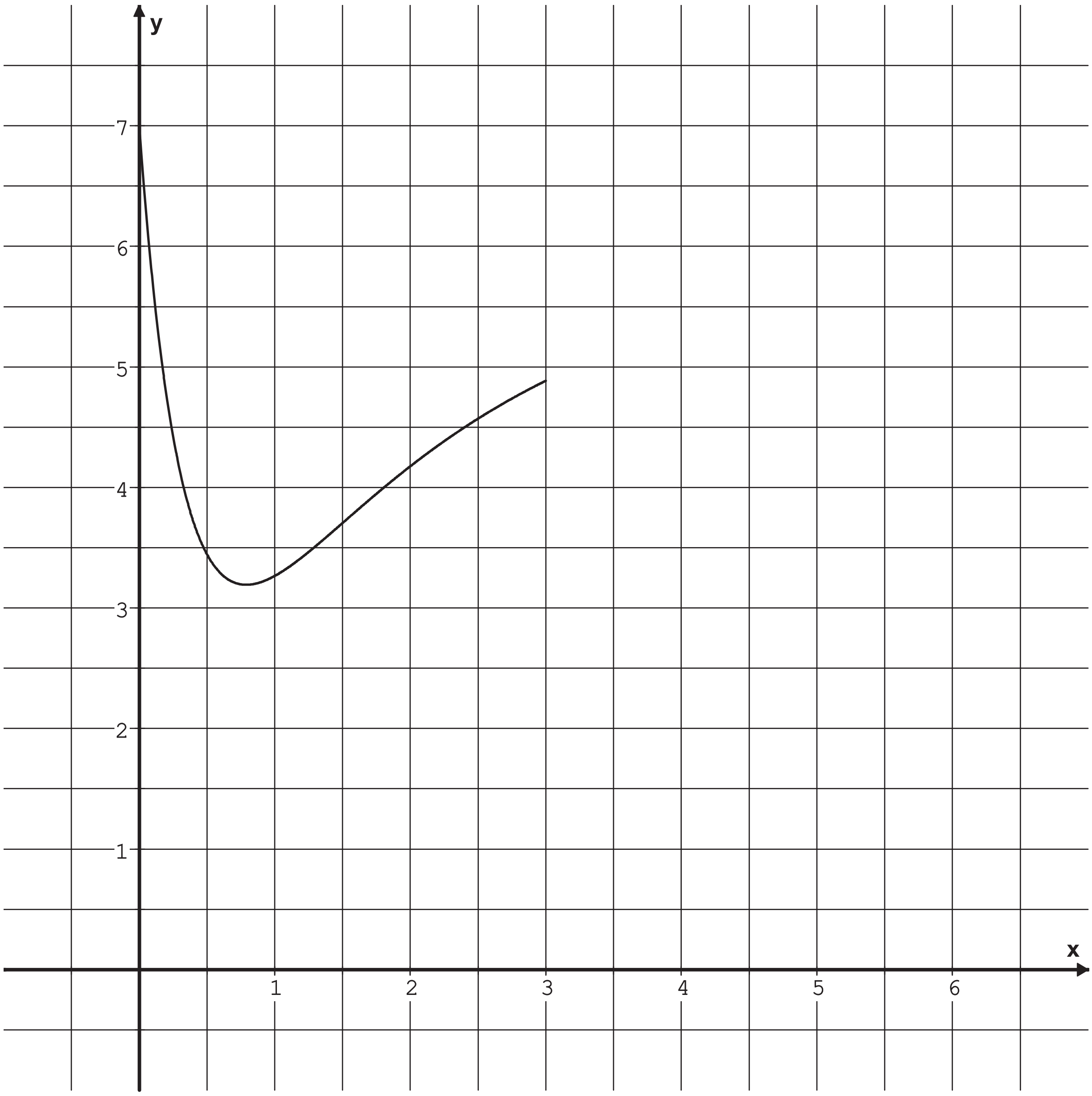
e) Bestimmen Sie k so, dass F mit

$$F(x) = 10 \cdot e^{-0{,}5x} + k \cdot e^{-3x} + 6x$$

eine Stammfunktion von f ist.
Bestimmen Sie das Integral von f über dem Intervall [0; 1,5].
Mit diesem Wert sollen Sie folgende Aufgabe bearbeiten:
15 Jahre nach der Werkschließung konnte die Stadt Fördergelder beantragen. Diese richteten sich nach der durchschnittlichen Einwohnerzahl (auf Tausend gerundet) der Stadt in diesen 15 Jahren.
Bestimmen Sie die Höhe der Fördermittel, die die Stadt damals erhielt, wenn es für jeden Einwohner 1000 DM an Fördergeldern gab.

f) Skizzieren Sie den weiteren Verlauf des Graphen (s. Anlage) und geben Sie eine begründete Prognose über die weitere Entwicklung der Einwohnerzahl ab, unter der Bedingung, dass sie weiterhin der Funktion f genügt.
Ermitteln Sie die größtmögliche Einwohnerzahl, mit der unter diesen Bedingungen die Stadtentwickler rechnen müssten.
Beschreiben Sie Gründe, warum sich die Einwohnerzahl vermutlich anders entwickeln wird.

Anlage zur Aufgabe „Bevölkerungsentwicklung“:



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Zum Zeitpunkt der Werksschließung hat die Kleinstadt ca. 70.000 Einwohner, danach nimmt die Einwohnerzahl stark ab, das Minimum wird nach ca. 8 Jahren erreicht, danach steigt sie langsam wieder an.	5	10	
b)	Untersuchung auf Extrempunkte: $f'(x) = 2{,}5e^{-0{,}5x} - 18e^{-3x}$ $f'(x) = 0: \quad 2{,}5e^{-0{,}5x} - 18e^{-3x} = 0 \Leftrightarrow 2{,}5e^{-0{,}5x} = 18e^{-3x}$ *(Rechnung erst ab hier erwartet)* $\Leftrightarrow \quad e^{-0{,}5x} = 7{,}2e^{-3x}$ $\Leftrightarrow \quad -0{,}5x = \ln 7{,}2 - 3x$ $\Leftrightarrow \quad 2{,}5x = \ln 7{,}2$ $\Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln 7{,}2}{2{,}5} = 0{,}7896\ldots$ Der Grafik kann entnommen werden, dass f an dieser Stelle ein Minimum hat. Der Nachweis kann aber auch über die 2. Ableitung erfolgen: $f''(\frac{\ln 7{,}2}{2{,}5}) = -1{,}25e^{-0{,}5\cdot\frac{\ln 7{,}2}{2{,}5}} + 54e^{-3\cdot\frac{\ln 7{,}2}{2{,}5}} > 0.$ Berechnung des Funktionswertes an der Minimalstelle: $f\left(\frac{\ln 7{,}2}{2{,}5}\right) = -5e^{-0{,}5\cdot\frac{\ln 7{,}2}{2{,}5}} + 6e^{-3\cdot\frac{\ln 7{,}2}{2{,}5}} + 6 \approx 3{,}19.$ f hat in $T\,(0{,}79 \mid 3{,}19)$ ein Minimum.	10	15	
c)	Untersuchung auf Wendestellen: $f''(x) = -1{,}25e^{-0{,}5x} + 54e^{-3x}$ $f'''(x) = 0{,}625e^{-0{,}5x} - 162e^{-3x}$ $f''(x) = 0: \quad -1{,}25e^{-0{,}5x} + 54e^{-3x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}25e^{-0{,}5x} = 54e^{-3x} \Leftrightarrow e^{-0{,}5x} = 43{,}2e^{-3x}$ $-0{,}5x = \ln 43{,}2 - 3x \Leftrightarrow 2{,}5x = \ln 43{,}2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 43{,}2}{2{,}5} \approx 1{,}5\,.$ Der Grafik kann entnommen werden, dass f an dieser Stelle eine Wendestelle hat. Der Nachweis kann aber auch über die 3. Ableitung erfolgen: $f'''(1{,}5) \neq 0$. Die Funktion f hat die Wendestelle (gerundet) bei 1,5.		15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>Der Tiefpunkt gibt den Zeitpunkt mit der geringsten Einwohnerzahl und die dazugehörige Einwohnerzahl an. (Nach ca. 8 Jahren hat die Einwohnerzahl mit etwa 32.000 Einwohnern ihr Minimum erreicht. Danach stieg sie wieder an.)

An der Wendestelle steigt die Einwohnerzahl am stärksten. (Nach ca. 15 Jahren hat das Bevölkerungswachstum seinen Höhepunkt erreicht.)

Die Klammerpassagen werden von den Prüflingen nicht erwartet.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>$F(x) = 10 \cdot e^{-0,5x} + k \cdot e^{-3x} + 6x$

$F'(x) = -5e^{-0.5x} - 3k \cdot e^{-3x} + 6$

$f(x) = -5e^{-0.5x} + 6e^{-3x} + 6$

Vergleich der Koeffizienten von F’ und f:

Aus $-3k = 6$ folgt $k = -2$.

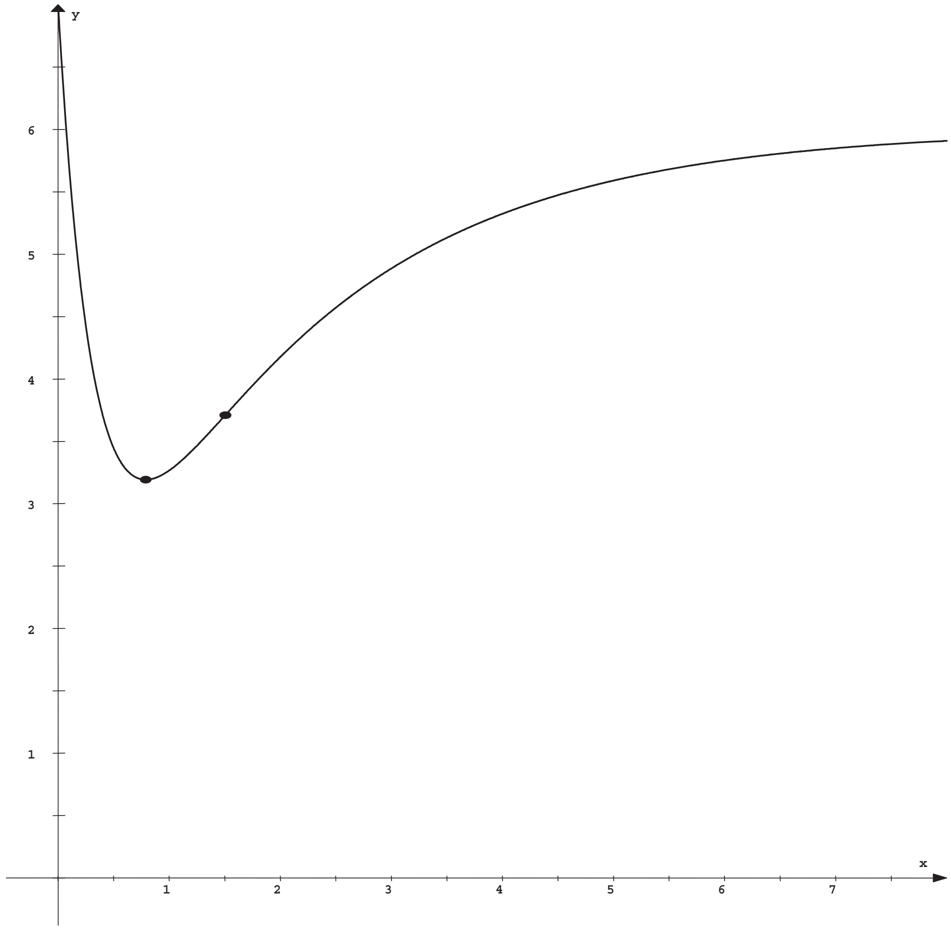
Danach gilt: $F(x) = 10 \cdot e^{-0,5x} - 2 \cdot e^{-3x} + 6x$.

<u>Berechnung des Integrals:</u>

$\int_0^{1,5} f(x)\,dx = \left[10e^{-0,5x} - 2e^{-3x} + 6x\right]_0^{1,5} \approx 4,724 - 0,022 + 9 - 10 + 2 \approx 5,70$

Letzter Zwischenschritt nicht verlangt, da die Rechenschritte möglicherweise auf dem Taschenrechner gespeichert waren.
Berechnung der durchschnittlichen Einwohnerzahl in diesen 15 Jahren:
$\frac{5,70}{1,5} = 3,80$.
Dies entspricht einer durchschnittlichen Einwohnerzahl von etwa 38.000.

Die Stadt erhielt Fördermittel in Höhe von etwa 38 Millionen DM.</td><td>5</td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung,
Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

Unter diesen Bedingungen würde die Einwohnerzahl immer langsamer steigen und nie den Wert von 60000 Einwohnern übersteigen. Dies erhält man aus der Funktionsvorschrift.
Die Einwohnerzahl wird sich wohl anders entwickeln, da z.B. weitere Firmen eröffnen oder schließen könnten, die Alterspyramide sich auswirkt oder wegen der schönen Lage sich die Zuwanderung verstärkt… </td><td></td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

LA/AG 1

II.1 Zwei Geraden

In einem kartesischen Koordinatensystem sind zwei Geraden gegeben:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ r, s \in \mathbb{R}.$$

a) Die Gerade g hat mit der x_1-x_2-Ebene den Schnittpunkt $P\ (8 \mid 1 \mid 0)$ und mit der x_2-x_3-Ebene den Schnittpunkt $R\ (0 \mid 11 \mid 8)$. Zeichnen Sie g, P und R in das beiliegende Koordinatensystem ein. Berechnen Sie die Schnittpunkte Q und S von h mit der x_1-x_2-Ebene bzw. mit der x_2-x_3-Ebene und zeichnen Sie h, Q und S ebenfalls in das Koordinatensystem ein (s. Anlage).

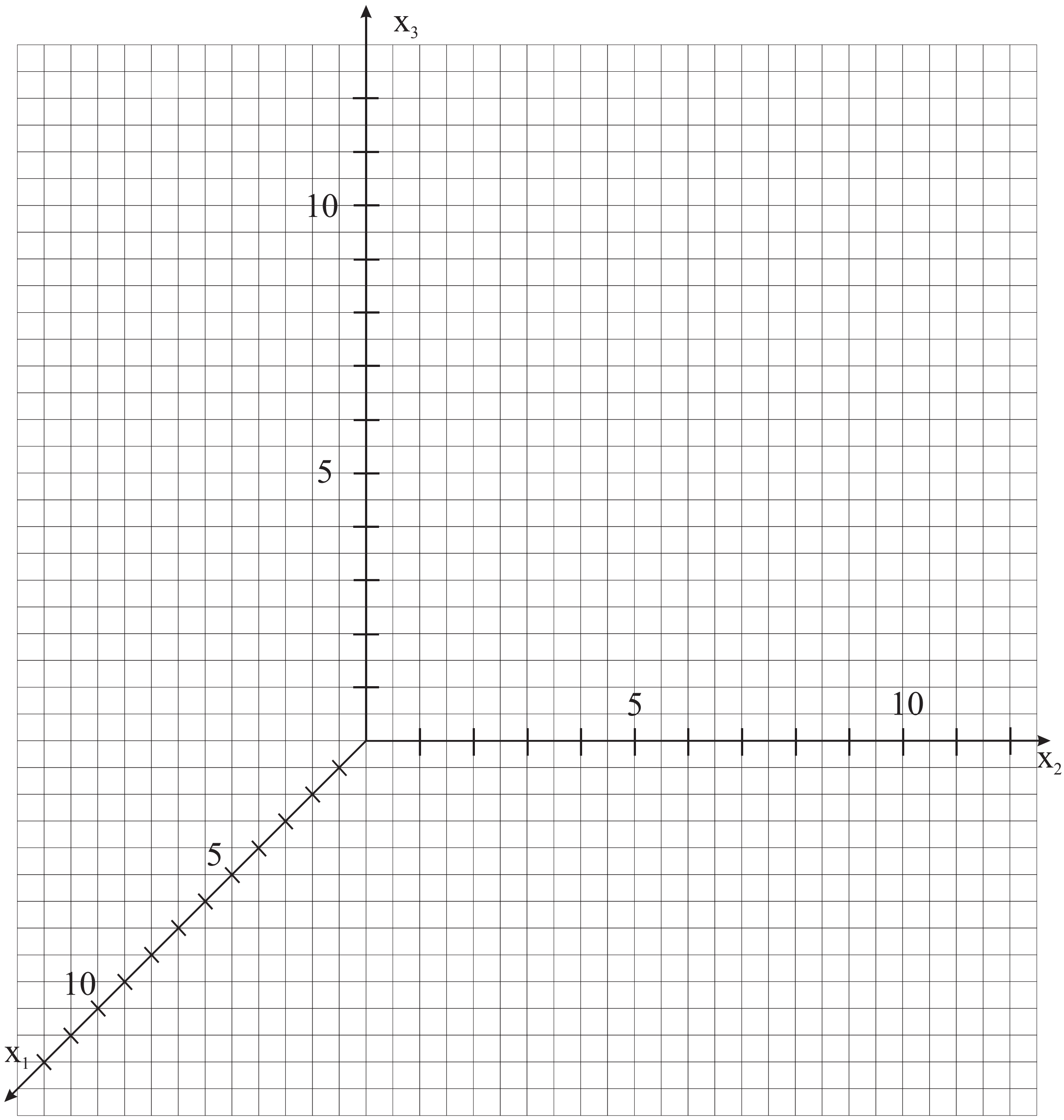
b) Untersuchen Sie die Lage von g und h zueinander und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

c) Der Punkt $T\ (4 \mid 6 \mid 4)$ bildet mit den Punkten P und Q das Dreieck D_1.
Zeichnen Sie D_1 in das Koordinatensystem ein.
Weisen Sie nach, dass D_1 rechtwinklig, aber nicht gleichschenklig ist und berechnen Sie den Flächeninhalt von D_1.

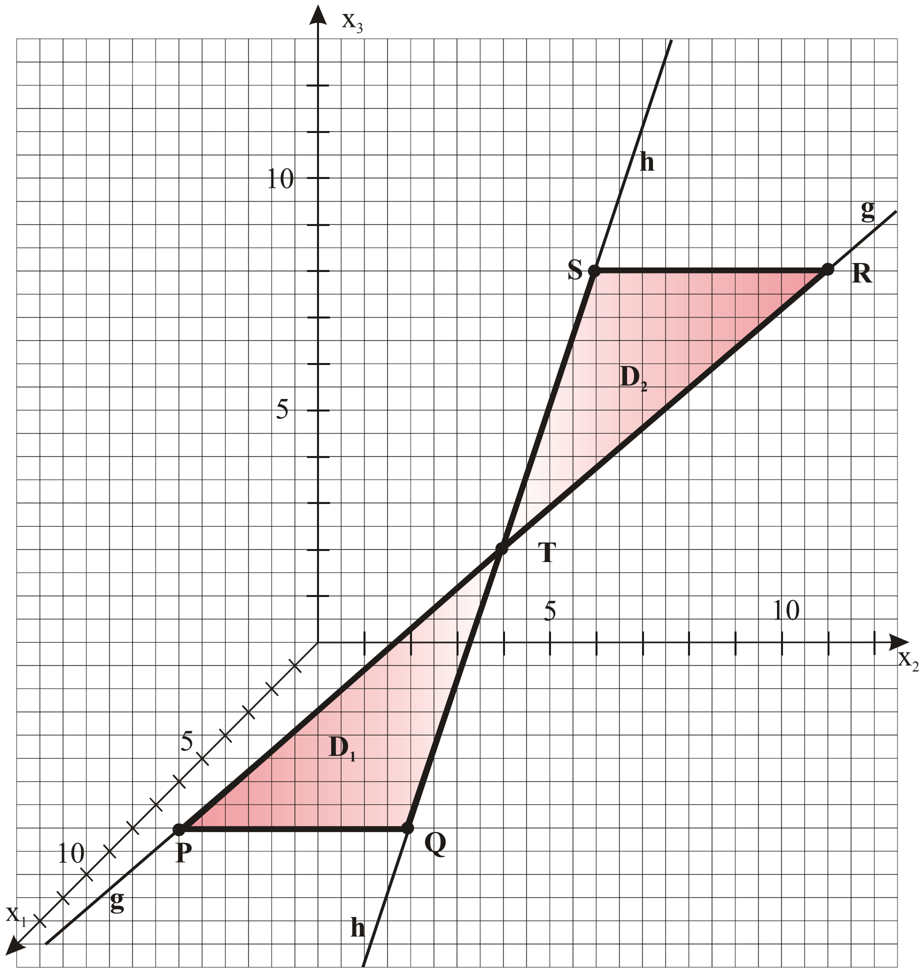
d) Der Punkt $T\ (4 \mid 6 \mid 4)$ bildet mit den Punkten R und S das Dreieck D_2.
Zeichnen Sie D_2 in das Koordinatensystem ein.
Beschreiben Sie, wie man nachweisen könnte, dass D_1 und D_2 kongruent sind. (Es müssen keine Rechnungen durchgeführt werden.)

e) Betrachten Sie einen Punkt U, der weder auf g noch auf h liegt. Gesucht ist eine Gerade durch U, die g und h in zwei verschiedenen Punkten schneidet.
Beschreiben Sie mit Angabe von Begründungen, wie diese Untersuchung durchgeführt werden kann.
Führen Sie diese Untersuchung für den Punkt $U\ (3 \mid 0 \mid 1)$ durch.

Anlage zur Aufgabe „Zwei Geraden“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Zeichnung s.u. Bestimmung von Q: $Q\ (q_1 \mid q_2 \mid 0)\ \wedge$ und $Q \in h$ $0 - s = q_1 \ \wedge\ 6 = q_2 \ \wedge\ 8 + s = 0$ $s = -8$, $q_1 = 8$, $q_2 = 6$ Q hat also die Koordinaten (8 | 6 | 0). Bestimmung von S: Aus der Geradengleichung erkennt man, dass S die Koordinaten (0 | 6 | 8) hat. *Es kann aber auch wie bei der Bestimmung von Q gerechnet werden.* Grafische Gesamtdarstellung *(enthält auch die Aufgabenteile c) und d))*:  *Für die grafische Gesamtdarstellung können bis zu 10 Punkte vergeben werden. Dieses Punktekontingent ist in den 25 Punkten für Aufgabenteil a) enthalten.*	10	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
b)	Bestimmung eines möglichen Schnittpunktes *V* von *g* und *h*: Ansatz: $\vec{x}_g = \vec{x}_h \Leftrightarrow \begin{pmatrix}4\\6\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-4\\5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\8\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $-4r + s = -4 \;\wedge\; 5r = 0 \;\wedge\; 4r - s = 4$ $r = 0 \;\wedge\; s = -4 \;\Rightarrow$ *g* und *h* schneiden sich in $V(4 \mid 6 \mid 4)$. *Alternative: Der gemeinsame Punkt V kann auch aus den Geradengleichungen (r = 0 und s = –4) erkannt werden.*	10	5	
c)	Zeichnung s. Lösungsskizze zu a). Überprüfung der Rechtwinkligkeit: Es gilt: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}8-8\\6-1\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QT} = \begin{pmatrix}4-8\\6-6\\4-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$ und somit $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QT} = 0$. $\Rightarrow D_1$ hat in *Q* einen rechten Winkel. Weiter gilt: $\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert = 5 \;\wedge\; \lvert\overrightarrow{QT}\rvert = \sqrt{32} \;\Rightarrow D_1$ ist nicht gleichschenklig. Berechnung der Flächeninhalts: Für den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen *a* und *b* gilt: $F(D) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b \;\Rightarrow F(D_1) = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ (FE).		25	
d)	Zeichnung s. Lösungsskizze zu a). Man kann prüfen, ob die beiden Dreiecke in drei Seiten, in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel oder in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen.	5	5	
e)	Man kann prüfen, ob *U* in der von g und h aufgespannten Ebene E_2 liegt. Ist dies der Fall, gibt es unendlich viele Geraden mit der angegebenen Eigenschaft. Ist dies nicht der Fall, gibt es keine Gerade mit der angegebenen Eigenschaft. Untersuchung für $U(3 \mid 0 \mid 1)$: Eine mögliche Darstellung von E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\6\\8\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-4\\5\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Dann gilt: $U \in E_2 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\8\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-4\\5\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ Die erste und die dritte Zeile des zugehörigen Gleichungssystems widersprechen sich. U liegt nicht in E_2. Es gibt demnach keine Gerade durch U, die g und h außerhalb ihres Schnittpunktes schneidet.		5	20
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

LA/AG 2

II.2 Fruchtsäfte

Ein Betrieb der Getränkeindustrie produziert in zwei Werken an verschiedenen Standorten Fruchtsäfte. Im Werk A werden aus vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 hergestellt. Im Werk B werden aus den Zwischenprodukten dann die drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist durch die beiden folgenden Tabellen gegeben:

Werk A: Rohstoffeinsatz			
$R \to Z$	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	3	0
R_2	0	6	2
R_3	a_{31}	0	a_{33}
R_4	1	3	1

Werk B: Zwischenprodukteinsatz			
$Z \to E$	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	4
Z_2	8	10	1
Z_3	6	2	2

a) Bestimmen Sie die Elemente a_{31} und a_{33} in der Rohstoffeinsatzmatrix A so, dass die Rohstoff/Endproduktmatrix C wie folgt lautet:

$$C = \begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 16 & 6 & 12 \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie, wie groß der Vorrat an den einzelnen Rohstoffen sein muss, damit von den Endprodukten 150 ME von E_1, 200 ME von E_2 und 250 ME von E_3 hergestellt werden können.

b) Durch technische Störungen im Produktionsablauf in Werk A gab es einen Ausfall bei der Herstellung des Zwischenproduktes Z_2. Erschwerend kommt hinzu, dass sich wegen Renovierungsarbeiten in den Lagerräumen des Werkes B nur geringe Bestände an Zwischenprodukten befinden. Zurzeit sind am Lager in Werk B nur noch die Zwischenprodukte Z_1 mit 75 ME und Z_3 mit 100 ME.

Ein Kunde bestellt kurzfristig 12 ME von Endprodukt E_3.

Dem Kundenwunsch entsprechend werden nun genau die 12 ME von E_3 produziert, wobei aber produktionsbedingt auch die beiden anderen Endprodukte E_1 und E_2 (nach obiger Tabelle) hergestellt werden.
Zeigen Sie, dass sich die oben genannten Zwischenproduktbestände vollständig durch diese Produktion verarbeiten lassen, und bestimmen Sie, wie viele ME der Endprodukte E_1 und E_2 dabei hergestellt werden können und wie viele ME des Zwischenprodukts Z_2 das Werk A dann liefern muss.

c) Um auf Dauer einen reibungslosen Produktionsablauf in Werk B zu gewährleisten, soll das Lager nach der Renovierung einen Mindestbestand an Zwischenprodukten aufweisen.

Beurteilen Sie ohne Rechnungen die Probleme der Lagerhaltung bezüglich des Kapitalbedarfs und der Finanzierung.

Fortsetzung nächste Seite →

d) Zukünftig soll die Produktion im Werk A auf eine neue, sicherere Fertigungstechnik umgestellt werden. Bei dieser Technik ändern sich in Abhängigkeit von einem Technologieparameter t sowohl der Rohstoffeinsatz als auch die Fertigungskosten für die Zwischenproduktion.

Die Gesamtkosten K für die Herstellung von je 1 ME der Zwischenprodukte belaufen sich in GE

nach alter Technik auf $K_{alt} = 5000$ und

nach neuer Technik auf $K_{neu} = t^3 + 12t^2 - 144t + 5000$ mit $t \in \left]0;9\right]$.

- Bestimmen Sie den Parameter t so, dass die Gesamtkosten K minimal werden.
- Ermitteln Sie, für welche ganzzahligen Werte von t das neue Produktionsverfahren kostengünstiger ist als das alte Verfahren, und beurteilen Sie die neue Kostensituation des Betriebes.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	I	II	III
a)	$C = A\cdot B$ und $C=\begin{pmatrix}26&31&7\\60&64&10\\16&6&12\\32&33&9\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&6&2\\a_{31}&0&a_{33}\\1&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&4\\8&10&1\\6&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26&31&7\\60&64&10\\2a_{31}+6a_{33}&a_{31}+2a_{33}&4a_{31}+2a_{33}\\32&33&9\end{pmatrix}$ Hieraus ergibt sich: $2a_{31}+6a_{33}=16$ $a_{31}+2a_{33}=6$ $4a_{31}+2a_{33}=12$ Durch Auflösen von 2 Gleichungen und Einsetzen in die 3. Gleichung erhält man: $a_{31}=2$ und $a_{33}=2$. $C\cdot\vec{x}_E=\vec{x}_R$ *mit* $\vec{x}_E=\begin{pmatrix}150\\200\\250\end{pmatrix}$ bedeutet $\begin{pmatrix}26&31&7\\60&64&10\\16&6&12\\32&33&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}150\\200\\250\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11850\\24300\\6600\\13650\end{pmatrix}$ Zur Herstellung von 150 ME von E_1, 200 ME von E_2 und 250 ME von E_3 werden folgende Rohstoffvorräte benötigt: 11850 ME von R_1, 24300 ME von R_2, 6600 ME von R_3 und 13650 ME von R_4.	10	15	
b)	$B\cdot\vec{x}_E=\vec{x}_Z$ mit $\vec{x}_Z=\begin{pmatrix}75\\z_2\\100\end{pmatrix}$ und $\vec{x}_E=\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\12\end{pmatrix}$ $B\cdot\vec{x}_E=\begin{pmatrix}2&1&4\\8&10&1\\6&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e_1+e_2+48\\8e_1+10e_2+12\\6e_1+2e_2+24\end{pmatrix}$ $2e_1+e_2+48=75$ I $2e_1+e_2=27$ Hieraus ergibt sich: $8e_1+10e_2+12=z_2$ oder II $8e_1+10e_2-z_2=-12$ $6e_1+2e_2+24=100$ III $6e_1+2e_2=76$ Aus *I* und *III* werden $e_1=11$ und $e_2=5$ bestimmt. Eingesetzen in Gleichung *II* liefert $z_2=150$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

Möglich ist auch die formale Lösung des LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 27 \\ 8 & 10 & -1 & -12 \\ 6 & 2 & 0 & 76 \end{array}\right)\begin{array}{|c|c|} 4 & 3 \\ -1 & \\ & -1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & -6 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \text{ Tausch der 2. und 3. Zeile}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -6 & 1 & 120 \end{array}\right)\begin{array}{|c|} \\ 6 \\ 1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \end{array}\right)\begin{array}{|c|} 1 \\ -1 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \end{array}\right)\begin{array}{|c|} \frac{1}{2} \\ \\ \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \end{array}\right)$$

Hieraus lässt sich eindeutig ablesen: $e_1 = 11 \wedge e_2 = 5 \wedge z_2 = 150$

Die genannten Zwischenproduktbestände lassen sich bei der Produktion aller Endprodukte vollständig verarbeiten. Das Werk A muss dazu 150 ME von Z_2 liefern und es können zu den bestellten 12 ME von E_3, 11 ME von E_1 und 5 ME von E_2 hergestellt werden.
Auch kürzere Ausführungen sind anzuerkennen.

</td><td>10</td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Wenn ein bestimmter Lagervorrat an Zwischenprodukten zur Gewährleistung eines reibungslosen Produktionsablaufes in Werk B bereitgehalten werden soll, so erfordert dies zunächst Kapital in Höhe der Herstellkosten der Vorräte.

Die Finanzierung der Lagervorräte kann entweder aus eigenen Mitteln oder durch Kredite (Fremdmittel) erfolgen. In beiden Fällen ist das Kapital in den Vorräten gebunden und für andere Zwecke nicht verfügbar. Zum Kapitalbedarf für die Vorräte kommen noch Folgekosten der Finanzierung hinzu:

- bei der Eigenfinanzierung entgehen dem Unternehmen Erträge aus der Nutzung anderweitiger Investitionsmöglichkeiten,
- bei der Fremdfinanzierung fallen Zinsaufwendungen für die Kredite auf die Lagerhaltung an.

Jede andere (eventuell kürzere) Darstellung mit obigen Aspekten wird als richtig bewertet.

</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

d) Minimum von K:

$(K'(t) = 0 \;\wedge\; K''(t) > 0)$

$K'(t) = 3t^2 + 24t - 144, \quad K''(t) = 6t + 24$

$K'(t) = 0$ bedeutet $3t^2 + 24t - 144 = 0$ oder $t^2 + 8t - 48 = 0$

$t_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16+48} \Rightarrow t_1 = 4$ und $t_2 = -12 \notin \,]0;9]$

$K''(4) = 48 > 0 \Rightarrow$ Die Gesamtkosten K werden also für $t = 4$ minimal.

Wann ist das neue Verfahren kostengünstiger?

Der Nachweis kann über die Lösung einer Ungleichung oder mithilfe einer geeigneten Wertetabelle erfolgen.

Ungleichung $K(t) < 5000$:

$$t^3 + 12t^2 - 144t + 5000 < 5000$$
$$t^3 + 12t^2 - 144t < 0$$
$$t(t^2 + 12t - 144) < 0$$

($t^2 + 12t - 144 = 0$ hat die Lösungen $t_1 \approx 7{,}42$ und $t_2 \approx -19{,}42$)

$$t(t - 7{,}42)(t + 19{,}42) < 0 \text{ heißt } 0 < t < 7{,}42.$$

Da t ganzzahlig aus]0,9] gewählt werden muss, kommen also 1, 2, 3, 4, 5, 6 oder 7 in Frage.

Oder Wertetabelle:

t	$K(t)$
1	4869
2	4768
3	4703
4	4680
5	4705

t	$K(t)$
6	4784
7	4923
8	5128
9	5405

Als ganzzahlige Werte für t kommen demnach nur 1, 2, 3, 4, 5, 6, oder 7 in Frage.

Die neue Kostensituation ist in Abhängigkeit von t als positiv zu bewerten, weil durch die Umstellung der Produktion auf die neue Technologie die Bandbreite für eine Kostenminderung ($0 < t < 7{,}42$) erheblich größer ist als für eine Kostenerhöhung ($7{,}42 < t \leq 9$).

	I	II	III
d)		25	10
Insgesamt 100 BWE	20	60	20

STOCHASTIK 1

III.1 Welche Urne ist das?

Betrachten Sie zwei Urnen.
Die Urne U_1 enthält 6 schwarze und 4 weiße Kugeln.
Die Urne U_2 enthält 3 schwarze und 7 weiße Kugeln.
In den folgenden Aufgabenteilen werden immer einzelne Kugeln **mit Zurücklegen** gezogen.

a) Aus der Urne U_1 soll 10-mal mit Zurücklegen gezogen werden.
Berechnen Sie (ohne Tafelwerk) die Wahrscheinlichkeit, dass
- nur schwarze Kugeln gezogen werden
- genau 5 schwarze Kugeln gezogen werden
- höchstens 2 schwarze Kugeln gezogen werden
- mindestens 3 schwarze Kugeln gezogen werden.

Es muss bei jeder Rechnung nicht nur das Ergebnis, sondern auch der Rechenweg erkennbar sein.

b) Betrachten Sie nun folgendes Stufenexperiment:
Mithilfe eines Münzwurfs wird eine der beiden äußerlich nicht unterscheidbaren Urnen ausgewählt.
Anschließend wird 10-mal mit Zurücklegen aus dieser Urne gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit oder bestimmen Sie mit Hilfe des Tafelwerks, dass
- genau 5 schwarze Kugeln gezogen werden
- höchstens 2 schwarze Kugeln gezogen werden
- mindestens 3 schwarze Kugeln gezogen werden.

Jetzt wird Ihnen folgendes Spiel angeboten: Der Spielanbieter wählt mithilfe eines Münzwurfs eine der beiden äußerlich nicht unterscheidbaren Urnen aus. Sie dürfen dann zu Testzwecken 10-mal mit Zurücklegen eine Kugel aus dieser Urne ziehen.

Anschließend müssen Sie sich entscheiden, ob Sie für einen Spieleinsatz von 70 € an dem Spiel teilnehmen. Wenn Sie teilnehmen, erhalten Sie eine Auszahlung von 15 € für jede schwarze Kugel, die sich in der ausgewählten Urne befindet.

c) Natürlich lohnt sich nur die Urne U_1. Wenn Sie wüssten, dass die Urne U_2 ausgewählt wurde, würden Sie wohl nicht spielen. Viele schwarze Kugeln beim Testen sprechen für U_1.

Ein Statistiker berät Sie: Er schlägt vor, nur dann zu spielen, wenn mehr als 5 schwarze Kugeln gezogen werden.
- Nehmen Sie an, dass die Urne U_2 vorliegt, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie dennoch den Rat bekommen zu spielen.
- Nehmen Sie andererseits an, dass die Urne U_1 vorliegt, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie dennoch den Rat bekommen nicht zu spielen.
- Interpretieren Sie die beiden Ergebnisse vor dem Hintergrund der Methode des „Testens von Hypothesen“.

d) Nachdem Sie 10 mal gezogen haben, stellen Sie fest, dass genau 5 Kugeln schwarz waren.
Nach dem Rat des Statistikers sollten Sie nun die Finger von der Urne lassen.
Aber irgendwie reizt es Sie doch, auf das Spiel einzugehen. Sie beschließen deshalb, die (durch das Versuchsergebnis bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür auszurechnen, dass die angebotene Urne doch die Urne U_1 ist.
Zeigen Sie, dass diese Wahrscheinlichkeit ungefähr 66% beträgt.

e) Bei einer Entscheidung für das Spiel würden Sie also – bei genau 5 gezogenen schwarzen Kugeln – mit 66% Wahrscheinlichkeit 90 Euro einnehmen. Führen Sie diesen Gedanken zu Ende und berechnen Sie dazu den (durch das Testergebnis bedingten) Erwartungswert Ihrer Spieleinnahmen.
Begründen Sie dann eine Entscheidung für oder gegen die Teilnahme am Spiel.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Beim 10-fachen Ziehen mit Zurücklegen aus der Urne 1 ist die Anzahl der schwarzen Kugeln (10-$\frac{6}{10}$) -binomialverteilt.
- P(„alle Kugeln schwarz“) = $p^{10} = 0,6^{10} \approx 0,60\%$
- P(„5 schwarze Kugeln“) = $\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{6}{10}\right)^5\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^5 \approx 20,07\%$
- P(„höchstens 2 schwarze Kugeln aus U_1“) =
$\left(\frac{4}{10}\right)^{10} + 10\cdot\frac{6}{10}\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^9 + \binom{10}{2}\cdot\left(\frac{6}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^8 \approx 1,23\%$
- P(„mindestens 3 schwarze Kugeln aus U_1“) $\approx 1 - 1,23\ \% = 98,77\ \%$.</td><td>20</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Man betrachtet die ganze Situation als Stufenexperiment und wendet die Pfadregeln an: Auf der ersten Stufe wird eine Urne mit der Münze ausgewürfelt:
$$P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$$
und dann wird aus dieser Urne mit Zurücklegen 10 mal gezogen.
Wegen der Gleichverteilung der beiden Möglichkeiten auf der ersten Stufe, muss man die Wahrscheinlichkeiten der betrachteten Ereignisse für beide Urnen berechnen, und dann jeweils arithmetisch mitteln.
Für U_1 ist die Rechnung schon in a) erfolgt, für U_2 kann diese analog zu a) oder schneller mit Hilfe des Tafelwerks ($p = 0,3$) erfolgen:
- P(„5 schwarze Kugeln aus U_2“) $\approx$ 10,29 %
- P(„höchstens 2 schwarze Kugeln aus U_2“) $\approx$ 0,0282 + 0,1211+ 0,2335 $\approx$ 38,28 %
- P(„mindestens 3 schwarze Kugeln aus U_2“) $\approx 1 - 38,28\ \% = 61,72\ \%$.
Es ergeben sich daraus folgende Mittelwerte:
- P(„5 schwarze Kugeln“) $\approx$ 15,18 %
- P(„höchstens 2 schwarze Kugeln“) $\approx$ 19,76 %
- P(„mindestens 3 schwarze Kugeln“) $\approx$ 80,24 %</td><td>5</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>- Dem Tafelwerk entnimmt man: $P_1 = \sum_{k=6}^{10}\binom{10}{k}\cdot(0,3)^k\cdot(0,7)^{10-k} \approx 4,73\%$
- Dem Tafelwerk entnimmt man: $P_2 = \sum_{k=0}^{5}\binom{10}{k}\cdot 0,6^k\cdot 0,4^{(10-k)} \approx 36,69\%$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	- Hier wird also auf dem 5%-Signifikanzniveau die Hypothese H_1: Es handelt sich um die Urne U_1 gegen die Nullhypothese H_0: Es handelt sich um die Urne U_2 getestet. P_1 entspricht der Irrtumswahrscheinlichkeit 1.Art, P_2 entspricht der Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art. Die Entscheidungsregel ist sehr „vorsichtig“.		20	5
d)	Da die Anfangsverteilung für die beiden möglichen Urnen als Gleichverteilung (Münzwurf) angenommen wird, vereinfacht sich die Rechnung z.B. mit Hilfe des Satzes von Bayes in folgender Weise: $P(U = U_1 \mid K = 5)$ $= \frac{B(10;0,6;5)}{B(10;0,6;5) + B(10;0,3;5)} = \frac{0,6^5 \cdot 0,4^5}{0,6^5 \cdot 0,4^5 + 0,3^5 \cdot 0,7^5} \approx 66,1\%$		5	10
e)	Wir fassen den „Wert“ der Urne als Zufallsvariable W auf: $W(U_1) = 6 \cdot 15€ = 90€$ $\quad$ $W(U_2) = 3 \cdot 15€ = 45€$ Mit $P(U_1) = 0,66$ und $P(U_2) = 0,34$ erhalten wir: $E(W) = 0,66 \cdot 90€ + 0,34 \cdot 45€ = 74,7€$. Die „Werterwartung“ ist also größer als der Kaufpreis von 70 € . Wenn man die „Werterwartung“ im Vergleich zum Kaufpreis als Entscheidungskriterium wählt, dann sollte man sich nach dem Testergebnis $K = 5$ auf das Spiel einlassen.		5	5
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

STOCHASTIK 2

III.2 Alkoholsünder

In einer bestimmten Stadt an einer bestimmten Stelle führt die Polizei in regelmäßigen Abständen in der Nacht von Sonnabend auf Sonntag zwischen 1 Uhr und 4 Uhr Verkehrskontrollen durch. Dabei muss der Fahrer „in die Röhre pusten“ und es wird dabei festgestellt, ob der Alkoholgehalt im Blut im gesetzlich erlaubten Rahmen liegt oder nicht. Aus mehrjähriger Erfahrung weiß die Polizei, dass ungefähr 10 % der Fahrer um diese Zeit an dieser Stelle die „Promillegrenze“ überschreiten. Wir nennen diese Personen hier kurz „Alkoholsünder“. Es soll angenommen werden, dass die Anzahl der Alkoholsünder in den Verkehrskontrollen einer Binomialverteilung genügt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Nacht bei 20 Kontrollen
   - genau zwei Alkoholsünder ermittelt werden
   - nicht mehr als zwei Alkoholsünder ermittelt werden
   - mindestens drei Alkoholsünder ermittelt werden
   - der erste ermittelte Alkoholsünder im letzten oder vorletzten kontrollierten Auto sitzt
   - genau zwei Alkoholsünder ermittelt werden und diese beiden auch noch in zwei aufeinander folgenden Kontrollen erfasst werden.

b) Um die Quote der Alkoholsünder zu senken, werden probeweise Warnschilder der Verkehrswacht aufgestellt. Nach einigen Wochen soll nun an Hand einer Messung von 100 Autofahrern ermittelt werden, ob diese Maßnahme auf dem 5% Niveau ($\alpha \le \alpha_0 = 5\%$) zu einer signifikanten Senkung der bisherigen Quote der Alkoholsünder geführt hat (Nullhypothese: $p \ge 10\%$).
   Sie können zur Berechnung die Tabelle in der Anlage verwenden.
   - Begründen Sie, dass man genau dann auf dem 5% Niveau von einer signifikanten Senkung der Alkoholsünderquote sprechen sollte, wenn höchstens 4 Alkoholsünder ermittelt werden.
   - Falls durch die Warnschilder die Alkoholsünderquote tatsächlich auf 5% gesenkt worden wäre, wie groß wäre dann bei dem Test die Wahrscheinlichkeit β für den Fehler 2. Art ? Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Es wird nun angenommen, dass bei dem Test aus b) unter den 100 Autofahrern nur 3 Alkoholsünder ermittelt werden. Es liegt also ein signifikantes Ergebnis vor und eine Bürgerinitiative tritt deshalb dafür ein, auf vielen weiteren Straßenabschnitten die Schilder aufzustellen. Darauf argumentieren einige Haushaltspolitiker, dass dies wegen der hohen Kosten erst zu vertreten wäre, wenn die Alkoholsünderquote dadurch von 10 % auf unter 5% gesenkt würde. Beurteilen Sie das Testergebnis im Hinblick auf diesen Anspruch.

d) Beurteilen Sie die oben gemachte Annahme, dass die Anzahl der Alkoholsünder in den Verkehrskontrollen binomialverteilt ist.

Anlage zur Aufgabe „Alkoholsünder“

Auszug aus einem Tafelwerk der summierten Binomialverteilung

$$F(n,p;k) \;= B(n,p;0)+....+B(n,p;k) \;= \binom{n}{0}\cdot p^0\cdot(1-p)^{(n-0)}+...+\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{(n-k)}$$

					p			
n	**k**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,1**	**0,15**
	0	0,3660	0,1326	0,0476	0,0169	0,0059	0,0000	0,0000
	1	0,7358	0,4033	0,1946	0,0872	0,0371	0,0003	0,0000
	2	0,9206	0,6767	0,4198	0,2321	0,1183	0,0019	0,0000
	3	0,9816	0,8590	0,6472	0,4295	0,2578	0,0078	0,0001
	4	0,9966	0,9492	0,8179	0,6289	0,4360	0,0237	0,0004
	5	0,9995	0,9845	0,9192	0,7884	0,6160	0,0576	0,0016
	6	0,9999	0,9959	0,9688	0,8936	0,7660	0,1172	0,0047
	7		0,9991	0,9894	0,9525	0,8720	0,2061	0,0122
	8		0,9998	0,9968	0,9810	0,9369	0,3209	0,0275
	9			0,9991	0,9932	0,9718	0,4513	0,0551
	10			0,9998	0,9978	0,9885	0,5832	0,0994
	11				0,9993	0,9957	0,7030	0,1635
	12				0,9998	0,9985	0,8018	0,2473
	13					0,9995	0,8761	0,3474
	14					0,9999	0,9274	0,4572
100	**15**						0,9601	0,5683
	16						0,9794	0,6725
	17						0,9900	0,7633
	18						0,9954	0,8372
	19						0,9980	0,8935
	20						0,9992	0,9337
	21						0,9997	0,9607
	22						0,9999	0,9779
	23							0,9881
	24							0,9939

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	- P(„genau 2 Alkoholsünder“) $=\binom{20}{2}\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^{18}\approx 28{,}5\%$. - P(„nicht mehr als 2 Alkoholsünder“) $=\sum_{k=0}^{2}\binom{20}{k}\cdot 0{,}1^k\cdot 0{,}9^{20-k}\approx 67{,}7\%$. - P(„mindestens 3 Alkoholsünder“) $\approx 1-67{,}7\%=32{,}3\%$. - P(„der erste Alkoholsünder sitzt im letzten oder vorletzten kontrollierten Auto“) $=(0{,}9^{18}+0{,}9^{19})\cdot 0{,}1\approx 2{,}9\%$ oder auch P(„der erste Alkoholsünder sitzt im letzten oder vorletzten kontrollierten Auto“) $=0{,}9^{18}\cdot 0{,}1^2+0{,}9^{18}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9+0{,}9^{19}\cdot 0{,}1\approx 2{,}9\%$. - P(„genau zwei Alkoholsünder aufeinander folgend“) $=19\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^{18}\approx$ 2,9 %.	15	20	
b)	Die berechneten Wahrscheinlichkeiten können der Tabelle entnommen werden. Bestimmung des Ablehnungsbereichs: Es gilt: $\sum_{k=0}^{4}\binom{100}{k}\cdot 0{,}1^k\cdot 0{,}9^{100-k}\approx 2{,}37\%$, aber $\sum_{k=0}^{5}\binom{100}{k}\cdot 0{,}1^k\cdot 0{,}9^{100-k}\approx 5{,}76\%$ Also sollte die Nullhypothese $H_0: p\geq 0{,}1$ verworfen werden, wenn weniger als 5 Alkoholsünder ermittelt werden. Bestimmung des Fehlers 2. Art: $\beta=1-\sum_{k=0}^{4}\binom{100}{k}\cdot(0{,}05)^k\cdot(0{,}95)^{100-k}\approx 56{,}4\%$ Dieser Wert ist sehr hoch. Selbst wenn die Alkoholsünderquote deutlich gesenkt würde, ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass der Test dies nicht „entdeckt“.	10	30	
c)	Da $3<4$, spricht das Ergebnis signifikant für eine Senkung der Alkoholsünderquote. Wenn die Haushaltspolitiker der Maßnahme grundsätzlich negativ gegenüberstehen, könnten sie eine Begründung dafür verlangen, dass die Quote unter 5% liegt, um der Maßnahme zuzustimmen, also verlangen, dass die Nullhypothese $H_0: p\geq 0{,}05$ mit Signifikanz verworfen werden kann. Dann wäre der Ablehnungsbereich $k\leq 1$. Es gilt nämlich $\sum_{k=0}^{1}\binom{100}{k}\cdot 0{,}05^k\cdot 0{,}95^{100-k}\approx 3{,}71\%$, aber			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>$\sum_{k=0}^{2}\binom{100}{k}\cdot 0{,}05^{k}\cdot 0{,}95^{100-k}\approx 11{,}83\%$.
Vor diesem Hintergrund ist das Ergebnis nicht signifikant, sie würden die Maßnahme ablehnen.

Wenn sie <u>der Maßnahme dagegen grundsätzlich positiv</u> gegenüberstehen, würden sie sich nur absichern und die Maßnahme nur dann ablehnen, wenn die Nullhypothese $H_0 : p \le 0{,}05$ signifikant abgelehnt werden muss. Dann wäre der Ablehnungsbereich $k \ge 10$. Es gilt nämlich
$1-\sum_{k=0}^{9}\binom{100}{k}\cdot 0{,}05^{k}\cdot 0{,}95^{100-k}\approx 1-97{,}18\%\approx 2{,}8\%$, aber
$1-\sum_{k=0}^{8}\binom{100}{k}\cdot 0{,}05^{k}\cdot 0{,}95^{100-k}\approx 1-93{,}69\%\approx 6{,}3\%$.
So gesehen liegt keine Signifikanz vor. Sie können damit nicht begründen, dass die Alkoholsünderquote über 5% liegt und würden die Maßnahme billigen.
Diese ausführliche Lösung wird nicht erwartet .Um die volle Punktzahl dieses Aufgabenteils zu erreichen, wird mindestens einer der beiden Testvorschläge erwartet und die darauf basierende Interpretation des Testergebnisses von drei ermittelten Alkoholsündern.</td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Es geht um die Frage der stochastischen Unabhängigkeit des „Trinkverhaltens“ der einzelnen Fahrer. Diese ist z.B. dann nicht gegeben, wenn einige die Kontrollstelle entdecken bzw. davon erfahren haben, wenn „Gruppen“ fahren (z.B. eine Hochzeitsgesellschaft) oder wenn z. B. in der Sylvester- oder Rosenmontagnacht gemessen wird.
Es wird von den Schülerinnen und Schülern eine „ergebnisoffene" zusammenhängende Darstellung erwartet.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>