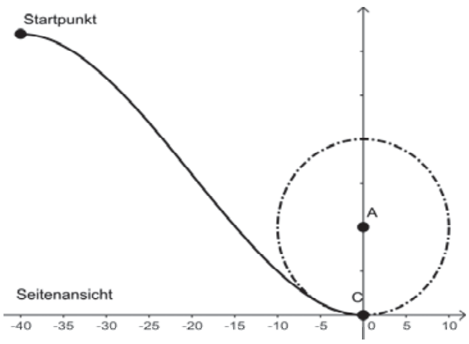
Analysis 1

I.1 Looping

Im Vergnügungspark Kleinwülferode soll eine Achterbahn gebaut werden. Die Konstrukteure möchten einen Looping in der Form eines Kreises einbauen.
Bei der zeichnerischen Darstellung (siehe Abbildung rechts) ist zu berücksichtigen, dass der Wagen den Looping einmal vollständig durchfährt. In der Seitenansicht sieht der Looping wie ein Kreis aus. Der Endpunkt des Loopings liegt aber in Blickrichtung genau hinter dem Beginn des Loopings (Punkt *C*). Die Werte entsprechen Längen in Metern.



Die Planung sieht bislang folgendermaßen aus: Der Wagen startet bei $x=-40$. Die Abfahrt wird durch die Funktion *g* im Intervall $[-40;0]$ beschrieben. Die Funktionsgleichung lautet

$$g(x)=-\frac{1}{160000}x^4+\frac{1}{2000}x^3+\frac{1}{20}x^2\,.$$

a) • Berechnen Sie die Höhe des Startpunktes.

• Berechnen Sie die Steigung im Startpunkt. **(10P)**

b) • Bestimmen Sie die steilste Stelle im Intervall $[-40;0]$.

• Bestimmen Sie die Stelle im Intervall $[-40;0]$, an der die Beschleunigung am größten ist, sowie die Stelle, an der die Geschwindigkeit am größten ist.

• Bestimmen Sie den Bereich der Abfahrt, in dem der Neigungswinkel von 45° überschritten wird. **(20P)**

Im Punkt *C* geht die Abfahrt in den Looping-Kreis über; hier muss es aufgrund der hohen Geschwindigkeit des Wagens einen krümmungssprungfreien Übergang geben.
Die Krümmung κ ist definiert als der Kehrwert des Radius des Kreises, der sich in dem Berührpunkt optimal an den Graphen der Funktion anschmiegt. Dieser Kreis wird Krümmungskreis genannt. Links- und Rechtskrümmungen werden durch das Vorzeichen unterschieden.
Die Formel für die Krümmung lautet:

$$\kappa(x)=\frac{g''(x)}{\sqrt{\left(1+\left(g'(x)\right)^2\right)^3}}\,.$$

c) Der Krümmungskreis im Nullpunkt *C* ist also der für die Achterbahn gesuchte Looping. Weisen Sie nach, dass der Kreis mit dem Mittelpunkt (0 | 10) und dem Radius 10 der Krümmungskreis der Funktion *g* im Punkt (0 | 0) ist. **(10P)**

Es schließt sich die Planung der Ausfahrt aus dem Looping an. Nach genau einem Durchlauf soll der Wagen den Looping wieder verlassen und sich auf einer Bahn bewegen, die durch eine Funktion h im Intervall $[0;25]$ beschrieben wird.

d) • Begründen Sie, dass die Bahn auf den nächsten Metern an Höhe gewinnen muss, wenn sich der Graph von h knick- und krümmungssprungfrei an den Looping anschließt.

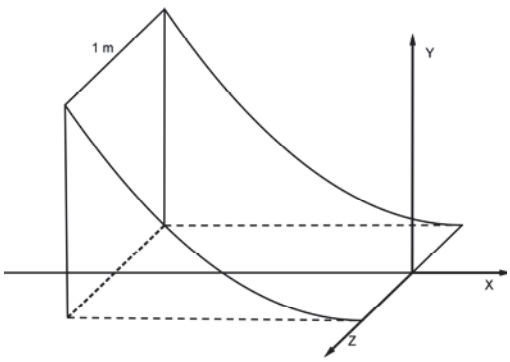
• Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion h möglichst niedrigen Grades, die sich im Punkt C krümmungssprungfrei an den Looping anschließt und im Punkt $D(25 \mid 20)$ krümmungssprungfrei in eine Gerade mit der Steigung 0,1 übergeht. Begründen Sie Ihren Ansatz.
Hinweis: Sollten Sie keine Lösung finden, so arbeiten Sie mit der Funktion „ersatz“ weiter, die gegeben ist durch

$$\text{ersatz}(x) = 8{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot x^5 + 4{,}85 \cdot 10^{-4} \cdot x^4 + 6{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot x^3 + 5 \cdot 10^{-2} \cdot x^2.$$ **(25P)**

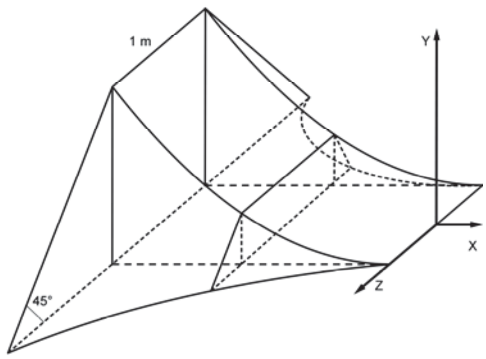
e) Je stärker die Krümmung ist, desto größer ist die Belastung für das Material und die Fahrgäste, insbesondere deren Wirbelsäule. Aus Sicherheitsgründen darf der Krümmungsbetrag den Wert 0,14 nicht überschreiten.
Untersuchen Sie, ob für die Funktion h der maximal zulässige Krümmungsbetrag überschritten wird, und bestimmen Sie den maximalen Krümmungsbetrag auf die dritte Stelle nach dem Komma gerundet. **(10P)**

Zurück zum ersten Teilstück.
Aus Stabilitätsgründen soll die Achterbahn im Intervall $[-3;0]$ auf einem Betonsockel geführt werden, der die ganze Konstruktion fixiert. Der Sockel ist 1 m breit und fällt zu den Seiten senkrecht ab (siehe nebenstehende Abbildung).

f) Bestimmen Sie das Volumen des Sockels. **(10P)**



Es werden Bedenken geäußert, dass dieser Sockel nicht genügend standfest sei, denn die quer wirkenden Kräfte würden nicht ausreichend aufgefangen. Die Planung des Sockels wird deshalb dahingehend verändert, dass der Querschnitt durch den Sockel für jedes x aus dem Intervall $[-3;0]$ ein Trapez ist, dessen obere Kante genau 1 m lang ist und dessen Seiten 45° gegenüber der Bodenfläche geneigt sind (siehe nebenstehende Abbildung)



Die Skizzen sind nicht maßstabsgetreu

g) Bestimmen Sie den Anteil, um den sich das Volumen des Sockels gegenüber f) erhöht. **(15P)**

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

- Die Höhe entspricht dem Funktionswert an der Stelle $x = -40$.
Aus $g(-40) = 32$ folgt, dass die Höhe des Startpunktes 32 m beträgt.
- Die Steigung einer Funktion wird durch die erste Ableitung bestimmt. Es ist $g'(-40)$ zu berechnen. Aus $g'(-40) = 0$ folgt, dass die Achterbahn im Startpunkt horizontal verläuft.
Hinweis: Die Angabe des Terms der Ableitungsfunktion ist nicht notwendig.
Es gilt: $g'(x) = -\frac{x^3}{40000} + \frac{3\cdot x^2}{2000} + \frac{x}{10}$.

</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

- Die steilste Stelle ist eine Wendestelle (oder liegt am Rand des Intervalls), es sind also die Nullstellen der zweiten Ableitung zu berechnen:
$g''(x) = -\frac{3x^2}{40000} + \frac{3x}{1000} + \frac{1}{10}$;
$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20 + \frac{20\sqrt{39}}{3} \approx 61{,}63 \vee x = 20 - \frac{20\sqrt{39}}{3} \approx -21{,}63$.
Nur der negative Wert liegt im Definitionsbereich. Da es sich bei g'' um eine nach unten geöffnete Parabel mit zwei Nullstellen handelt, liegt an der linken Stelle eine Vorzeichenwechsel von – nach + vor .
Die Steigung von g ist also an der Stelle $x \approx -21{,}63$ minimal.
- Die Beschleunigung ist am größten, wenn die Steigung betragsmäßig am größten ist. Das ist hier beim Minimum der Fall. Also ist die die Beschleunigung an der Stelle $x \approx -21{,}63$ maximal.
Die Geschwindigkeit ist im tiefsten Punkt maximal, also im Punkt (0 \| 0).
- Eine Neigung von 45° bedeutet, dass die Steigung an dieser Stelle -1 ist.
$g'(x) = -1 \Leftrightarrow x \approx -29{,}55 \vee x \approx -13{,}18 \vee x \approx 102{,}73$.
Aufgrund der minimalen Steigung bei $x \approx -21{,}63$ kann man sofort schließen, dass im Intervall $[-29{,}55; -13{,}18]$ die Neigung von 45° überschritten wird, die Steigung also kleiner als -1 ist.

</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Die Steigung im Punkt (0|0) hat den Wert 0, die Tangente der Funktion ist dort waagerecht. Der Krümmungskreismittelpunkt liegt auf der Normalen, also auf der y-Achse.
Einsetzen in die Krümmungsformel liefert den Krümmungswert 0,1; der Radius ist also 10.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

- Die erste Ableitung an der Anschlussstelle hat den Wert null. Die zweite Ableitung nimmt einen positiven Wert an, d.h. die Ableitungsfunktion steigt an, wird also positiv. Damit steigt der Graph der Funktion h, die die Bahn beschreibt, an.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

- Für den allgemeinen Ansatz benötigt man eine Funktion fünften Grades, da 6 Bedingungen an die Funktion zu stellen sind.
$h(x) = a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$
$h(0) = 0 \wedge h(25) = 20 \wedge h'(0) = 0 \wedge h'(25) = 0{,}1 \wedge h''(0) = 0{,}1 \wedge h''(25) = 0$
Die Funktion h ist ein Verbindungsstück zwischen dem Looping und dem Geradenstück.Die ersten beiden Gleichungen stellen die Anschlussbedingungen dar.
Der Looping hat im Nullpunkt die Steigung null und das Geradenstück die Steigung 0,1. Die erste Ableitung gibt die Steigung an. Damit ergeben sich die dritte und die vierte Gleichung.
Da an der Stelle $x = 0$ des Loopings (Krümmungskreis) die Krümmung den Wert 0,1 und die Steigung 0 hat, ergibt sich aus der Krümmungsformel, dass die zweite Ableitung den Wert 0,1 annehmen muss. Bei einem Anschluss an ein Geradenstück muss die Krümmung null sein. Damit ergeben sich die letzten beiden Gleichungen.
Damit ergibt sich mithilfe des solve-Befehls die Funktion h mit
$h(x) = \frac{13}{1562500} x^5 - \frac{151}{312500} x^4 + \frac{77}{12500} x^3 + \frac{1}{20} x^2$.

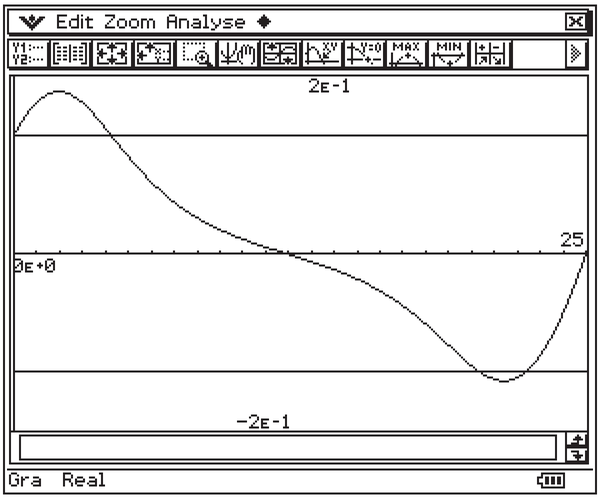
</td><td>10</td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Der Graph der Funktion κ mit $\kappa(x) = \frac{h''(x)}{\sqrt{\left(1 + \left(h'(x)\right)^2\right)^3}}$ wird gezeichnet. Die

Extrema können dann grafisch bestimmt werden.

Das Maximum liegt ungefähr bei *x=1,95.* Nachrechnen mit einer Wertetabelle liefert für $x = 1{,}95$ den maximalen Krümmungswert von ungefähr 0,13796, gerundet auf drei Stellen nach dem Komma ist das 0,138.

Damit wird die Sicherheitsgrenze nicht überschritten.



Die Ersatzfunktion hat bei $x \approx 2{,}790$ ihr Maximum mit dem maximalen Krümmungswert von ungefähr 1,188. Damit wird die Sicherheitsgrenze überschritten.

</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)	Das Volumen ergibt sich aus der Querschnittfläche multipliziert mit der Breite. $V = \text{Breite} \cdot \text{Querschnittsfläche} \; = 1 \cdot \int_{-3}^{0} g(x)dx \approx 0{,}43957125$. Das Volumen des Sockels beträgt etwa 0,44 m^3.		10	
g)	Für jedes x hat die obere Seite des Trapezes nach Konstruktion die Länge 1. Die untere Seite des Trapezes hat die Länge $g(x)+1+g(x)=1+2\cdot g(x)$, denn die seitlichen Dreiecke sind aufgrund des 45°-Winkels gleichschenklig. Zu jedem x-Wert gehört demnach die Querschnittsfläche $Q(x)=\frac{1}{2}\left(1+\left(1+2\cdot g(x)\right)\right)\cdot g(x)=\left(1+g(x)\right)\cdot g(x)=$ $=\frac{1}{160000}\cdot\left(\frac{x^2}{20}+\frac{x^3}{2000}-\frac{x^4}{160000}\right)\cdot(-x^4+80\cdot x^3+8000\cdot x^2+160000)$. Das Volumen ergibt sich nun als Integral (Aufsummieren aller Querschnitts-flächen). $\int_{-3}^{0} Q(x)dx \approx 0{,}554884$. Das neue Volumen beträgt also ungefähr 0,55 m^3. Damit ist das neue Volumen etwa 26 % größer, denn $\frac{0{,}555}{0{,}440} \approx 1{,}26$.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

.

ANALYSIS 2

I.2 Wachstumsverhalten von Bakterien

Fototrophe Bakterien brauchen Licht für ihren Stoffwechsel; wenn sie im Wasser leben, bevölkern sie vorzugsweise oberflächennahe Wasserschichten, die natürlich auch die sonstigen benötigten Nährstoffe enthalten müssen.

a) Für ein Forschungsprogramm wird bei einer ersten Untersuchung eine bestimmte Anzahl solcher Bakterien in ein entsprechend belichtetes Wasserbecken gebracht und deren momentaner Bestand ermittelt. Dabei werden die Zeit t in Stunden und die Anzahl der Bakterien pro cm³ notiert:

Zeit in Stunden	0	0,25	0,5	0,75	1
Anzahl der Bakterien pro cm^3.	10	12	18	26	35

- Ein Praktikant findet eine quadratische Regressions-Funktion zur Beschreibung der ersten Messergebnisse.
  Berechnen Sie ebenfalls die Gleichung einer quadratischen Regressions-Funktion q, die den Bakterienbestand pro cm³ für die erste Stunde näherungsweise beschreibt.
- Leider muss der Praktikant feststellen, dass nach einer gewissen Zeit die tatsächliche Anzahl der Bakterien von den mit q berechneten Werten abweicht. Er misst die folgenden Werte:

Zeit in Stunden	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Bakterien pro cm^3.	70	97	112	120	125	128	129	130	130

  Als mögliche Ursache überlegt er sich, dass die Bakterien selbst das Wasser weniger durchsichtig machen, wenn ihr Bestand ansteigt.
  Berechnen Sie eine logistische Regressionsfunktion l, die die gesamte Datenreihe von 0 bis 10 Stunden berücksichtigt.
- In dem Bereich bis zu einer Stunde beschreibt die quadratische Funktion das Wachstum besser, in dem Bereich ab einer Stunde liefert die logistische Regressionsfunktion eine bessere Annäherung. Man kann sich die Funktion also als eine abschnittsweise definierte Funktion vorstellen.
  Beschreiben Sie jeweils das Wachstum in den beiden Bereichen ($0 \le t \le 1$ und $1 < t < \infty$) mithilfe der jeweiligen Wachstumsraten in Worten und skizzieren Sie die Graphen der Wachstumsraten in das beigefügte Koordinatensystem der Anlage 1. **(10P)**

Andere Untersuchungen haben ergeben, dass sich die **Wachstumsrate** für phototrophe Bakterien über einen längeren Zeitraum durch die Funktionenschar $f_{a;k}$ mit $f_{a;k}(t) = a \cdot t \cdot e^{-k \cdot t}$, $t \in \mathbb{R}_0^+, k \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+$ allgemein beschreiben lässt.

b)
- Beschreiben Sie die Wirkung der beiden Parameter k und a auf den Verlauf der Graphen.
- Berechnen Sie von einer Funktion der Funktionenschar (in Abhängigkeit von a und k) den Zeitpunkt des stärksten Wachstums und die Wachstumsrate zu diesem Zeitpunkt.
  Begründen Sie, warum a keinen Einfluss auf diesen Zeitpunkt hat. **(15P)**

c) Man kann sagen, dass die Wirkung der Wassertrübung etwa ab der Wendestelle von $f_{a;k}$ stark an Einfluss gewinnt.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes in Abhängigkeit von *a* und *k*. **(10P)**

In den folgenden Aufgabenteilen wird es darum gehen, für die Daten aus dem Aufgabenteil a) eine für den gesamten Beobachtungszeitraum einheitliche Modellierungsfunktion zu finden.
Gehen Sie insbesondere im Folgenden davon aus, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Bestand von 10 Bakterien pro cm^3 vorhanden ist.

d) Zeigen Sie einen Weg, wie Sie mit Ihrem Rechner die zu der Funktionenschar $f_{a;k}$ gehörende Bestandsfunktionenschar $B_{a;k}$ ermitteln können und bestimmen Sie diese. **(10P)**

Die Funktionenschar $F_{a;k}$ mit $F_{a;k}(t) = a \cdot \frac{1-(1+k\cdot t)\cdot e^{-k\cdot t}}{k^2}, t \in \mathbb{R}_0^+, k \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+$ ist eine Stammfunktionenschar von $f_{a;k}$, d. h. $F_{a;k}$ ist jeweils eine Stammfunktion von $f_{a;k}$.

e)
- Begründen Sie, warum die Funktionenschar $F_{a;k}$ nicht die in d) gesuchte Bestandsfunktionenschar ist.
- Zeigen Sie, dass für jedes *a* und jedes *k* die Funktion $F_{a;k}$ für $t \to \infty$ gegen $\frac{a}{k^2}$ geht. **(15P)**

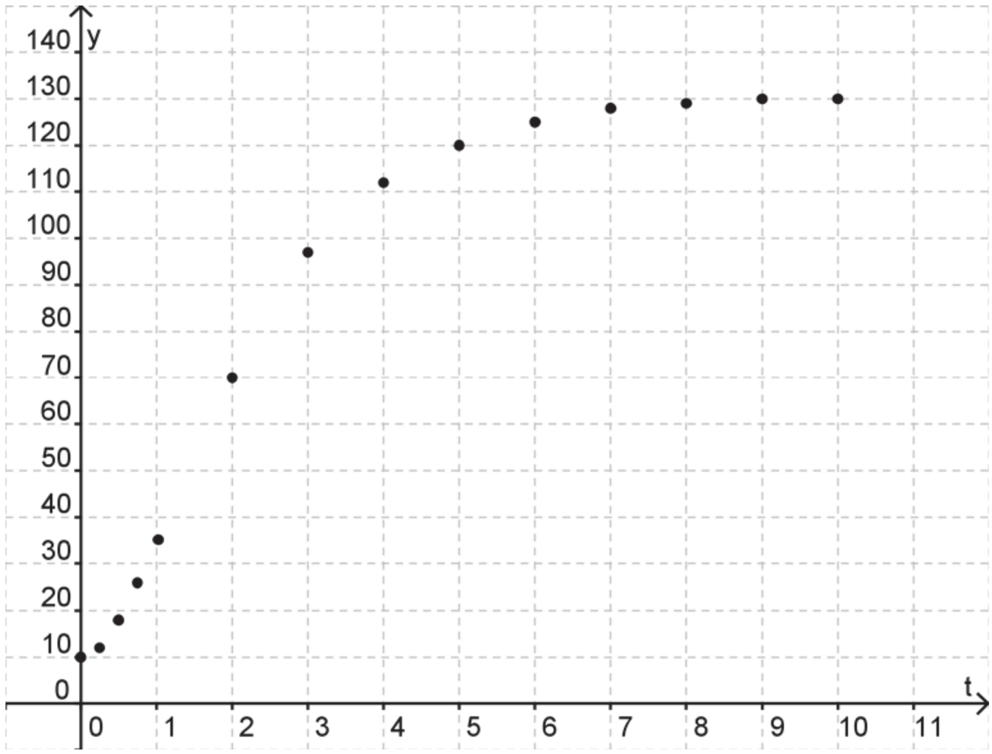
f) Die Daten aus dem Aufgabenteil a) legen den Schluss nahe, dass für dieses spezielle Experiment der Grenzwert 130 Bakterien pro cm^3 beträgt. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass diese Vermutung richtig ist. Für dieses Experiment soll nun die passende Bestandsfunktion $B_{a;k}$ bestimmt werden.

- Leiten Sie den Zusammenhang zwischen *a* und *k* her.
- Zeichnen Sie für $k = 0{,}3$ und für $k = 1{,}5$ die Bestandsfunktionen in das beigefügte Koordinatensystem der Anlage 2.
  Hinweis: Wenn Sie im Aufgabenteil d) keine Lösung erhalten haben, so können Sie auch mit der Funktionenschar $F_{a;k} + 10$ weiterarbeiten.
- Bestimmen Sie mithilfe Ihres Rechners (eventuell auch durch Ausprobieren) diejenige Funktion $B_{a;kbest}$ aus der Bestandsfunktionenschar $B_{a;k}$, die die bei a) gegebenen Daten am besten annähert. Geben Sie *kbest* mit einer Nachkommastelle an.
  Zeichnen Sie $B_{a;kbest}$ ebenfalls in das Koordinatensystem der Anlage 2 ein.
  Hinweis: Wenn Sie für kbest keine Lösung erhalten haben, so können Sie mit kbest = 0,7 weiterrechnen. Das ist allerdings nicht die richtige Lösung.
- Bestimmen Sie außerdem, zu welcher Zeit der Bakterienbestand bei $B_{a;kbest}$ auf 90 % des Endbestandes angestiegen ist. **(20P)**

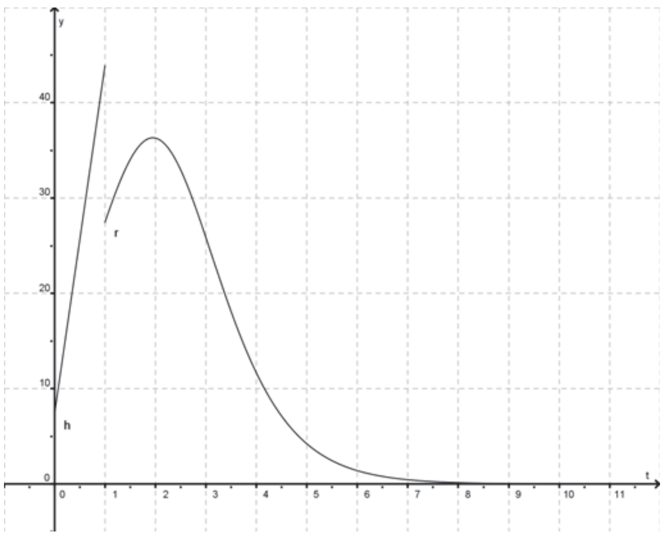
g) Ein Doktorand hat für die Bakterien aus dem Aufgabenteil f) den Einfluss untersucht, den eine Unterbrechung der Lichtzufuhr auf den Bakterienbestand hat. Dabei hat er herausgefunden, dass die Zahl der Bakterien während der Dunkelheit exponentiell entsprechend einer Funktion *g* abnimmt, für die gilt: $g'(t) = -0{,}5 \cdot g(t)$.
Bestimmen Sie den nach 6 Stunden zu erwartenden Bakterienbestand, wenn 3 Stunden nach Versuchsbeginn eine viertelstündige Unterbrechung der Lichtzufuhr erfolgte.
Bestimmen Sie auch den Unterschied zu dem entsprechenden Bestand ohne Verdunklung. **(20P)**

Anlage 1 zur Aufgabe „Wachstum fototropher Bakterien“

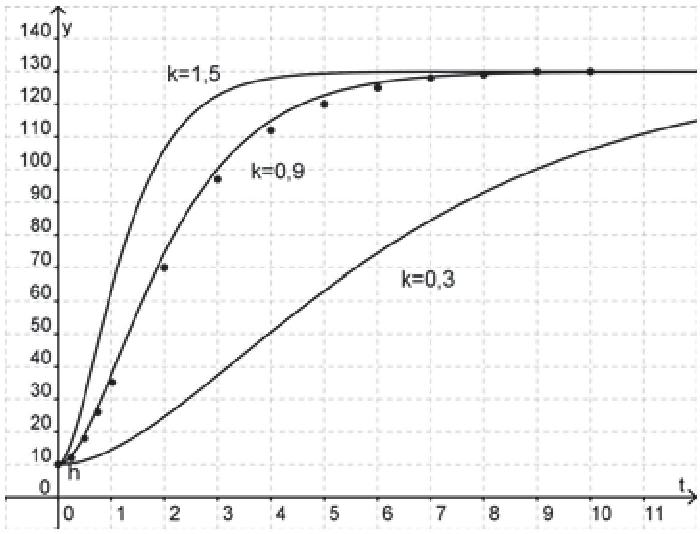
Anlage 2 zur Aufgabe „Wachstum fototropher Bakterien“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Korrekturhinweis: Durch unterschiedliche Technologien können von dieser Lösungsskizze abweichende Darstellungen bei den Schülerlösungen auftreten.			
a)	• Quadratische Regression liefert den Funktionsterm $q(t) \approx 18{,}286 \cdot t^2 + 7{,}314 \cdot t + 9{,}686$. • Die logistische Regression liefert den Funktionsterm $l(t) \approx \dfrac{127{,}491}{1+9{,}225 \cdot e^{-1{,}140 \cdot t}}$, bzw. für Derive erhält man $l(t) \approx \dfrac{126{,}89}{1+9{,}28 \cdot e^{-1{,}1523 \cdot t}}$. • Eine quadratische Wachstumsfunktion hat eine lineare Wachstumsrate. Beim logistischen Wachstum steigt die Wachstumsrate bis $x \approx 2$, hat dort ein Maximum und fällt dann asymptotisch gegen null. 	10		
b)	• a ist ein Faktor, der den Graphen (bei konstantem k) streckt ($a > 1$) oder staucht ($a < 1$). Je größer k ist (bei konstantem a), desto früher erreicht der Graph sein Maximum und desto schneller nähert er sich der t-Achse. • $f'_{a;k}(t) = 0 \Leftrightarrow (a - a \cdot k \cdot t) \cdot e^{-k \cdot t} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{k} \vee a = 0$ $a = 0$ ist nach Definition ausgeschlossen. Da $0 = f_{a,k}(0) = \lim\limits_{t \to \infty} f_{a,k}(t)$, muss es sich bei $t = \dfrac{1}{k}$ um eine Maximalstelle von $f_{a,k} f$ handeln. Dann ist $f_{a,k}\left(\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{a}{k \cdot e}$ die maximale Wachstumsrate. *Hinweis: Andere Begründungen sind denkbar und zulässig.*			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Die Stellen der größten Wachstumsrate sind unabhängig von a, das den Graphen ja nur streckt oder staucht.</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Aus der notwendigen Bedingung ergeben sich Wendestellen, ebenfalls unabhängig von a:
$f''_{a;k}(t)=0 \Leftrightarrow (a\cdot k^2\cdot t-2\cdot a\cdot k)\cdot e^{-k\cdot t}=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{k} \vee a=0$.
a = 0 ist wiederum nach Definition ausgeschlossen.
Da diese Nullstelle zwischen der Maximalstelle und dem asymptotischen Wert 0 liegt, handelt es sich um eine Wendestelle (mit R-L-Krümmungswechsel).
Hinweis: Andere Begründungen sind denkbar und zulässig.
Einsetzen ergibt, dass die Punkte $\left(\frac{2}{k};\frac{2\cdot a}{k\cdot e^2}\right)\approx\left(\frac{2}{k};\frac{0{,}271\cdot a}{k}\right)$ Wendepunkte sind.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Die zur Funktionenschar $f_{a;k}$ gehörende Bestandsfunktionenschar $B_{a;k}$ lässt sich durch Integration ermitteln. Man berechnet $\int_0^t f_{a;k}(x)dx = a\cdot\frac{1-(1+k\cdot t)\cdot e^{-k\cdot t}}{k^2}$.
Dabei ist die Funktionenschar $F_{a;k}$ mit $F_{a;k}(t)=a\frac{1-(1+k\cdot t)\cdot e^{-k\cdot t}}{k^2}$ zwar Stammfunktionenschar von $f_{a;k}$, aber es gilt: $F_{a;k}(0)=0$. Wegen des Anfangsbestandes von 10 Bakterien pro cm³ muss $B_{a;k}(0)=10$ gelten, d. h. der Term der Bestandsfunktionenschar ergibt sich aus $B_{a;k}(t)=a\cdot\frac{1-(1+k\cdot t)\cdot e^{-k\cdot t}}{k^2}+10$.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>• $F_{a;k}(t)=a\cdot\frac{1-(1+k\cdot t)\cdot e^{-k\cdot t}}{k^2}$ ist zwar eine Stammfunktionenschar zu $f_{a;k}$, denn $F'_{a;k}(t)=a\cdot t\cdot e^{-k\cdot t}=f_{a;k}(t)$. Jedoch gilt $F_{a;k}(0)=0$ für alle $F_{a;k}$. Das würde aber bedeuten, dass zu Beginn (t = 0) keine Bakterien vorhanden wären. Zu beheben ist dieses Problem, indem der entsprechende Anfangswert 10 addiert wird, der bei der Ableitung, also bei $f_{a;k}$, entfällt. $B_{a;k}$ ist damit
$B_{a;k}(t)=F_{a;k}(t)+10=a\cdot\frac{1-(1+k\cdot t)\cdot e^{-k\cdot t}}{k^2}+10$.
Hinweis: Dieses entspricht natürlich im Wesentlichen dem letzten Aufgabenteil. Die Funktionenschar $F_{a;k}$ ist aber hinzugefügt worden, damit Schülerinnen und Schüler, die bei der Bestandsfunktion keine Lösung erhalten haben, sinnvoll weiterrechnen können.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	• Die Funktionen $F_{a;k}$ mit $F_{a;k}(t) = a \cdot \frac{1-(1+k\cdot t)\cdot e^{-k\cdot t}}{k^2}$ sind echt monoton wachsend mit einem zunächst starken und allmählich geringer werdenden Anstieg. Sie streben gegen die endlichen Werte $\frac{a}{k^2}$ für jedes a und jedes k, da der Exponentialfaktor im Zähler und damit der zweite Summand im Zähler gegen null geht. *Hinweis: Die Rechner liefern im Allgemeinen keine Ergebnisse, also müssen die Schülerinnen und Schüler sinnvoll begründen.*		15	
f)	• Der Bakterienbestand strebt einem Grenzwert von 130 Bakterien pro cm³ zu, jedoch beträgt der Startwert bereits 10 Bakterien pro cm³, deshalb muss $\frac{a}{k^2} = 120$ sein, also $a = 120 \cdot k^2$. •  • Die eingezeichneten Messwerte aus a) liegen zwischen den Funktionswerten der Graphen von $B_{a;k}$ für k=0,3 und k=1,5. Durch Ausprobieren ist zu finden, dass der Graph zu $B_{a;kbest}$ für *kbet* = 0,8 oder *kbest* = 0,9 innerhalb einer sinnvollen Genauigkeit die beste Annäherung liefert: • 90 % des Endbestandes sind $130 \cdot 0{,}9 = 117$, also ist die Gleichung $B_{a;kbest}(t) = 117$ zu lösen. Für k = 0,9 ergibt sich $f_{97,2;0,9}(t) = 97{,}2 \cdot t \cdot e^{-0{,}9t}$ als Lösung erhält man mithilfe des solve-Befehls $t \approx 4{,}21$. Für k = 0,8 ergibt sich $f_{76,8;0,8}(t) = 76{,}8 \cdot t \cdot e^{-0{,}8t}$ als Lösung erhält man mithilfe des solve-Befehls $t \approx 4{,}74$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Für $k = 0{,}7$ ergibt sich $f_{58,8;0,8}(t) = 58{,}8 \cdot t \cdot e^{-0{,}7t}$ als Lösung erhält man mithilfe des solve-Befehls $t \approx 4{,}21$.	10	10	
g)	*Hinweis: Hier wird die Rechnung exemplarisch für k = 0,8 durchgeführt.* In den ersten 3 Stunden wird der Bakterienbestand durch $B_{76,8;0,8}$ beschrieben; wenn der Wert $B_{76,8;0,8}(3) =$ erreicht ist, beginnt die Verdunklung. Innerhalb der folgenden Viertelstunde modelliert die Funktion $g(x) = B_{76,8;0,8}(3) \cdot e^{-0{,}5\cdot(x-3)}$ mit $3 \le x \le 3{,}25$ den Bestand, der am Ende der Verdunklungszeit auf $g(3{,}25) = B_{76,8;0,8}(3) \cdot e^{-0{,}5\cdot 0{,}25} \approx 82{,}0608$ abgesunken ist. Für den weiteren Verlauf muss geklärt werden, zu welcher Zeit der Bestand diesen Wert ohne Lichtzufuhr gehabt hätte, d.h. die Gleichung $B_{76,8;0,8}(t) \approx 82{,}0608$ ist zu lösen. Einige Rechner liefern nur die Lösung $t \approx -1{,}0311$ und verweisen auf mögliche weitere Lösungen. Eine solche lässt sich z. B. auch graphisch ermitteln, indem die Schnittstelle $t \approx 2{,}53$ zwischen dem Graphen von $B_{76,8;0,8}$ und der Geraden mit $y \approx 82{,}0608$ bestimmt wird. Andere Rechnertypen können über die numerische Lösungsfunktion die Lösung auch direkt bestimmen. Der gesuchte Bestand nach 6 Stunden ist nun der Funktionswert von $B_{76,8;0,8}$ für die Zeit $t \approx 6 - 3{,}25 + 2{,}53 \approx 5{,}28$, also gibt es dann mit $B_{76,8;0,8}(5{,}28) \approx 120{,}82$ etwa 121 Bakterien pro cm³. Ohne die Verdunklung wären es rund 124 Bakterien pro cm³ gewesen, es ergibt sich also ein Unterschied von 3 Bakterien pro cm³. Alternativ ergibt sich für $k = 0{,}7$ sinngemäß wie oben $g(3{,}25) = B_{58,8;0,7}(3) \cdot e^{-0{,}5\cdot 0{,}25} \approx 74{,}5235$ und der gesuchte Bestand nach 6 Stunden ist $B_{58,8;0,7}(5{,}32) \approx 116{,}31$, also etwa 116 Bakterien pro cm³.		5	15
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

LA/AG 1

II.1 Kondensstreifen

Zwei Flugzeuge mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten wechseln ihre Flughöhen. Das eine Flugzeug bereitet den Landeanflug vor, das andere befindet sich noch im Steigflug, um die gewünschte Reisehöhe zu erreichen. Beide Flugzeuge bewegen sich im Beobachtungszeitraum auf gradlinigen Bahnen und wir nehmen an, dass die Geschwindigkeiten jeweils konstant sind. Die Flugbahnen sind durch Kondensstreifen für längere Zeit sichtbar.

Wir betrachten die Erdoberfläche als x_1-x_2-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems. Alle Längen haben die Einheit Kilometer.

Die Flugbahn des Flugzeugs „Alpha" wird durch die Gerade $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 10,5 \end{pmatrix} + \frac{t}{190} \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ -7 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

beschrieben, t ist die Zeit in Sekunden ab Beginn der Beobachtung für $t = 0$.

a) • Bestätigen Sie, dass der Punkt $A(0|2|9,8)$ auf der Flugbahn von Alpha liegt.

• Berechnen Sie die Geschwindigkeit von „Alpha" in der Einheit $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Hinweis: Sie können dazu z. B. den in 1 Sekunde zurückgelegten Weg berechnen.

• Berechnen Sie den Winkel zwischen der Flugbahn von „Alpha" und der Horizontalen. **(15P)**

Der Kontrollraum des Flughafentowers befindet sich im Punkt $(0\,|\,4\,|\,0,03)$.

b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, in dem der Abstand zwischen dem Beobachter im Tower und „Alpha" am geringsten ist. **(10P)**

Zu Beginn der Beobachtung befindet sich das Flugzeug „Beta" im Punkt $B_1(0|0|9,5)$ und hat den

Richtungsvektor $\vec{r_b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass im Beobachtungszeitraum Windstille herrscht und dass sich die Kondensstreifen zylinderförmig um die Flugbahnen ausdehnen.

c) • Untersuchen Sie, ob sich die beiden Flugbahnen schneiden.

• Die Kondensstreifen haben einen Durchmesser von 0,2 km.
Untersuchen Sie, ob die Kondensstreifen der beiden Flugzeuge ineinander übergehen. **(10P)**

d) Auch wenn die Kondensstreifen sich nicht berühren, sieht es für den Betrachter im Kontrollraum des Towers so aus, als ob sich die Streifen kreuzen.
Bestimmen Sie den Winkel, unter dem sich die Kondensstreifen für den Betrachter zu schneiden scheinen. **(15P)**

Bei strahlend blauem Himmel scheint die Sonne. Das Sonnenlicht fällt mit dem Richtungsvektor
$\vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -15 \end{pmatrix}$ ein.

e)
- Bestimmen Sie für $t = 0$ den Ort des Schattens von Flugzeug „Alpha" auf der Erdoberfläche.
- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich der Schatten von „Alpha" auf der Erde bewegt.
- Begründen Sie, dass es einen Unterschied zwischen der Schattengeschwindigkeit und der Geschwindigkeit des Flugzeugs gibt.
- Beurteilen Sie, ob es bei anderem Lichteinfall die Möglichkeit gibt, dass die Geschwindigkeit des Schattens und die Fluggeschwindigkeit gleich sind. **(20P)**

f) Bestimmen Sie den Punkt des einen Kondensstreifens, der durch den anderen beschattet wird.
Hinweis: Gehen Sie in diesem Aufgabenteil davon aus, dass die Kondensstreifen keine Ausdehnung haben. Sie können mathematisch als Geraden angesehen werden. **(15P)**

g) Nach einiger Zeit ist das Flugzeug Alpha sicher gelandet und Beta hat seine Reisehöhe von 10 500 m erreicht. Leider ist das GPS-Gerät defekt. Um die genaue Position bestimmen zu können, werden die Signale dreier Bodenstationen empfangen und zu einer Positionsbestimmung genutzt. Es soll weiterhin davon ausgegangen werden, dass der hier relevante Teil der Erdoberfläche als ein Teil der x_1-x_2-Ebene angesehen werden kann.
Bestimmen Sie die Position von „Beta" in 10 500 m Höhe. **(15P)**

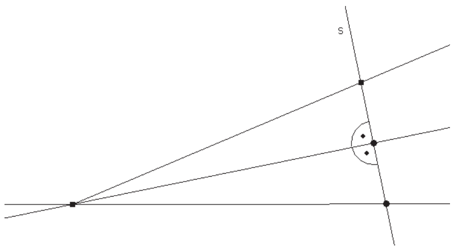
Station	Position	Entfernung
S1	(68|123|0)	26,23
S2	(73|72|0,1)	29,93
S3	(67|91|0,05)	15,94

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Die Gerade ist $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 10{,}5 \end{pmatrix} + \frac{t}{190} \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ -7 \end{pmatrix} = \vec{a} + \frac{t}{190} \cdot \vec{r_a}$. Auflösen der Gleichung, die den Geradenterm und den Punkt enthält $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 10{,}5 \end{pmatrix} + \frac{t}{190} \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ -7 \end{pmatrix}$ nach t liefert mit dem solve-Befehl eine Lösung und zwar $t = 19$. Damit ist nachgewiesen, dass der Punkt auf der Flugbahn von „Alpha“ liegt. • In einer Sekunde wird die Strecke zurückgelegt, die dem 190. Teil des Betrages des Richtungsvektors entspricht. Der Betrag ist $\sqrt{15^2 + 20^2 + 7^2} = \sqrt{674} \approx 25{,}96$, damit wird pro Sekunde eine Strecke von $\frac{1}{190}\sqrt{674} \approx 0{,}1366$ Kilometern zurückgelegt. In einer Stunde sind das etwa 492 km. Die Geschwindigkeit beträgt etwa $492 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. • Der Winkel zwischen dem Normalenvektor der Erdoberfläche $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,und dem Richtungsvektor der Flugbahn erhält man aus $\cos(\alpha) = \frac{\left\vert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ -7 \end{pmatrix} \right\vert}{\left\vert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\vert \cdot \left\vert \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ -7 \end{pmatrix} \right\vert}$. Damit folgt $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{674}} \right) \approx 105{,}6°$. Der Winkel gegenüber der Horizontalen ist dann etwa 15,6° groß. *Hinweis: Einige Rechner haben den Winkel-Befehl, was die Rechnung vereinfacht und die Dokumentation verkürzt.*	15		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
b)	Die Strecke mit dem minimalen Abstand zwischen Tower und „Alpha" liegt in der Ebene, die senkrecht zum Richtungsvektor der Flugbahn steht und den Tower enthält. Aus dem Richtungsvektor der Geraden ergibt sich der Term $-15x+20y-7z$. Setzt man in diesen Term die Koordinaten des Beobachters im Tower ein, erhält man das absolute Glied, es ergibt sich die Koordinatenform: $-15x+20y-7z=79,79$ für die Ebene. Das Einsetzen der Flugbahn führt zur Gleichung: $t\cdot\frac{1}{190}\cdot\left(15^2+20^2+7^2\right)-15\cdot 1,5-7\cdot 10,5=79,79$. Mit dem solve-Befehl erhält man $t\approx 49,6$. Etwa 50 Sekunden nach dem Beginn der Beobachtung hat das Flugzeug „Alpha" den kleinsten Abstand zum Tower.		10	
c)	• Die beiden Flugbahnen werden „gleichgesetzt" und man erhält das Gleichungssystem: $\begin{pmatrix}1,5\\0\\10,5\end{pmatrix}+\frac{t}{190}\cdot\begin{pmatrix}-15\\20\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\9,5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}15\\20\\8\end{pmatrix}$. Dieses liefert keine Lösung, also schneiden sich die Geraden nicht. • Der Abstand zweier windschiefer Geraden (der Flugbahnen) ist zu berechnen. Der Vektor $\vec{r_a}$ ist der Richtungsvektor der Flugbahn von „Alpha". Der Normaleneinheitsvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$, der senkrecht auf beiden Geraden steht, erfüllt die Bedingungen $\left\|\vec{n}\right\|=1\wedge\vec{n}\cdot\vec{r_a}=0\wedge\vec{n}\cdot\vec{r_b}=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}15\cdot n_1+20\cdot n_2+8\cdot n_3=0\\15\cdot n_1-20\cdot n_2+7\cdot n_3=0\\n_1^2+n_2^2+n_3^2=1\end{bmatrix}\Leftarrow\vec{n}\approx\begin{pmatrix}0,4471\\0,0224\\-0,8942\end{pmatrix}$ Der Abstand berechnet sich damit zu: $\left\|\left(\begin{pmatrix}1,5\\0\\10,5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\9,5\end{pmatrix}\right)\cdot\vec{n}\right\|=0,2201>0,2$. Der Abstand der Geraden ist also größer als 200 m und damit überlagern sich die beiden Kondensstreifen mit dem Radius 100 m nicht. *Hinweis: Mit den Rechnern können das Skalar- und das Vektorprodukt auch direkt berechnet werden.*		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	Man bildet die beiden Ebenen, die jeweils den Beobachter und eine Flugbahn enthalten. Der Winkel zwischen diesen Ebenen ist der scheinbare Winkel zwischen den Kondensstreifen. $\overrightarrow{n_a}, \overrightarrow{n_b}$ sind Normalenvektoren dieser Ebenen. Sie erfüllen die Gleichungen: $$\overrightarrow{n_a} \cdot \overrightarrow{r_a} = 0 \wedge \overrightarrow{n_a} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 10{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0{,}03 \end{pmatrix} \right) = 0; \overrightarrow{n_b} \cdot \overrightarrow{r_b} = 0 \wedge \overrightarrow{n_b} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0{,}03 \end{pmatrix} \right).$$ Daraus ergeben sich die linearen Gleichungssysteme $$\begin{bmatrix} 15n_{a1} - 20n_{a2} + 7n_{a3} = 0 \\ 1{,}5n_{a1} - 4n_{a2} + 10{,}47n_{a3} = 0 \\ {n_{a1}}^2 + {n_{a2}}^2 + {n_{a3}}^2 = 1 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} 15n_{b1} + 20n_{b2} + 8n_{b3} = 0 \\ -4n_{b2} + 9{,}47n_{b3} = 0 \\ {n_{b1}}^2 + {n_{b2}}^2 + {n_{b3}}^2 = 1 \end{bmatrix} \text{ mit den Lösungen:}$$ $$\overrightarrow{n_a} \approx \begin{pmatrix} 0{,}7715 \\ 0{,}6233 \\ 0{,}1276 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{n_b} \approx \begin{pmatrix} 0{,}8206 \\ -0{,}5264 \\ -0{,}2224 \end{pmatrix}.$$ Der Winkel ist dann $\measuredangle(\overrightarrow{n_a}, \overrightarrow{n_b}) = 73{,}94°$. Dieses erhält man z.B. mit dem Winkel-Befehl der CAS-Rechner.			15
e)	Der Schatten des Startpunktes von „Alpha“ und der des Punktes A werden berechnet. Der Abstand dieser Schattenpunkte geteilt durch die Flugzeit von 19 Sekunden ergibt die Bewegungsgeschwindigkeit des Schattens. Die Berechnung der Schattenpunkte: $$\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 10{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 3{,}6 \wedge y = 1{,}4 \wedge r = 0{,}7$$ $$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9{,}8 \end{pmatrix} + r \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \frac{49}{25} \wedge y = \frac{248}{75} \wedge r = \frac{49}{75}$$ Die Schattenpunkte sind $\begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 1{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{75}\begin{pmatrix} 147 \\ 248 \\ 0 \end{pmatrix}$, der Abstand der Punkte ist $\sqrt{\left(3{,}6 - \frac{49}{25}\right)^2 + \left(1{,}4 - \frac{248}{75}\right)^2} \approx 2{,}51$. Die Schattengeschwindigkeit ist damit $v = \frac{s}{t} = \frac{2{,}51\text{ km}}{19\text{ s}} \approx 476\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Die Flugbahn und die Schattengerade stehen in unterschiedlichem Winkel zu den Sonnenstrahlen. Damit führt die Parallelprojektion der Strecke zwischen dem Startpunkt und A zu einer Schattenstrecke abweichender Länge.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Steht die Winkelhalbierende zwischen Flugbahngerade und Schattengerade senkrecht zu den Sonnenstrahlen und ist damit der Winkel zwischen der Flugbahngerade und den Sonnenstrahlen genauso groß wie der Winkel zwischen der Schattengerade und den Sonnenstrahlen, so sind beide Strecken gleich groß und es stimmt die Schattengeschwindigkeit mit der Fluggeschwindigkeit überein. *Hinweis: Die beiden Geraden haben einen Punkt gemeinsam, nämlich den Schnittpunkt der Flugbahngeraden mit der Erdoberfläche. Damit erhält man zwei kongruente Dreiecke.*  		15	5
f)	Die Ebene, die durch die Fluggerade von „Alpha“ und die Richtung der Sonnenstrahlen aufgespannt wird, bringt man mit der Flugbahn von „Beta“ zum Schnitt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,5 \end{pmatrix} + x \cdot \vec{r_b} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 10,5 \end{pmatrix} + y \cdot \vec{r_a} + z \cdot \vec{s} \Leftrightarrow x = \frac{173}{3310} \wedge y = \frac{84}{1655} \wedge z = \frac{5}{331}$. Da der Parameter z positiv ist, weiß man, dass man von der Fluggerade von „Alpha“ ausgehend in Richtung der Sonnenstrahlen zur Fluggerade von „Beta“ gelangt. Einsetzen der Parameter liefert den Schattenpunkt $\left(\frac{519}{662} \middle\vert \frac{346}{331} \middle\vert \frac{32829}{3310} \right) \approx (0,78 \vert 1,05 \vert 9,92)$ auf der Fluggeraden von „Beta“. *Grundsätzlich ist auch der umgekehrte Ansatz möglich, führt dann zu einem negativen Parameter. Dieser muss entsprechend interpretiert werden.*		15	
g)	Es sind drei Kugelgleichungen aufzustellen: $(x-68)^2 + (y-123)^2 + (z-0)^2 = 26,23^2 \qquad (K1)$ $(x-73)^2 + (y-72)^2 + (z-0,1)^2 = 29,93^2 \qquad (K2)$ $(x-67)^2 + (y-91)^2 + (z-0,05)^2 = 15,94^2 \qquad (K3)$ Die Ebenen, die die Schnittkreise enthalten, sind dann: $(K1-K2) \qquad 10x - 102y + 0,2z = -9447,782$ $(K1-K3) \qquad -2x - 64y + 0,1z = -6549,0682$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Das Gleichungssystem $\{K1 - K2 \wedge K1 - K3 \wedge z = 10{,}5\}$ hat die Koordinatenwerte als Lösung, dies ergibt die Position (75,02|100,00|10,5) für „Beta“.	5	10	
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

LA/AG 2

II.2 Bachforellen

Die **Bachforelle** (*Salmo trutta fario*) ist ein zu den Salmoniden zählender Raubfisch. Sie wird auch Flussforelle, Bergforelle oder Fario genannt.

In Hunt Creek, Michigan, USA wurde in einem See die Entwicklung von Bachforellen untersucht und dokumentiert.

Im Folgenden wird eine Population (Fische und Eier) von Bachforellen betrachtet. Diese wird in vier Altersklassen eingeteilt:
Die Altersstufen werden mit A (Ei/Jungfisch; bis zum Ende des 1. Lebensjahres), B (Beginn bis Ende des 2. Lebensjahres), C (Beginn bis Ende des 3. Lebensjahres) und D (Beginn bis Ende des 4. Lebensjahres) bezeichnet.

Eine Population von Bachforellen wird durch den Bestandsvektor $\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{pmatrix}$ der Anzahlen zum Zeitpunkt n beschrieben.

Die jährliche Entwicklung der Bachforellenpopulation wird durch die Übergangsmatrix L beschrieben. Die Übergangsraten von einer zur nächsten Altersstufe sind durchschnittliche Werte und enthalten bereits, dass nur weibliche Bachforellen Eier legen.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 37 & 64 \\ 0{,}06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}18 & 0 \end{pmatrix}$$

In einem Jahr ist der folgende Bestandsvektor ermittelt worden: $\overrightarrow{P_0} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$

a) • Erstellen Sie einen Übergangsgraphen für die Matrix L.

• Interpretieren Sie die Zahlen in der 1. und 4. Zeile der Matrix L.
Interpretieren Sie die Zahlen in der 2. Zeile von L^2.

• Ermitteln Sie den Anteil der Eier, die sich im Laufe der Zeit zu Tieren der Klasse D entwickeln.

• Berechnen Sie die Bestandsvektoren, welche sich nach diesem Modell ein, fünf und zehn Jahre nach der Zählung ergeben. **(25P)**

b) Die Übergangsmatrix ist das Ergebnis längerer Beobachtungen einer Population an einem Standort.

Zeigen Sie, dass der Startbestandsvektor $\overrightarrow{P_0}$ nicht im Rahmen dieses Modells zustande gekommen sein kann.
Beschreiben Sie dafür eine mögliche Ursache. **(10P)**

c) In der folgenden Tabelle ist die Gesamtanzahl der Tiere, die nach diesem Modell (mit dem Startbestandsvektor $\overrightarrow{P_0}$) in den nächsten 100 Jahren vorkommen, eingetragen.

Jahre	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Anzahl	1150		1969	1816		1676	1625	1576	1527	1479	1433

- Berechnen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle.
  Stellen Sie den Verlauf der Entwicklung graphisch dar. Benutzen Sie dafür das Koordinatensystem in der Anlage.
  Beschreiben Sie, wie sich die Population, entsprechend der Grafik, entwickeln wird.
- Bestimmen Sie einen Term mit Matrizen und Vektoren, der den Gesamtbestand nach 100 Jahren direkt berechnet.
- Bestimmen Sie den jährlichen Wachstumsfaktor bezogen auf den Gesamtbestand, zu Beginn der Beobachtung, d. h. vom 0. zum 1. Jahr, vom 10. zum 11. Jahr und vom 20. zum 21. Jahr.
- Der Bestand im 90. Jahr besteht aus 1479 Exemplaren und im 100. Jahr aus 1433 Exemplaren. Ermitteln Sie daraus einen durchschnittlichen jährlichen Wachstumsfaktor für den entsprechenden Zeitraum. **(20P)**

d)
- Geben Sie die Gleichung an, mit der Eigenwerte und Eigenvektoren definiert werden. Beschreiben Sie die Bedeutung des betragsmäßig maximalen Eigenwertes *m* im Sachzusammenhang.
- Berechnen Sie den betragsmäßig größten reellen Eigenwert.
  Hinweis: Dies ist hier zugleich der insgesamt betragsmäßig größte Eigenwert.
  Weisen Sie nach, dass mit diesem Betrag des Eigenwertes und dem Gesamtbestand von 1676 Exemplaren im 50. Jahr der Bestand im 100. Jahr näherungsweise berechnet werden kann. **(15P)**

Durch verschiedene Einflüsse ändert sich das Wachstumsverhalten der Population.
Das Wachstum wird jetzt durch die folgende Übergangsmatrix L_2 beschrieben.

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 37 & 64 \\ 0{,}08 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}18 & 0 \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie die Matrix L_2 für die nächsten drei Aufgabenteile.

e) Beschreiben Sie mögliche Ursachen, die für die Änderungen in der Übergangsmatrix verantwortlich sein könnten. **(5P)**

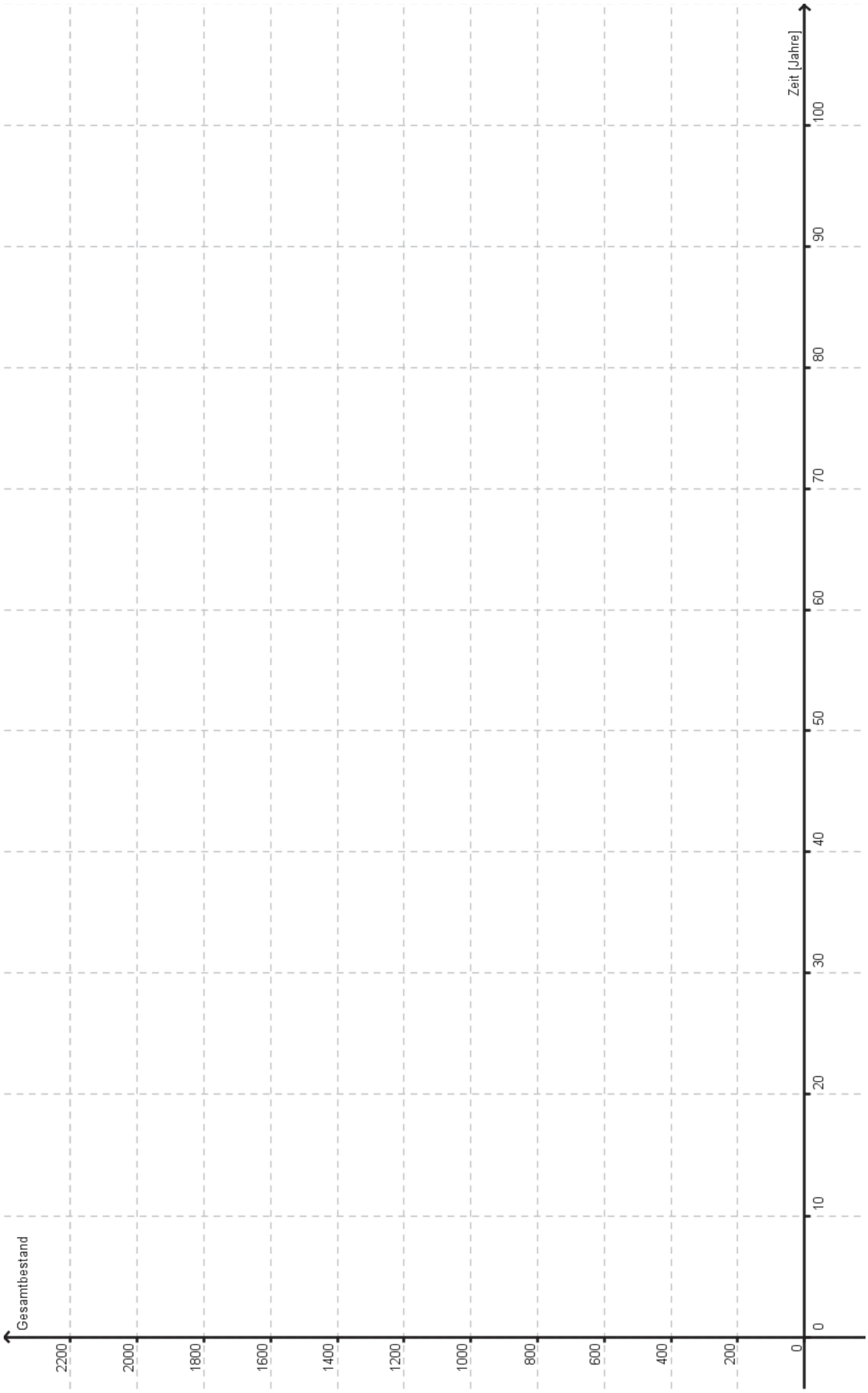
Ein Bestandsvektor $\vec{B}$ heißt „reproduzierbar“, wenn nach einem Zeittakt die gleiche Anzahl an Individuen in jeder Altersklasse vorhanden ist, d.h. wenn $L_2 \cdot \vec{B} = \vec{B}$ gilt.

f) Bestätigen Sie, dass es unter den durch die Matrix L_2 beschriebenen Bedingungen keinen Bestandsvektor geben kann, der reproduzierbar ist. **(10P)**

Die eingetretenen Veränderungen führen zu einem wachsenden Fischbestand, sodass eine Befischung möglich und sinnvoll ist. Vereinfachend wird angenommen, dass am Ende des Zeittaktes abgefischt wird, d. h. nur Tiere der Altersklassen *B* oder C werden abgefischt, denn die Tiere der Altersklasse *A* sind zu klein und die Tiere der Altersklasse *D* sind zum Zeitpunkt des Fischens tot.

g) Beurteilen Sie, ob es möglich ist, durch Abfischen eines Anteils von Fischen einer einzigen Altersstufe (*B* oder *C*), einen reproduzierbaren Bestandsvektor zu erhalten.
Ermitteln Sie gegebenenfalls einen reproduzierbaren Bestandsvektor mit insgesamt 10 000 Eiern und Fischen und geben Sie den Anteil der abzufischenden Tiere in der entsprechenden Altersstufe an. **(15P)**

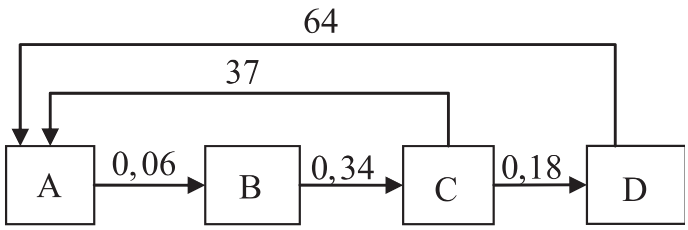
Anlage zur Aufgabe „Bachforellen“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

a)

- 

- 1. Zeile (Geburtenrate):
  Ein 3-jähriger Fisch legt 37 Eier, ein 4-jähriger Fisch legt 64 Eier, die Fische der Alterstufe A und B legen keine Eier.
  4. Zeile (Überlebensrate):
  18 % der 3-jährigen Fische überleben und werden 4-jährige Fische.
  Aus den Altersklassen A und B kommen keine Fische in die Altersklasse D.

  $$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 12{,}58 & 11{,}52 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}22 & 3{,}84 \\ 0{,}0204 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0612 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Jeder Fisch der Altersgruppe C hat nach 2 Jahren durchschnittlich 2,22 Nachkommen in der Altersgruppe B.
  Jeder Fisch der Altersgruppe D hat nach 2 Jahren durchschnittlich 3,84 Nachkommen in der Altersgruppe B.
  Kein Fisch der Altersgruppen A und B befindet sich nach zwei Jahren in der Altersgruppe B.

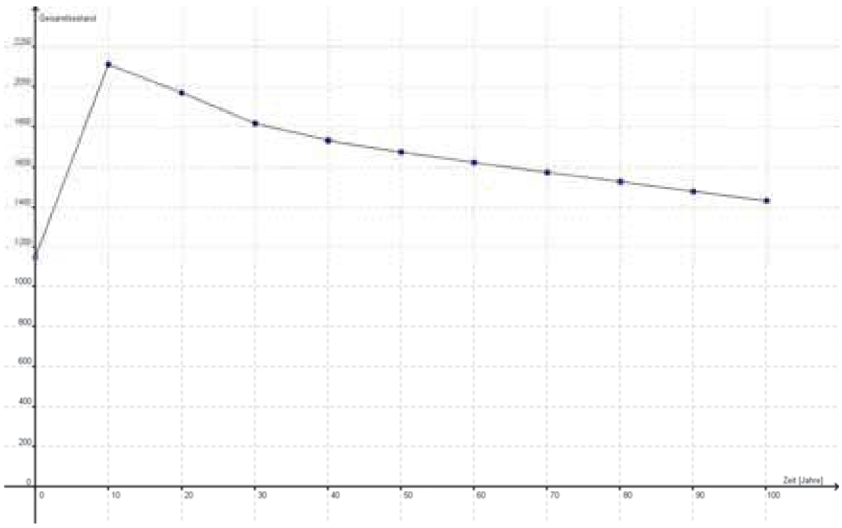
- Der Anteil der Eier, welche zu Tieren der Klasse D werden, berechnet sich aus $0{,}06 \cdot 0{,}34 \cdot 0{,}18 = 0{,}003672$.
  Etwas weniger als 0,4 % der Eier „überleben".

- Nach einem Jahr: $L \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3200 \\ 60 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Nach 5 Jahren: $L^5 \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1701{,}6 \\ 159{,}02 \\ 23{,}39 \\ 4{,}62 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1701 \\ 159 \\ 23 \\ 4 \end{pmatrix}$

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	und nach 10 Jahren: $L^{10} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1986{,}19 \\ 76{,}57 \\ 38{,}91 \\ 8{,}34 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1986 \\ 76 \\ 38 \\ 8 \end{pmatrix}$	15	5	5
b)	Z.B. liefert der Startvektor $\overrightarrow{P_0} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$ im ersten Jahr vor Beginn der Beobachtung -145 Fische der Kategorie *D*. $L^{-1} \cdot \overrightarrow{P_0} = \begin{pmatrix} 1667 \\ 0 \\ 278 \\ -145 \end{pmatrix}$. Negative Bestände sind jedoch nicht möglich, sodass ein massiver Eingriff (Seuche, Abfischung,…) in die Population stattgefunden haben muss.		10	
c)	• (see table and chart below)			

Jahre	Anzahl
10	2110
40	1732

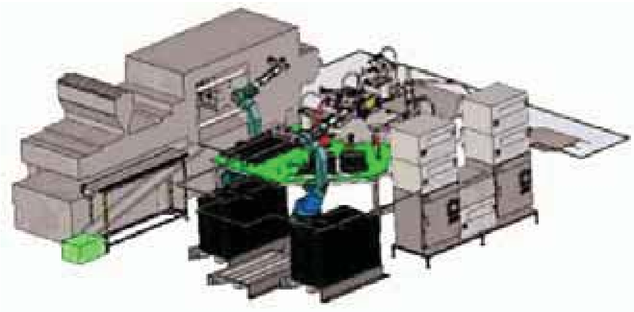


	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Langfristig scheint die Gesamtpopulation abzunehmen. Es ist aus der Grafik nicht ersichtlich, ob sich der Gesamtbestand bei einem Wert größer null einpendeln wird oder ob die Population aussterben wird. • Der Gesamtbestand nach n Jahren kann beispielsweise durch Berechnung von $\vec{e}\cdot L^n \cdot \overrightarrow{P_0}$, mit $\vec{e}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ ermittelt werden. • Zu Beginn ist der Wachstumsfaktor $k_0=\frac{3294}{1150}\approx 2{,}86$, nach 10 Jahren $k_{10}=\frac{2125{,}21}{2110}\approx 1{,}007$, nach 20 Jahren $k_{20}=\frac{1813{,}54}{1968{,}57}\approx 0{,}921$. • $k_{90-100}=\left(\frac{1433}{1479}\right)^{\frac{1}{10}}\approx 0{,}9968$ ist der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor in den letzten 10 Jahren.	5	15	
d)	• λ ist Eigenwert von L, genau dann wenn $L\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}$ ist. $\vec{x}$ wird Eigenvektor von L zum Eigenwert λ genannt. Ist der größte Betrag der Eigenwerte gleich 1, dann konvergiert die Population, bei Werten größer als 1 expandiert die Population, bei Werten zwischen 0 und 1 stirbt die Population aus. • Die Beträge der Eigenwerte von L erhält man mit den entsprechenden Funktionen der Rechner: $\lvert\lambda_1\rvert=0{,}996841,\ \lvert\lambda_2\rvert=0{,}885678, \lvert\lambda_3\rvert=0{,}885678, \lvert\lambda_4\rvert=0{,}300542$. λ_1 ist also der Eigenwert mit dem größten Betrag. Es gilt $B(50)\cdot\lvert\lambda_1\rvert^{50}\approx 1676\cdot 0{,}996841^{50}\approx 1430{,}78$. Das sind also etwa 1433 Fische, wie in der Tabelle angegeben sind.	5	10	
e)	8 % statt 6% der Jungfische/Eier werden zu 2-jährigen Fischen und 36% statt der ursprünglich 34% der 2-jährigen werden zu 3-jährigen Fischen. Die Geburtenraten bleiben unverändert. Das kann an verbesserten Lebens-/Umweltbedingungen liegen. Der Rückgang von natürlichen Feinden könnte eine Ursache sein. Weitere mögliche Ursachen sind denkbar.		5	
f)	Die Gleichung $L_2\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ hat nur die triviale Lösung $a=b=c=d=0$. Deshalb gibt es keine reproduzierbare Startpopulation.		10	

	Lösungsskizze	I	II	III
g)	Die Befischung wird durch einen Befischungsfaktor t in den Übergangsraten von den Altersklassen B oder C zur jeweils folgenden dargestellt. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 37 & 64 \\ 0{,}08 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}36\cdot t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}18 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ 10000-w-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ 10000-w-x-y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $w = 9055{,}3 \wedge x = 724{,}4 \wedge y = 186{,}6 \wedge t = 0{,}7156$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 37 & 64 \\ 0{,}08 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}18\cdot t & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ 10000-w-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ 10000-w-x-y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $w = 9027{,}1 \wedge x = 722{,}2 \wedge y = 259{,}98 \wedge t = -0{,}1977$. Das zweite Gleichungssystem liefert einen negativen Wert für t. Es kann deshalb kein reproduzierbarer Bestandsvektor ermittelt werden. Das erste Gleichungssystem hat eine Lösung für $t \approx 71{,}6\%$. Der reproduzierbare Bestandsvektor ist also $\vec{p} = \begin{pmatrix} 9055{,}3 \\ 724{,}4 \\ 186{,}6 \\ 33{,}6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 9055 \\ 724 \\ 186 \\ 33 \end{pmatrix}$, wenn am Ende der Altersklasse B $(1-t) = 28{,}4\%$ der Fische aus der Klasse B abgefischt werden. Eine Abfischung nur der Altersklasse C ist für das Erreichen einer stabilen Population nicht möglich.			15
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

STOCHASTIK 1

III. 1 Qualitätssicherung



Eine Firma fertigt elektronische Bauteile als Massenware. Von den Bauteilen sind durchschnittlich 14 % defekt. (Die Defekte entstehen stochastisch unabhängig voneinander.)

a) Der laufenden Produktion werden 6 Bauteile entnommen.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Bauteil defekt ist.
- Berechnen Sie, wie viele Bauteile man der laufenden Produktion entnehmen muss, damit die Wahrscheinlichkeit, auf mindestens ein defektes Bauteil zu stoßen, größer als 99 % ist. **(15P)**

b) Ein defektes Bauteil wird von einem firmeneigenen Prüfgerät mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % als defekt erkannt. Das Prüfgerät zeigt allerdings auch einwandfreie Bauteile fälschlicherweise mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % als defekt an.

- Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der das Prüfgerät eine richtige Entscheidung trifft, größer als 97 % ist.
- Berechnen Sie auch die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil tatsächlich defekt ist, wenn das Prüfgerät einen Defekt anzeigt. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Die Wahrscheinlichkeit von $x = 98\%$, dass einwandfreie Bauteile nicht versehentlich als defekt erkannt werden, soll nun variiert werden.
Dazu wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil tatsächlich defekt ist, wenn das Prüfgerät einen Defekt anzeigt, als Funktion von x dargestellt werden.

- Bestimmen Sie den entsprechenden Funktionsterm und zeichnen Sie den Graphen in das Koordinatensystem der Anlage ein.
  Ermitteln Sie den Wert von x, für den gilt $f(x) = 95\%$. **(25P)**

c) Die Firma denkt über die Anschaffung eines neuen, verbesserten Prüfgerätes nach, das mit Sicherheit korrekte Entscheidungen anzeigt.
Die Firma möchte, dass sich die Mehrkosten für das neue Prüfverfahren in Grenzen halten.
Deshalb beschließt sie, das Prüfverfahren wie folgt zu ändern:
Zehn Bauteile werden hintereinandergeschaltet und gleichzeitig in einem Durchgang geprüft. Nur dann, wenn bei dieser Gruppenuntersuchung eine Defektanzeige erfolgt (mindestens ein Bauteil ist dann defekt), wird zusätzlich jedes Bauteil einer Einzelprüfung unterzogen.

- Begründen Sie, dass nach diesem Verfahren entweder genau 1 Prüfung oder genau 11 Prüfungen erforderlich sind.
- Ermitteln Sie, wie viele Prüfungen im Durchschnitt für die Überprüfung von 10 Bauteilen bei diesem Verfahren zu erwarten sind.
  Zur Kontrolle: $E = 8{,}7870$. **(10 P)**

d) Die Kostenprüfer sind enttäuscht. Sie argumentieren, dass das neue Verfahren lediglich eine Einsparung von etwa 12 % gegenüber dem ursprünglichen Verfahren mit den einzelnen Prüfungen bedeutet.

- Bestimmen Sie die Erwartungswerte $R(n)$ der relativen Einsparungen auch für Hintereinanderschaltungen von $n=7$ und $n=13$ Bauteilen.
- Weisen Sie für eine allgemeine Anzahl *n* von hintereinander geschalteten Bauteilen die Gültigkeit der Formel $R(n)=\frac{n\cdot 0{,}86^n-1}{n}=0{,}86^n-\frac{1}{n}$ $(n\neq 1)$ für die relative Einsparung $R(n)$ nach, begründen Sie die Einschränkung $n\neq 1$.
- Bestimmen Sie die Werte von *n*, für die das Verfahren überhaupt sinnvoll ist.
- Bestimmen Sie die optimale Anzahl *n*. **(25P)**

e) Die sorgfältig geprüften Bauteile sollten natürlich auch fehlerfrei bei den Kunden der Firma ankommen. Eventuelle Schäden während des Versands können jedoch nicht ganz ausgeschlossen werden. Laut Angaben der beauftragten Versandfirma beträgt jedoch die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil beim Versand beschädigt wird, nur 0,3%.

Die Anzahl der beschädigten Bauteile soll als binomialverteilt angesehen werden.

Falls bei einer Lieferung von 1000 Bauteilen mehr als 7 Bauteile durch den Versand Schäden erleiden, muss die Versandfirma eine hohe Entschädigungssumme von 10000 € zahlen.
Für eine Kalkulation des finanziellen Risikos ist die Antwort auf die folgende Aufgabe natürlich von großem Interesse:
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Entschädigungsfalles.
*Zur Kontrolle: der Wert beträgt gerundet: P ≈ 0,0118***.** **(5P)**

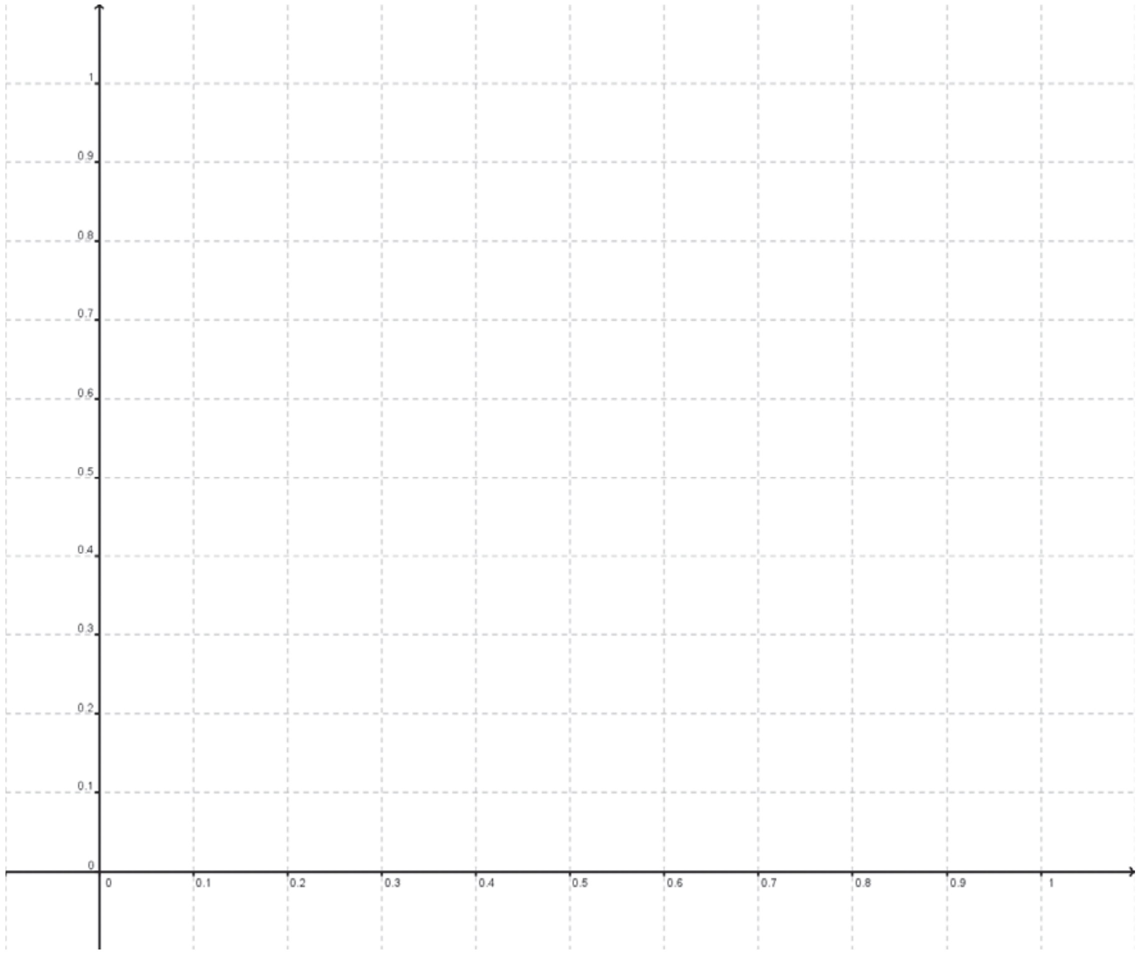
f) Das Versandunternehmen setzt 1040 Lieferungen mit je 1000 Bauteilen pro Jahr an.
Ermitteln Sie die Höhe der durchschnittlichen Entschädigungszahlungen im Jahr. **(10P)**

g) Die Abnehmerfirma denkt über die Nachteile des Modells „7+“ (pauschale Entschädigungszahlungen erst bei mehr als 7 defekten Bauteilen pro Lieferung) nach.

Begründen Sie, warum Modell „7+“ für die Abnehmerfirma tatsächlich Nachteile im Vergleich zu einem Entschädigungsverfahren aufweisen kann, das Entschädigungszahlungen für jedes einzelne defekte Bauteil vorsieht.

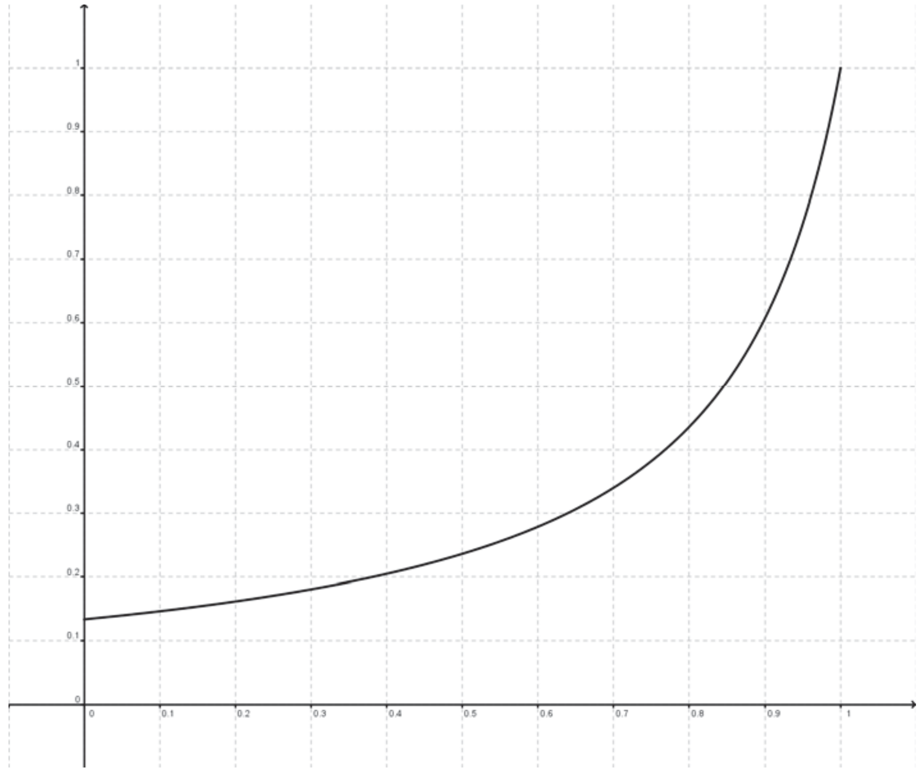
Ermitteln Sie den Entschädigungswert pro Bauteil so, dass der Erwartungswert der Zahlungen in einem Jahr dem in (f) ermittelten Erwartungswert des Modells 7+ entspricht. **(10P)**

Anlage zur Aufgabe „Qualitätssicherung“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Es handelt sich um eine Binomialverteilung (ein Bauteil ist entweder defekt oder nicht defekt). Mit $p = 0{,}14$ und $q = 1 - p = 0{,}86$ ergibt sich nach der Formel von Bernoulli $P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$ $= \binom{6}{0} \cdot 0{,}14^0 \cdot 0{,}86^6 + \binom{6}{1} \cdot 0{,}14^1 \cdot 0{,}86^5 \approx 0{,}7997 \approx 80\,\%$. • Wenn n der Umfang der Stichprobe ist, so gilt $P(X \ge 1) > 0{,}99$. $\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) > 0{,}99$ $\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}14^0 \cdot 0{,}86^n > 0{,}99$ $\Leftrightarrow 1 - 0{,}86^n > 0{,}99$ Mithilfe des solve-Befehls erhält man $n > 30{,}5336$. *Auch Lösungen mithilfe einer Wertetabelle sind möglich.* Man muss mindestens 31 Bauteile entnehmen.	15		
b)	• Es bedeutet A: ein Bauteil ist defekt. Es bedeutet B: das Prüfgerät zeigt einen Defekt an. Die Situation kann in einem Baumdiagramm veranschaulicht werden: $P(\text{"Richtige Entscheidung"}) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B} \mid \overline{A})$ $= 0{,}14 \cdot 0{,}95 + 0{,}86 \cdot 0{,}98$ $\approx 0{,}9758$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also größer als 97 %. (q.e.d.). • Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$. Nach dem Satz von Bayes gilt: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})}$ $= \dfrac{0{,}14 \cdot 0{,}95}{0{,}14 \cdot 0{,}95 + 0{,}86 \cdot 0{,}02} \approx 0{,}8855$. Das Ergebnis ist nur begrenzt zufriedenstellend, da bei über 11 % der Fälle, in denen das Gerät ein defektes Gerät anzeigt, dies ein „Fehlalarm“ ist.			

	Lösungsskizze	I	II	III
	• Es gilt $p(x) = \dfrac{0{,}14 \cdot 0{,}95}{0{,}14 \cdot 0{,}95 + 0{,}86 \cdot (1-x)}$.  Mithilfe des solve-Befehls erhält man aus $p(x) = 0{,}95$, dass $x \approx 0{,}992$.	10	15	
c)	• U sei die Zufallsvariable, die die Anzahl der notwendigen Untersuchungen beschreibt. Wenn die Gruppenuntersuchung von 10 Bauteilen keinen Defekt anzeigt, sind diese Bauteile alle in Ordnung, und es bleibt bei dieser einen Untersuchung. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit beträgt $P(U=1) = 0{,}86^{10}$. Wenn bei der Gruppenuntersuchung eine Defektanzeige erfolgt, ist jedes Bauteil zu prüfen. In diesem Fall finden 11 Prüfungen statt. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit beträgt dann $P(U=11) = 1 - 0{,}86^{10}$. • Für den Erwartungswert ergibt sich für $n = 10$: $E(10) = 1 \cdot 0{,}86^{10} + 11 \cdot \left(1 - 0{,}86^{10}\right) = 11 - 10 \cdot 0{,}86^{10} = 8{,}7870$.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

d)

- Für die Erwartungswerte der Anzahl der erforderlichen Prüfungen ergeben sich folgende Werte:

  $n=7$: $\quad E(7)=1\cdot 0{,}86^7+8\cdot\left(1-0{,}86^7\right)=8-7\cdot 0{,}86^7=5{,}56$

  $n=13$: $\quad E(13)=1\cdot 0{,}86^{13}+14\cdot\left(1-0{,}86^{13}\right)=14-13\cdot 0{,}8613^{13}=12{,}13$.

  Daraus ergeben sich die zu erwartenden relativen Einsparungen $R(n)$ pro Gerät:

  $n=7$: $\quad R(7)=\dfrac{7-8+7\cdot 0{,}86^7}{7}=\dfrac{7\cdot 0{,}86^7-1}{7}=0{,}2051=20{,}51\%$.

  $n=13$:

  $$R(13)=\frac{13-14+13\cdot 0{,}8613^{13}}{13}=\frac{13\cdot 0{,}8613^{13}-1}{13}=0{,}0638=6{,}38\%.$$

- Für ein allgemeines n gilt für die zu erwartende Anzahl der Prüfungen $E(n)$:

  $$\begin{aligned}E(n)&=0{,}86^n+(n+1)\cdot\left(1-0{,}86^n\right)\\&=0{,}86^n+n+1-(n+1)\cdot 0{,}86^n\\&=n+1-n\cdot 0{,}86^n.\end{aligned}$$

  Somit ergibt sich:

  $$R(n)=\frac{n-E(n)}{n}=\frac{n-\left(n+1-n\cdot 0{,}86^n\right)}{n}=\frac{-1+n\cdot 0{,}86^n}{n}=0{,}86^n-\frac{1}{n}.$$

  Für $n=1$ liegt ein Sonderfall vor:

  Der Fall einer zusätzlichen Einzelprüfung kommt nicht vor.

  <u>Bemerkung:</u> Nähert sich n dem Wert 1, müssen die Einsparungen gegen null gehen.

- Das Verfahren ist nur sinnvoll, wenn *R(n)* positiv ist. Fasst man R als Funktion einer reellen Variablen auf, so liegt rechts von 1 die einzige Nullstelle bei ungefähr n = 19,8. Also ist das Verfahre nur sinnvoll für alle natürlichen Zahlen n von 2 bis 19. Fasst man R wieder als Funktion einer reellen Variablen auf, so liegt rechts von 1 ein einziges Maximum bei $n \approx$ 3,3. Es kommen also nur die Werte n = 3 oder n = 4 infrage. Eine Überprüfung durch Einsetzen liefert das Ergebnis.

  Man kann aber natürlich auch ohne Analysis einfach die Wertetabelle von R (mit gerundeten Werten) für alle natürlichen Zahlen n von 2 bis 19 betrachten:

  $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \ldots \\ 0.24 & 0.303 & 0.297 & 0.27 & 0.238 & 0.205 & 0.174 & 0.146 & 0.121 & \ldots \end{bmatrix}$$

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Man erkennt, dass das Maximum bei $n = 3$ liegt und dort eine Ersparung von etwa 30 % bringt.		10	15
e)	Für $n = 1000$, $p = 0{,}003$ und $k = 7$ muss die Gegenwahrscheinlichkeit zur entsprechende akkumulierten Binomialverteilung berechnet werden: Man erhält Den Wert $P \approx 1 - 0{,}0882 = 0{,}0118$.		5	
f)	Mit den Parametern $n = 1040$, $p = 0{,}0118$ und 10000 € Entschädigung pro Lieferung ergibt sich folgender Erwartungswert: $E = 1040 \cdot 0{,}0118 \cdot 10000\text{ €} = 122720\text{ €}$.		10	
g)	Das Entschädigungsmodell „7+“ weist gegenüber dem Einzel-Entschädigungsverfahren folgende Nachteile auf: 1. Für weniger als 8 beschädigte Bauteile gibt es gar keine Entschädigung. 2. Von einer bestimmten Anzahl beschädigter Bauteile an wird die Pauschalzahlung geringer ausfallen als die Summe möglicher einzelner Entschädigungen. Sei E_1 die erwartete Entschädigungszahlung pro Lieferung. Dann gilt: $E_1 = 0{,}0118 \cdot 10000\text{ €} = 118\text{ €}$. Pro Lieferung werden andererseits $n_1 = 1000 \cdot 0{,}003 = 3$ beschädigte Bauteile erwartet. Daraus ergibt sich eine Entschädigung von $\frac{118}{3}\text{ €} \approx 39{,}33\text{ €}$ pro beschädigtem Bauteil.			10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

STOCHASTIK 2

III.2 Wetter auf den Färöer-Inseln

Im Nordatlantik liegt die Inselgruppe der Färöer-Inseln. Aufgrund ihrer geografischen Position (einerseits noch im Golfstrom, andererseits mitten in der Zugstraße der subarktischen Tiefdruckgebiete) sind die Inseln notorisch für ihr ständig wechselndes Wetter. „Jedes Wetter an einem Tag“, könnte ein touristischer Werbespruch sein, wenn dies denn für Touristen attraktiv wäre; die Fischer auf der Insel sprechen gar davon, dass sich das Wetter vier Mal am Tag ändern würde.

An der Nordspitze der Hauptinsel Streymoy befindet sich auf einem Felsen bei Tjornuvik eine Wetterstation. Unter anderem wird hier die *Veränderlichkeit* des Wetters durch die Angabe der *Änderungswahrscheinlichkeit* $P_{\text{Änd}}$ bestimmt.

Dazu wird der Tag in vier Zeitabschnitte à 6 Stunden geteilt (diese Abschnitte heißen Perioden); eine Periode heißt „trocken“, wenn während dieser Zeit höchstens 1 mm Niederschlag fällt; die Periode heißt „regnerisch“, wenn mehr als 1 mm Niederschlag fällt. Die *Änderungswahrscheinlichkeit* $P_{\text{Änd}}$ gibt nun an, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich das Wetter von einer Periode zur nächsten zwischen den beiden Typen ändert.

Langfristige Messungen ergaben $P_{\text{Änd}} = 0{,}40$.

a) Bestätigen Sie, dass man nach diesen Angaben eine zweitägige Wetterbeobachtung als siebenstufiges Bernoulli-Experiment mit $p = P_{\text{Änd}}$ betrachten könnte. **(5P)**

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

- Das Wetter bleibt für einen ganzen Tag gleich.
- Nach einer trockenen Periode bleibt es zwei weitere Perioden trocken.
- Während eines Tages ändert sich das Wetter von jeder Periode zur nächsten.
- Nachdem ab Mitternacht die ersten sechs Stunden regnerisch waren, kann man aber den Tag über – also während der nächsten beiden Perioden – auf den Regenschirm verzichten. **(15P)**

c) Jetzt geht es um die Prognosefähigkeit des bisherigen Modells.

- Nehmen wir an, die jetzige Periode sei „regnerisch“.
  Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dann die Periode 18 Stunden später ebenfalls „regnerisch“ sein wird.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für „regnerisch“ in der Periode 18 Stunden später, wenn die jetzige Periode „trocken“ ist.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Periode 24 Stunden später
  – vom gleichen Typ
  – vom anderen Typ
  sein wird wie die jetzige.

- Begründen Sie, dass der folgende Funktionsterm $k(n)$ angibt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich das Wetter in Bezug auf die beiden Eigenschaften „trocken" oder „regnerisch" nach n Übergängen nicht geändert haben wird:

$$k(n) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2i} \cdot P_{Änd}{}^{2i} \cdot \left(1 - P_{Änd}\right)^{(n-2i)}$$

Hinweis: Die eckige Klammer $\lfloor ... \rfloor$ bedeutet Abrunden auf die nächste natürliche Zahl.

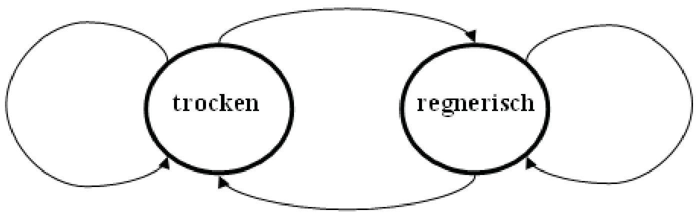
- Erstellen Sie eine Wertetabelle dieser Funktion mit dem gegebenen Wert von $P_{Änd}$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

- Interpretieren Sie die bisherigen Ergebnisse in Hinblick auf mögliche Wetterprognosen in Tjornuvik. **(35P)**

Natürlich werden gute Wettervorhersagen heutzutage mithilfe mathematischer Modelle gerechnet, die sehr viele Messdaten auswerten. Aber auch die bisher betrachtete primitive Methode der „Vorhersage aus der Gegenwart" lässt sich durchaus noch verbessern:
Statistisch ausgewertete Wetterbeobachtungen über lange Zeiträume an der Wetterstation Tjornuvik haben nämlich für eine bestimmte Jahreszeit folgendes ergeben:

1) Wenn eine Periode trocken ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass das in der nächsten Periode so bleibt, $p_{tt} = 0{,}4$.
2) Wenn eine Periode regnerisch ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass das in der nächsten Periode so bleibt, $p_{rr} = 0{,}7$.

d) Man kann diese Ergebnisse in einem Übergangsgraphen (rechts) oder in einer Übergangsmatrix (unten in e)) darstellen.
Übertragen Sie den Graphen und beschriften Sie die Pfeile des Übergangsgraphen mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.



(5P)

e) Betrachten Sie nun die zugehörige Übergangsmatrix: $U = \begin{pmatrix} p_{tt} & (1 - p_{rr}) \\ (1 - p_{tt}) & p_{rr} \end{pmatrix}$.

- Für eine bestimmte Periode seien p_t und p_r mit $p_r + p_t = 1$ die Wahrscheinlichkeiten für trockenes bzw. regnerisches Wetter. Begründen Sie mithilfe eines Baumdiagramms, dass für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten p_t' und p_r' der nächsten Periode gilt:

$$U \cdot \begin{pmatrix} p_t \\ p_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_t' \\ p_r' \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie für die beiden möglichen Fälle des beobachteten Wetters in der Gegenwart die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Wetterzustände in der Zukunft nach 1, 2, …. 4 Perioden und nach 10 Tagen. Verwenden Sie zur Darstellung Ihrer Ergebnisse die Tabelle in der Anlage.

- Interpretieren Sie die Ergebnisse – auch im Vergleich zu c) und in Bezug auf die Wichtigkeit des Wissens über das Wetter in der „Gegenwart“.
- Wenn man eine Reise in einigen Wochen auf die Färöer plant und wissen will, wie das Wetter bei der Ankunft wohl sein wird, nützt einem das mögliche Wissen über das Wetter zum Planungszeitpunkt gar nichts. Dennoch lassen die berechneten Daten eine Prognose zu:
  Beurteilen Sie, wie das Wetter bei Ankunft sein wird. **(25P)**

f) Es ist also wichtig, zu wissen, mit welchen Wahrscheinlichkeit p_t bzw. p_r eine beliebig herausgegriffene Periode trocken bzw. regnerisch sein wird.
Mit einer Statistik, die die relative Häufigkeit trockener bzw. regnerischer Perioden auswertet, könnte man diese Frage natürlich näherungsweise beantworten.
Auch e) legt als Grenzwert in der Tabelle eine vermutete Antwort nahe.

Man kann dazu aber auch im Rahmen des betrachteten Modells folgende Gleichungen aufstellen:
$\begin{pmatrix} p_{tt} & (1-p_{rr}) \\ (1-p_{tt}) & p_{rr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_t \\ p_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_t \\ p_r \end{pmatrix}$ und $p_t + p_r = 1$.

- Begründen Sie diese Gleichungen, insbesondere die Matrizengleichung.
- Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des Gleichungssystems. **(10P)**

g) Begründen Sie schließlich, dass aus dem Modell, das ab dem Aufgabenteil d) betrachtet wird, auch der Wert $p_{Änd} = 0,4$ folgt (vgl. Eingangstext vor Teilaufgabe d)). **(5P)**

Anlage zur Aufgabe „Wetter auf den Färöer-Inseln“, Aufgabenteil e)

Blick in die Zukunft in Perioden	Gegenwart: trocken		Gegenwart: regnerisch	
	P(„trocken“)	P(„regnerisch“)	P(„trocken“)	P(„regnerisch“)
0	1	0	0	1
1				
2				
3				
4				
10·4				

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Da zunächst nur die Änderungswahrscheinlichkeit $P_{\text{Änd}}$ bekannt und gegeben ist, kann man (anfangs) davon ausgehen, dass an jeder Periodengrenze ein Wechsel mit eben dieser Wahrscheinlichkeit eintritt.
Das Wetter hat zwei Zustände, damit gibt es zwei Möglichkeiten an den Periodengrenzen: Das Wetter ändert sich, oder es ändert sich nicht.
Zwei Tage Beobachtung bedeuten Beobachtung über acht Perioden und damit über sieben mögliche Wechsel hinweg.</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>• „Das Wetter bleibt für einen ganzen Tag gleich“ bedeutet: Das Wetter ändert sich an den drei Übergängen zwischen den vier Perioden jeweils nicht.
Also $p_1 = (1-0,4)^3 \approx 0,216 \approx 22\%$.
• Die Zusatzinformation „Anfangs war es trocken“ ändert die Wechselwahrscheinlichkeit nicht, deswegen ist $p_2 = (1-0,4)^2 \approx 0,36 = 36\%$.
• Bei drei Periodenübergängen tritt jeweils ein Wechsel ein, also $p_3 = 0,4^3 \approx 0,064 = 6,4\%$.
• Der Text legt die Wetterverteilung „regnerisch – trocken – trocken“ nahe. Damit ist die Wahrscheinlichkeit $p_4 = 0,4 \cdot (1-0,4) = 0,24 = 24\%$.</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>• Zwischen „Jetzt“ und „3 Perioden später“ liegen drei Übergänge.
Da insgesamt kein Wechsel eintreten soll, müssen entweder kein oder zwei Übergänge mit Wechseln verbunden sein. Da diese Ereignisse sich ausschließen, ist $p_{c1} = 0,6^3 + 3 \cdot 0,6 \cdot 0,4^2 \approx 0,504 \approx 50\%$.
• Die Fragestellung ist äquivalent zu der, bei der man „trocken“ und „regnerisch“ vertauscht, und damit ist nach der Gegenwahrscheinlichkeit zum vorigen Ereignis gefragt, also auch ca. 50 %.

Ebenso möglich: Von den drei Übergängen müssen jetzt einer oder drei mit Wechseln verbunden sein.
Also ist $p_{c2} = 0,4^3 + 3 \cdot 0,4 \cdot 0,6^2 \approx 0,496 \approx 50\%$.
• Analog: Bei gleichem End-Typ und vier Übergängen kann es keinen, zwei oder vier Wechsel geben.
Also ergibt sich $p_{c3} = 0,6^4 + 6 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^2 + 0,4^4 \approx 0,5008 \approx 50\%$.
Der andere End-Typ tritt dann mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_{c4} = 1 - p_{c3} \approx 50\%$ ein.
• End- und Anfangstyp sind genau dann gleich, wenn eine gerade Anzahl von Wetteränderungen eintritt. Um k(n) zu bestimmen, muss also eine Teil-Summe der Binomial-Wahrscheinlichkeiten $\binom{n}{k} \cdot P_{\text{Änd}}{}^{k} \cdot \left(1 - P_{\text{Änd}}\right)^{(n-k)}$ gebildet werden, nämlich alle mit einem geraden k = 2i:</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

Daher sind nur die Summanden $\binom{n}{2i} \cdot P_{Änd}^{\;2i} \cdot \left(1 - P_{Änd}\right)^{(n-2i)}$ zu betrachten.

Daher kann der Laufindex i nur Werte von 0 bis $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ annehmen.

- Es ergeben sich folgende Werte:

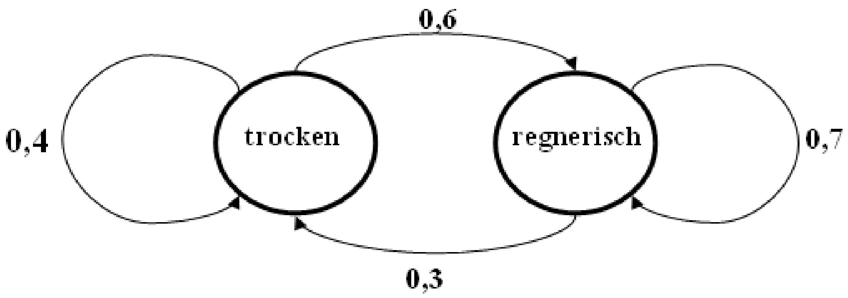
N	*k(n)*
1	0,6
2	0,52
3	0,504
4	0,5008
5	0,50016
6	0,500032

Die Vermutung liegt nahe, dass die Folge der Werte gegen 0,5 konvergiert.

- Eine sinnvolle Prognose ist bestenfalls über einen halben Tag möglich, da bereits bei drei Übergängen die möglichen Zustände jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 50% eintreten.

Bewertung: II: 30, III: 5

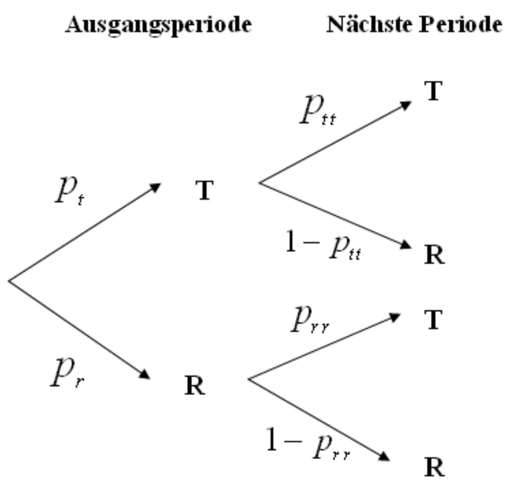
d)



Bewertung: II: 5

e)

- Die Wettersituation wird durch folgendes Baumdiagramm beschrieben:



	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$p_t' = p_t \cdot p_{tt} + p_r \cdot \left(1 - p_{rr}\right)$$

$$p_r' = p_r \cdot p_{rr} + p_t \cdot \left(1 - p_{tt}\right)$$

Das ist gleichbedeutend mit: $U \cdot \begin{pmatrix} p_t \\ p_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_t' \\ p_r' \end{pmatrix}$

- Durch iteratives Anwenden des Ergebnisses des vorigen Punktes erhält man für die Wetterverteilung nach n Perioden $U^n \cdot \begin{pmatrix} p_t \\ p_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_t^{(n)} \\ p_r^{(n)} \end{pmatrix}$

  Wenn man als „Anfangsverteilung“ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wählt, kann man mit Rechnerhilfe die Tabelle ausfüllen:

Perioden	Gegenwart: trocken		Gegenwart: regnerisch	
	P(„trocken“)	*P*(„regnerisch“)	*P*(„trocken“)	*P*(„regnerisch“)
0	1	0	0	1
1	0,4	0,6	0,3	0,7
2	0,34	0,66	0,33	0,67
3	0,334	0,666	0,333	0,667
4	0,3334	0,6666	0,3333	0,6667
10·4	≈ 1/3	≈ 2/3	≈ 1/3	≈ 2/3

- Man erkennt, dass auch langfristige Prognosen möglich bzw. sinnvoll sind, allerdings wird die Information über das „Anfangswetter“ sehr schnell irrelevant.
- Da das Ausgangswetter in diesem Modell bei längerer Betrachtung eine geringe Bedeutung hat, kann man feststellen, dass das Wetter bei Ankunft mit 1/3-Wahrscheinlichkeit trocken und 2/3-Wahrscheinlichkeit regnerisch ist. Dies gilt auch im Mittel über alle Zeiträume der betrachteten Jahreszeit.

Bewertung: I: –, II: 20, III: 5

f) Man muss das Baumdiagramm aus e) nur anders interpretieren: Die Verteilung der Wetterzustände zu einer beliebigen Periode und zu der nachfolgenden sind gleich. Man erhält die angegebene Fixgleichung und trivialerweise die Bedingung $p_t + p_r = 1$. Das lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung

$$p_t = \frac{1}{3} \quad und \quad p_r = \frac{2}{3}$$

Bewertung: I: –, II: 5, III: 5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
g)	Eine Wetteränderung wird durch die beiden mittleren Pfade des Baumdiagramms in e) beschrieben. $P(\text{„Wetteränderung“}) = p_t \cdot \left(1 - p_{tt}\right) + p_r \cdot \left(1 - p_{rr}\right) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}3 = 0{,}4$ Dies ist in der Tat der Wert $P_{\text{Änd}}$ mit dem am Anfang in der Teilen a) bis c) gerechnet wurde.			5
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20