Analysis 1

I.1 Bahnlinie

Eine regionale Bahnlinie, die bisher in Auerdorf (Punkt *A*) endet, soll bis Dasseldorf (Punkt *D*) weitergeführt werden (siehe Anlage). Es ist geplant, dass sie auch durch Buntdorf (Punkt *B*) verläuft. Eine Einheit entspricht einem Kilometer.

Für erste Planungen und Zeichnungen soll die Trassenführung vereinfachend mithilfe von Funktionen dargestellt werden. Dabei sind einige Randbedingungen zu beachten. Die bisherige Bahnlinie (schwarz eingezeichnet) soll knick- und krümmungssprungfrei in die neue Bahnlinie übergehen.

Damit in der Zukunft eine Verlängerung der Bahnlinie über Dasseldorf hinaus möglich ist, muss die Bahnlinie auch knickfrei in die mögliche Weiterführung (gestrichelt gezeichnet) übergehen können. Allerdings kann in Dasseldorf auf die Krümmungssprungfreiheit verzichtet werden, da jeder Zug dort halten wird.

a) Die Bahnlinie von Auerdorf nach Dasseldorf über Buntdorf soll vorerst durch eine ganzrationale Funktion f mit möglichst niedrigem Grad dargestellt werden, die einen optimalen Anschluss an die beiden Teilstücke gewährleistet.

- Berechnen Sie den Term dieser Funktion f.
  Geben Sie die zur Berechnung notwendigen Gleichungen an und beschreiben Sie deren Bedeutungen.
- Skizzieren Sie den Graphen von f in das beigefügte Koordinatensystem der Anlage und entscheiden Sie anhand des Graphen, ob die so gefundene Funktion eine sinnvolle Modellierungsfunktion darstellt.
  Hinweis: Wenn Sie im ersten Aufgabenteil keine Funktion gefunden haben, so können Sie mit der Funktion f_1 mit $f_1(x)=\frac{1}{1728}x^6-\frac{223}{3456}x^5+\frac{739}{864}x^4-\frac{2447}{864}x^3-2x+10$ *weiterarbeiten. f_1 ist aber nicht die gesuchte Funktion.* **(25P)**

Der Planer ist mit dem Ergebnis nicht zufrieden und versucht den Ansatz über zwei ganzrationale Funktionen g_1 und g_2, die er nur auf beschränkten Intervallen betrachtet.

$$g_1(x)=-\frac{397}{128}x^5+\frac{471}{32}x^4-\frac{589}{32}x^3-2x+10 \text{ für } x\in[0;2] \text{ und}$$
$$g_2(x)=\frac{55}{32}x^3-\frac{125}{8}x^2+\frac{335}{8}x-40 \text{ für } x\in[2;6].$$

Arbeiten Sie im Folgenden mit diesen beiden Funktionen weiter.

b) Neben anderen Kriterien für die Entscheidung über den Bau die Bahntrasse wird die Krümmung herangezogen, weil davon die erlaubten Höchstgeschwindigkeiten abhängen.

- Skizzieren Sie den Graphen der Krümmungsfunktion bezüglich der Funktion g_2 auf dem Intervall $[2;6]$, um einen Überblick über die Stärke der Krümmung zu erhalten.
  Begründen Sie, warum dieser Graph auf dem Intervall $[2;6]$ eine Nullstelle haben muss.

  Hinweis: Der Term der Krümmungsfunktion κ zu einer gegebenen Funktion f ist gegeben durch

$$\kappa(x)=\frac{f''(x)}{\sqrt{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^3}}$$

- Die folgende Tabelle zeigt Erfahrungswerte, welche Höchstgeschwindigkeiten für einen Zug verantwortet werden können, wenn dieser Kreisbahnen mit den angegebenen Krümmungswerten durchfährt.

Krümmungswert in $\frac{1}{\text{km}}$	20	9,09	5,26	3,33	2,33	1,69	1,32	1,03	0,84	0,69	0,58
Geschwindigkeit v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120

Für die Streckenführung zwischen Buntdorf und Dasseldorf sollen für die Funktion g_2 die notwendigen Geschwindigkeitsbegrenzungen abgeschätzt werden. Bestimmen Sie mithilfe einer selbst angelegten Tabelle Krümmungsmaxima. Ermitteln Sie, auf welche Geschwindigkeit die Fahrt in den Bereichen der stärksten Krümmung jeweils reduziert werden muss. Als Genauigkeit für x genügen 2 Stellen nach dem Komma. **(20P)**

c) Ein Ingenieur behauptet, dass man die Rechnungen vereinfachen könnte, indem man nur die Extremstellen der Funktionen bestimmt. An diesen Stellen sei die Krümmung am größten.

- Zeigen Sie am konkreten Beispiel des Tiefpunktes von g_2, dass diese Aussage falsch ist. *Hinweis: In diesem Aufgabenteil können Sie sich nicht auf den nächsten Spiegelpunkt beziehen.*
- Beweisen Sie die folgende Behauptung:
  Für jede ganzrationale Funktion f dritten Grades gilt: Die Stellen maximaler Krümmung stimmen nicht mit den Extremstellen überein.
  Hinweis: Sie können z. B. die Extremstellen der Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ermitteln. Allerdings können Sie die Extremstellen der zugehörigen Krümmungsfunktion mit dem CAS-Rechner nicht direkt bestimmen.
- Entscheiden Sie, ob Sie für die Geschwindigkeitsbestimmung der untersuchten Bahnstrecke trotzdem dem Vorschlag des Ingenieurs folgen können. **(25P)**

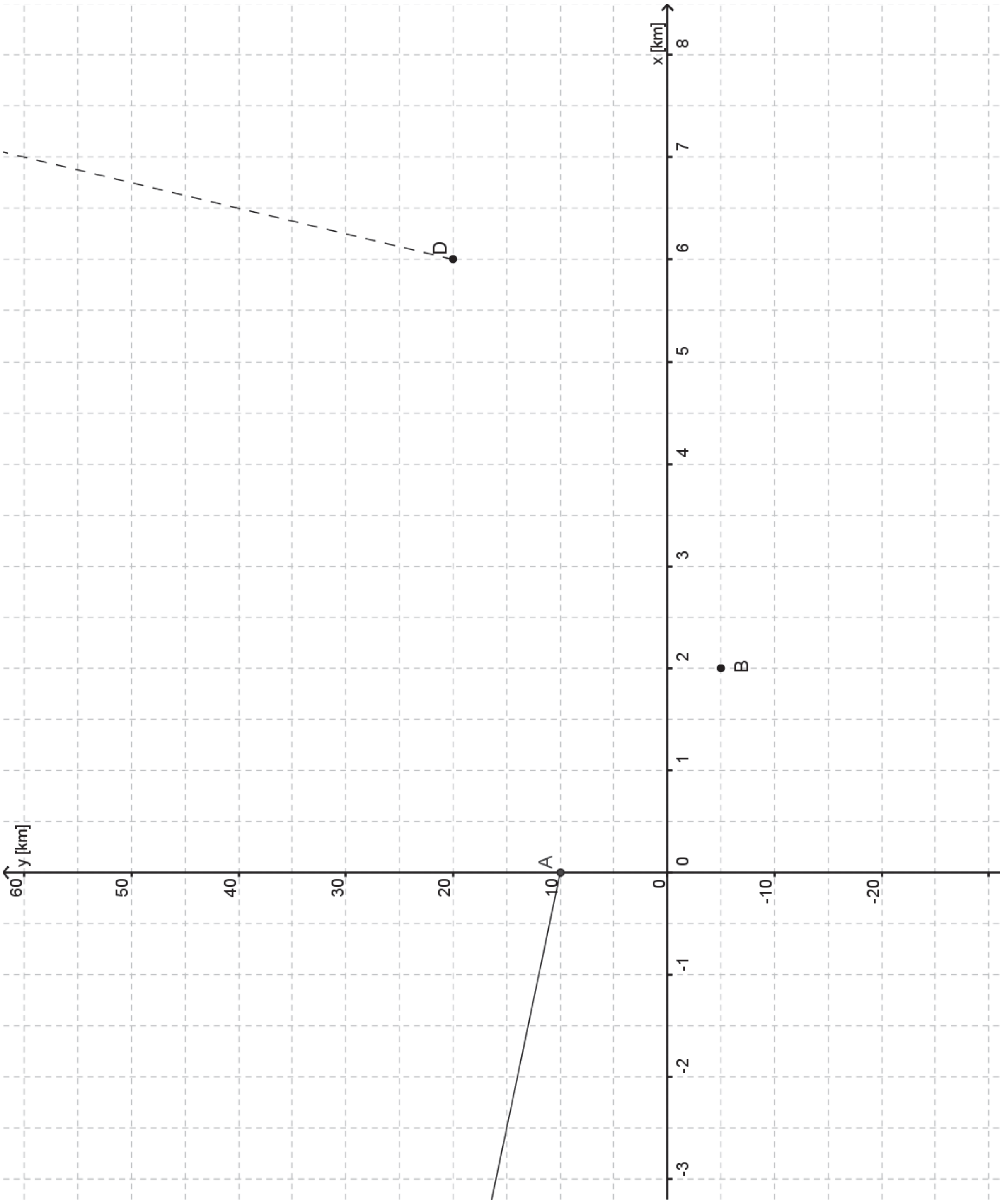
d) Ein weiteres Entscheidungskriterium ist die Länge der Bahnstrecke.

- Bestimmen Sie exemplarisch die Länge der Bahnstrecke zwischen B und D für die Funktion g_2 näherungsweise, indem Sie anstelle der Funktion vier geradlinige Verbindungsstrecken benutzen.
- Begründen Sie, dass man ausgehend von diesem Ansatz die Länge der Bahnstrecke genauer berechnen kann, und ermitteln Sie eine Formel, mit der man für eine beliebige Anzahl n von Unterteilungen und geradlinigen Verbindungsstrecken die angenäherte Länge angeben kann.
- Für eine im Intervall $[c;d]$ stetig differenzierbare Funktion f berechnet sich die (Bogen-) Länge l des Graphen von f über $[c;d]$ durch $l = \int_c^d \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

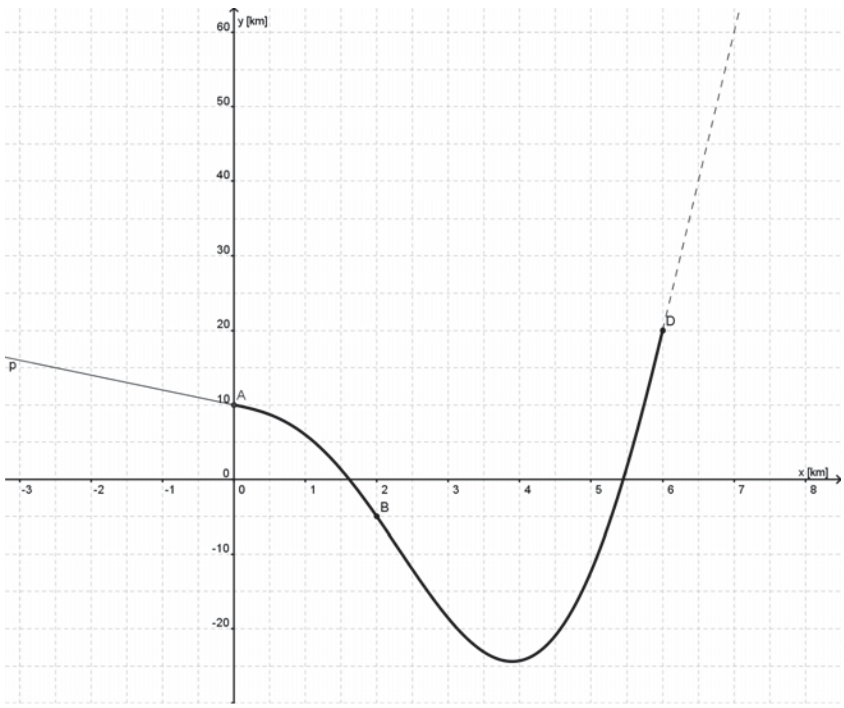
  Berechnen Sie die Länge der Bahnlinie zwischen B und D mit der Formel und geben Sie die Abweichung der Näherung aus dem ersten Spiegelpunkt zu diesem Wert in Prozent an. **(20P)**

e) Im Punkt $C(4{,}5\,|\,-17)$ ist eine Transformatorenstation. Von hier wird ein Kabel für die elektrische Versorgung der Bahn gelegt.
Bestimmen Sie den Punkt der Bahnlinie, der zu dem Punkt C die kürzeste Entfernung hat. **(10P)**

Anlage zur Aufgabe „Bahnlinie“

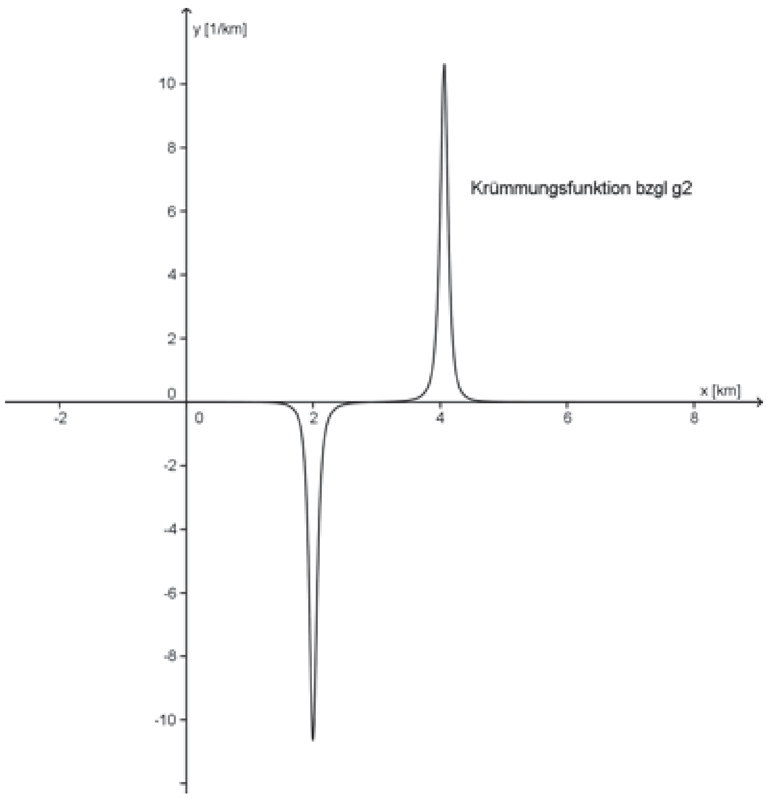


Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Korrekturhinweis: Durch unterschiedliche Technologien können von dieser Lösungsskizze abweichende Darstellungen bei den Schülerlösungen auftreten.			
a)	• (1) $f(0)=10$ (2) $f'(0)=-2$ (3) $f''(0)=0$ (4) $f(2)=-5$ (5) $f(6)=20$ (6) $f'(6)=40$ (1), (4), (5): Die Bahntrasse soll durch die Punkte A, B und D laufen. (2), (6): Die Bahntrasse schließt knickfrei an die bestehende und an die geplante Streckenführung an. (3): Bei A geht die bestehende Trasse krümmungssprungfrei in die geplante über. Ergebnis: $f(x) = -\frac{65}{1152}\cdot x^5 + \frac{709}{864}\cdot x^4 - \frac{2411}{864}\cdot x^3 - 2\cdot x + 10$ •  Der Graph von f erfüllt zwar alle gegebenen Bedingungen, aber dass er nach Buntdorf noch einen großen Bogen nach unten macht, erscheint nicht sinnvoll. Die Ersatzfunktion f_1 hat im Intervall $[0;6]$ einen zu f (fast) identischen Graphen.	15	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

b)

- 

  g_2 hat bei $x \approx 2$ ein Maximum und bei $x \approx 4$ ein Minimum. Dazwischen befindet sich ein Wendepunkt, an dem die zweite Ableitung und damit die Krümmung null ist.

- Aus der Zeichnung sieht man, dass zwei Krümmungsmaxima vorliegen, denn das Vorzeichen der Krümmungswerte steht ja nur für die Richtung der Krümmung.

x	$\kappa(x)$ bzgl. g_2
1,99	- 10,5472
2,00	- 10,625
2,01	- 10,3478

x	$\kappa(x)$ bzgl. g_2
4,05	10,3204
4,06	10,6180
4,07	10,5622

Etwa bei den Extrempunkten von g_2 liegt jeweils die stärkste Krümmung vor. $|\kappa(2,00)| \approx \kappa(4,06) \approx 10,62$. Der größte auftretende Krümmungsbetrag ist also rund $10,62\,\frac{1}{\text{km}}$. Diese Bereiche können nur mit etwas weniger als $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ durchfahren werden.

I	II	III
5	15	

	Lösungsskizze	I	II	III
c)	• Zur Bestimmung des Tiefpunktes von g_2 wird die Gleichung $g_2'(x)=0$ mithilfe des solve-Befehls gelöst. Man erhält die beiden Lösungen $x_1=2$ und $x_2=\frac{134}{33}$. Zusammen mit $g_2''\left(\frac{134}{33}\right)=\frac{85}{8}>0$ folgt, dass g_2 bei $x_2=\frac{134}{33}\approx 4{,}061$ einen Tiefpunkt hat. Die Tabellierung der gerundeten Werte für die Krümmung ergibt			

x	$\kappa(x)$ bzgl. g_2
4,060	10,6181
4,061	10,6288
4,062	10,6359
4,063	10,6393
4,064	10,6392

Während der Tiefpunkt näherungsweise bei $x\approx 4{,}061$ liegt, befindet sich die maximale Krümmung näherungsweise bei $x\approx 4{,}063$.

• Der solve-Befehl für die Bedingungsgleichung $f'(x)=0$ liefert Ausdrücke für die möglichen Extremstellen von *f*:

$$x_1=\frac{\sqrt{b^2-3ac}-b}{3a} \quad \wedge \quad x_2=-\frac{\sqrt{b^2-3ac}+b}{3a}.$$

Setzt man die möglichen Extremstellen in $\kappa'(x)$ (bzgl. f) ein, so erhält man $\kappa'(x_1)=\kappa'(x_2)=6a$. Da die Funktion *f* nach Voraussetzung den Grad drei hat, muss $a\neq 0$ gelten. Für die Krümmungsfunktion κ ist also die notwendige Bedingung $\kappa'(x)=0$ für Extremstellen an den Stellen x_1 und x_2 nicht erfüllt. Also können an den Extremstellen von *f* keine Krümmungsextrema vorliegen.

• Sowohl für den Krümmungswert $\kappa(4{,}061)=10{,}6287\,\frac{1}{km}$ als auch für den Krümmungswert $\kappa(4{,}063)=10{,}6393\,\frac{1}{km}$ ergibt sich aus der vorgegebenen Tabelle eine erlaubte Höchstgeschwindigkeit von etwas weniger als $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Das vorgeschlagene Verfahren des Ingenieurs ist also für die Praxis ausreichend genau.

I	II	III
	15	10

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>

• Mithilfe des Satzes von Pythagoras erhält man die einzelnen Teillängen. Die Summe ergibt die Gesamtlänge.

$$l=\sqrt{\left(g_2(3)-g_2(2)\right)^2+1^2}+\sqrt{\left(g_2(4)-g_2(3)\right)^2+1^2}+\sqrt{\left(g_2(5)-g_2(4)\right)^2+1^2}+\sqrt{\left(g_2(6)-g_2(5)\right)^2+1^2}$$

$$\approx 40{,}36$$

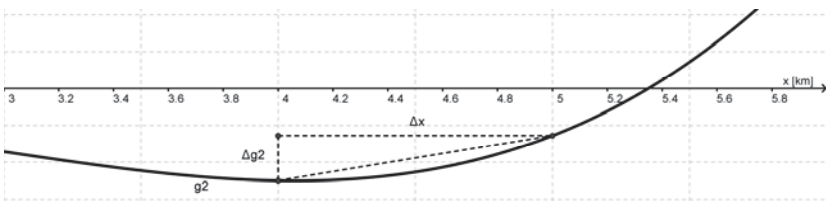
Die Länge der Bahnstrecke zwischen B und D beträgt also etwa 40,4 km.

• Wenn man die Unterteilung immer feiner wählt, nähert man sich mit den geraden Verbindungsstrecken dem Funktionsgraphen immer mehr an. Dadurch nähert sich der mithilfe der geraden Verbindungsstrecken ermittelte Wert dem tatsächlichen immer besser an.
Für eine beliebige Unterteilung gilt:

$$l=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\left(g_2\left(2+(i+1)\cdot\frac{4}{n}\right)-g_2\left(2+i\cdot\frac{4}{n}\right)\right)^2+\left(\frac{4}{n}\right)^2}$$

$\Delta x=\frac{4}{n}$ gibt die Breite der Unterteilungen und

$\Delta g_2=g_2\left(2+(i+1)\cdot\frac{4}{n}\right)-g_2\left(2+i\cdot\frac{4}{n}\right)$ gibt die Differenz der Funktionswerte an.



• Der Wert mit der Formel ist 40,60, also ist der im ersten Spiegelpunkt errechnete Wert schon eine recht gute Näherung.
Die prozentuale Abweichung beträgt $\frac{0{,}24}{40{,}6}\approx 0{,}59\%$

</td><td>5</td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Es ist die Abstandsfunktion $ab_{g_2,C}$ mit dem Term

$ab_{g_2,C}(x)=\sqrt{\left(g_2(x)+17\right)^2+\left(x-4{,}5\right)^2}$ zu bilden. Von dieser ist ein Extremwert zu bestimmen. Dazu wird sie abgeleitet und die Nullstellen der ersten Ableitung gesucht.
Die Nullstelle der ersten Ableitung ist analytisch mit den meisten CAS-Rechnern nicht zu lösen. Es müssen numerische oder grafische Verfahren benutzt werden.
Als Lösung erhält man $x\approx 4{,}07$.
Damit hat der Punkt etwa die Koordinaten $(4{,}07\,|\,-12{,}52)$.

</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

ANALYSIS 2

I.2 Wachstumsverhalten von Douglasien

Douglasien („Oregon pine") stammen aus den Waldgebieten des küstennahen pazifischen Nordwestens der USA und sind hinsichtlich der hiesigen Standortbedingungen eine idealtypische Baumart.

Die Douglas-Tanne, wie sie hier genannt wird, besitzt eine hohe Widerstandsfähigkeit gegen Holz zerstörende Pilze. Ihr Holz findet daher sowohl im Außenbereich (Balkone, Gartenmöbel, Spielplatzeinrichtungen etc.) als auch im Innenbereich (Innenausbau, Möbel etc.) zunehmend Verwendung.

In dieser Aufgabe wird das Wachstum von Douglasien untersucht. Auch wenn Douglasien nur in einigen Monaten im Jahr wachsen, wird in dieser Aufgabe zur Vereinfachung von einem kontinuierlichen Wachstum ausgegangen.

a) Geben Sie die grundsätzlichen Eigenschaften von exponentiellem, beschränktem und logistischem Wachstum an. **(10P)**

b) In einer Langzeitstudie wurde das Längenwachstum von Douglasien untersucht. Die Messungen wurden immer am 1. Oktober vorgenommen und daraus wurden Durchschnittswerte der Baumlängen berechnet. Diese sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Zeit in Jahren	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Länge in Metern	0,2	2,2	7,0		20,0		33,0		40,0		

- Für die Modellierung des Längenwachstums der beobachteten Douglasien kommen das exponentielle und das beschränkte Wachstum nicht infrage.
  Begründen Sie diese Aussage.
- Berechnen Sie mithilfe der logistischen Regression eine Funktion, die die durchschnittliche Länge von Douglasien beschreibt.
- Ergänzen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle
  Hinweis: Wenn Sie im zweiten Teil keine Lösung erhalten haben, so können Sie mit der unten stehenden Funktion h arbeiten.

Die unterschiedlichen Rechnertypen liefern bei der Regression unterschiedliche Ergebnisse. Arbeiten Sie bitte im Folgenden mit der Funktion h weiter, die durch

$$h(x) = \frac{39}{0{,}9 + 21{,}7 \cdot e^{-0{,}07 \cdot x}}$$

gegeben ist.

- Ermitteln Sie, welche Stammhöhe eine durchschnittliche Douglasie aufgrund der Modellierungsfunktion h maximal erreichen kann. **(20P)**

c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt der größten Wachstumsgeschwindigkeit sowie die größte Wachstumsgeschwindigkeit für die Funktion h mithilfe der Differenzialrechnung. **(10P)**

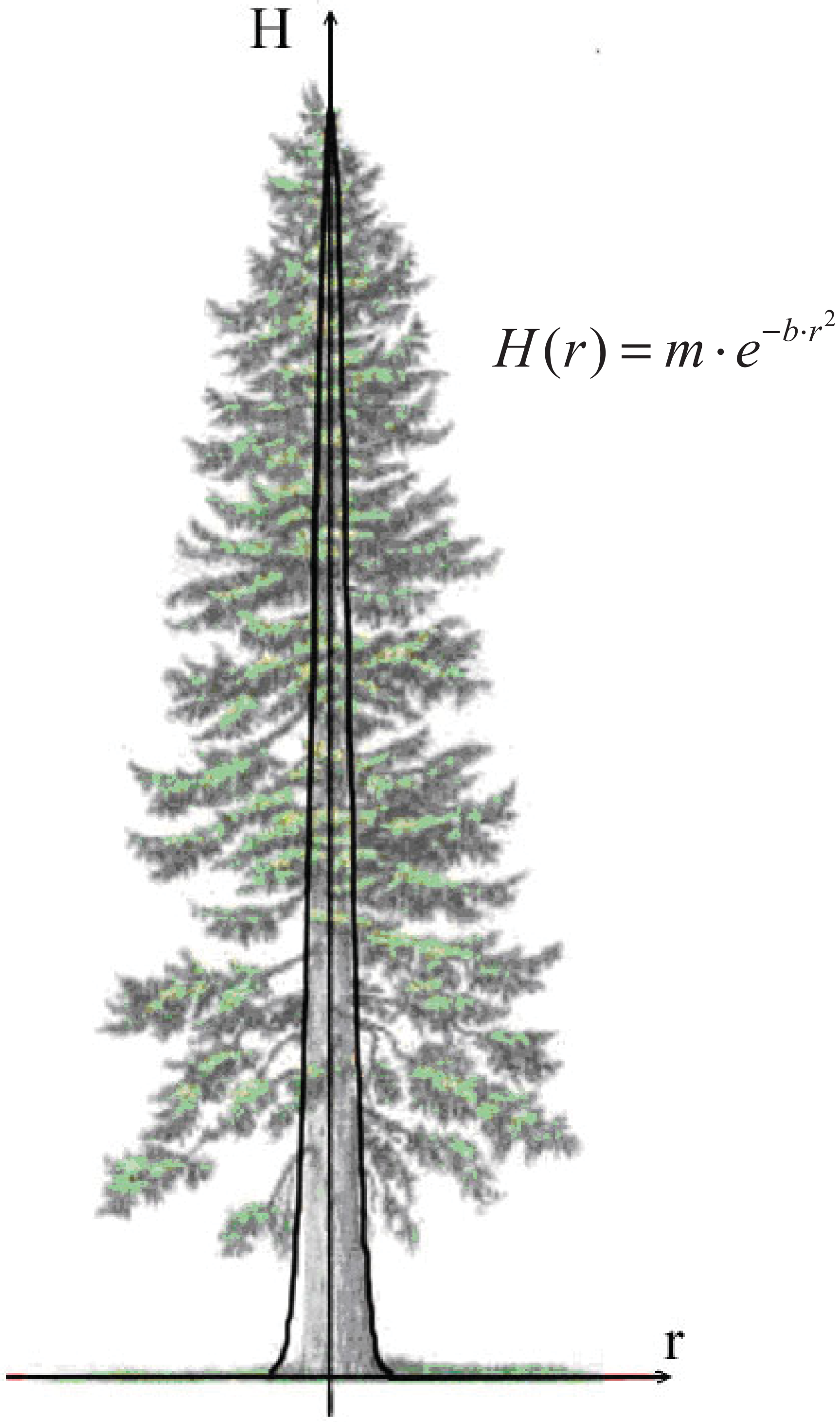
d) Ein anderes Modell zur Beschreibung der durchschnittlichen Längen von Douglasien geht von der Geschwindigkeit des Höhenzuwachses w in Abhängigkeit von der Zeit x aus. Nach dieser Modellannahme lässt sich die Geschwindigkeit des Höhenzuwachses angenähert durch Funktionen des Typs $w_a(x) = a(x+1)e^{-kx}, k > 0$ und $a > 0$ beschreiben. Dabei ist x in der Einheit „Jahre“ und $w(x)$ in der Einheit „Meter pro Jahr“ angegeben.

- Zeigen Sie mithilfe der Lage der Extrempunkte von w_a, dass nur Zahlenwerte k mit $0<k<1$ für eine sinnvolle Beschreibung des Wachstumsprozesses infrage kommen.
- Douglasien werden mit einer Länge von 20 cm gepflanzt und haben nach 80 Jahren durchschnittlich eine Länge von 40m (s. Aufgabenteil b)).
  Sei $a = 0{,}04$ vorgegeben. Bestätigen Sie für dieses a, dass k den Wert $k \approx 0{,}025$ haben muss.
- Zu der Funktion $w_{0,04}$ mit $w_{0,04}(x) = 0{,}04(x+1)\cdot e^{-0{,}025\cdot x}$ gibt es eine Modellierungsfunktion h_1, die die durchschnittliche Länge von Douglasien beschreibt.
  Bestimmen Sie diese Funktion h_1.
  Bestimmen Sie weiterhin den Zeitpunkt der größten Wachstumsgeschwindigkeit von h_1.
- Ermitteln Sie, welche Stammhöhe eine durchschnittliche Douglasie aufgrund der Modellierungsfunktion h_1 maximal erreichen kann.
- Eine Funktion f, die ein logistisches Wachstum beschreibt, erfüllt folgende Gleichung:
  $f'(x) = \lambda \cdot f(x)\cdot (P - f(x))$ mit $\lambda > 0$
  Entscheiden Sie begründet, ob die Funktion h_1 logistisches Wachstum beschreibt.
- Vergleichen Sie die Lösungsfunktion h aus Teil b) mit der Lösungsfunktion h_1. **(45P)**

e) In diesem Aufgabenteil soll das Stammvolumen von Douglasien oberhalb der Erdoberfläche abgeschätzt werden.
Als Kenngröße für das Dickenwachstum spielt der sogenannte Brusthöhendurchmesser BHD, der den Durchmesser des Stammes in einer Höhe von 1,30 m angibt, eine große Rolle. In dem untersuchten Waldgebiet wurde bei 80 jährigen, also 40 m hohen Tannen, ein durchschnittlicher BHD von 50 cm gemessen.
Bei den folgenden Berechnungen können Sie von einem idealen Baumtyp mit kreisrundem Stamm ausgehen, dessen Stamm-Längsschnitt sich modellhaft durch eine Funktion H mit $H(r) = m\cdot e^{-b\cdot r^2}$ beschreiben lässt, wobei $H(r)$ die Höhe angibt, in der der Stamm den Radius r aufweist (siehe Anlage).

- Zeigen Sie, dass gilt: $H(r) \approx 40\cdot e^{-54{,}8242\cdot r^2}$
- Zeigen Sie, dass $H^{-1}(x) = 0{,}135056\cdot\sqrt{-\ln\frac{x}{40}}$ für $0 < x < 40$ der Funktionsterm der Umkehrfunktion ist.
- Bestimmen Sie, entsprechend den Vorgaben, eine Schätzung für das Stammvolumen einer 80-jährigen Douglasie oberhalb des Erdbodens. **(15P)**

Anlage zur Aufgabe „Wachstumsverhalten von Douglasien“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Korrekturhinweis: Durch unterschiedliche Technologien können von dieser Lösungsskizze abweichende Darstellungen bei den Schülerlösungen auftreten.			

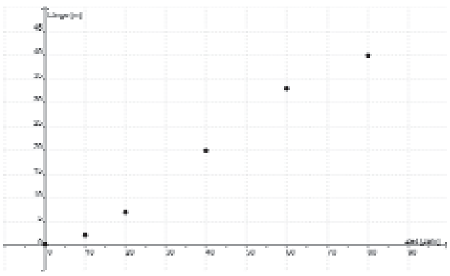
a)

- Exponentielles Wachstum: Die Wachstumsgeschwindigkeit ist proportional zum momentanen Bestand.
- Beschränktes Wachstum: Das Wachstum ist wegen endlicher Ressourcen durch eine Grenze beschränkt und die Wachstumsgeschwindigkeit ist proportional zu der Differenz aus der Grenze und dem momentanen Bestand.
- Logistisches Wachstum: Anfangs entspricht das logistische Wachstum etwa einem exponentiellem Wachstum und „später“ entspricht es in etwa einem beschränktem Wachstum. Die Wachstumsgeschwindigkeit ist proportional zu dem momentanen Bestand und der Differenz aus der Grenze und dem momentanen Bestand.

Bewertung: I: 10

b)

- Es handelt sich nicht um ein exponentielles Wachstum, da Douglasien nicht beliebig groß werden.
  Bei beschränktem Wachstum hat man anfangs eine große Wachstumsgeschwindigkeit, die im Laufe der Zeit immer kleiner wird. Das ist hier, wie man aus dem Datenplot ersehen kann, nicht der Fall.



- Als Beispiellösung ist der Lösungsterm mithilfe des NSpire angegeben
  $$l(x) \approx \frac{41,286}{1+27,86497 \cdot e^{-0,080567 \cdot x}}$$
- Je nach Rechnertyp differieren die Ergebnisse leicht.

Zeit in Jahren	30	50	70	90	100
Länge in Metern	11,8	27,6	37,6	40,5	40,9

Für die Ersatzfunktion h ergibt sich die folgende Tabelle:

Zeit in Jahren	30	50	70	90	100
Länge in Metern	11,0	25,1	36,7	41,5	42,4

- $\lim\limits_{x\to\infty} l(x) \approx 41,3$
  Durchschnittlich erreichen Douglasien eine Länge von etwa 41,3 m.
  Für die Ersatzfunktion gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) \approx 43,3$.

Bewertung: I: 10, II: 10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	Es ist die zweite Ableitung von h zu bilden. Für die Nullstelle der zweiten Ableitung ergibt sich $x \approx 45,47$. Jede logistische Wachstumsfunktion hat genau eine Stelle mit maximaler Wachstumsgeschwindigkeit. h ist nach Konstruktion eine logistische Wachstumsfunktion. Also ist für $x \approx 45,47$ die Wachstumsgeschwindigkeit maximal. Einsetzen des gefundenen x-Wertes in h' liefert $h'(45,47) \approx 0,758$. Die größte Wachstumsrate beträgt etwa 0,8 Meter pro Jahr.		10	

d)

- Es sind die Extrema der Kurven zu betrachten. Die erste Ableitung von w_a ist zu bilden und null zu setzen.

  Es gilt $w_a'(x) = a \cdot e^{-k \cdot t} \cdot (1 - k \cdot (x+1))$. Dieser Ausdruck ist null für $x = \frac{1-k}{k}$. Nur für $0 < k < 1$ ist die Extremstelle positiv. Wegen

  $w_a''(x) = a \cdot k \cdot (k(x+1) \cdot e^{-k \cdot t}$ und $w_a''(\frac{1-k}{k}) = -a \cdot k \cdot e^{k-1} < 0$ sind die Extremstellen auch Maxima. Damit treten Maxima des Höhenzuwachses nur für positive Jahreszahlen auf, was sinnvoll ist, wie man aus der Tabelle im Aufgabenteil a) ersehen kann.

- Es ist die Funktion L mit $L(k) = \int_0^{80} 0,04 \cdot (x+1) \cdot e^{-k \cdot x} dx$ zu tabellieren. Als Ergebnis muss $40\text{m} - 0,2\text{m} = 39,8\text{m}$ ergeben. Man erhält als Ausschnitt aus der Wertetabelle:

K	$L(k)$
0,024	41,138
0,025	39,399
0,026	37,7495

  Die beste Annäherung erhält man für $k = 0,025$.

  Das Integral bzw. die Integralfunktion rekonstruiert den Bestand aus den Änderungsraten. Die Änderungsrate ist in diesem Fall die Wachstumsgeschwindigkeit und der Bestand ist damit die Länge. Zur Integralfunktion muss noch die Anfangshöhe von 0,2 m hinzuaddiert werden, denn die Integralfunktion hat an der Stelle 0 auch den Wert 0.

  Es ist $h_1(x) = \int_0^x w_{0,04}(t)dt + 0,2$.

  Aus $h_1''(x) = w_{0,04}(x)' = 0$ erhält man mithilfe des solve-Befehls $x \approx 39,0$.

  Nach dem ersten Spiegelpunkt ist das auch eine Maximumsstelle.
  Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit wird nach etwa 39 Jahren erreicht.

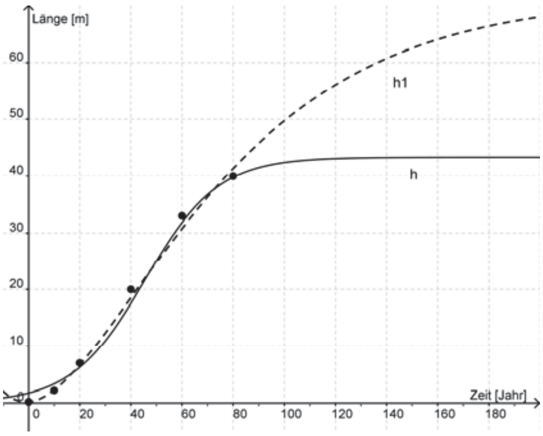
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

• Als maximale Höhe ergibt sich
$$\lim_{x\to\infty} h_1(x) = 0,2 + \lim_{x\to\infty}\int_0^x 0,04\cdot(t+1)e^{-0.025t}\,dt \approx 65,8\,.$$
Douglasien werden (nach dieser Modellierungsfunktion) durchschnittlich nicht mehr als 65,8 m hoch.

• Für ein logistisches Wachstum muss die Bedingung
$h_1'(t) = \lambda\cdot h_1(t)(65,6-h_1(t)),$ mit $\lambda\in\mathbb{R}$, gelten.

Es gilt: $\dfrac{h_1'(t)}{h_1(t)(65,6-h_1(t))} = \dfrac{(t+1)e^{0,025t}}{64(x+41)(41e^{0,025t}-t-41)}$
(dabei kann die rechte Seite je nach Rechner und Rechnereinstellung variieren).
Die rechte Seite der obigen Gleichung ist nicht konstant, also liegt kein logistisches Wachstum vor.
Hinweis: Eine andere Argumentation kann z. B. mit dem Vitalitätsknick oder über Symmetrieargumente erfolgen.

• Die Lösungsfunktion h_1 (gestrichelt gezeichnet) aus diesem Aufgabenteil passt am Anfang besser – die Regressionsfunktion (durchgehend gezeichnet) liefert eine Anfangshöhe von 1,7 m im Gegensatz zu den 0,2 m aus der Vorgabe. Mit 65,8 m ist die maximale Höhe für h_1 jedoch viel zu groß. Die maximale Höhe von h passt besser zu den vorgegebenen Endwerten der Tabelle.



</td><td></td><td>35</td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

• Aus $H(0)=40$ und $H(0,25)=1,3$ folgt $H(r) = 40\cdot e^{-(-16\cdot\ln(0,0325))\cdot r^2}$.

• Nun wird mithilfe des solve-Befehls die Gleichung $H(r)=x$ nach r aufgelöst und man erhält als Term der Umkehrfunktion $H^{-1}(x) = 0,135056\cdot\sqrt{-\ln\dfrac{x}{40}}$.

• Damit ergibt sich das Rotationsvolumen
$$V(80) = \pi\cdot\int_0^{40}\left(H^{-1}(x)\right)^2 dx\,.$$
$$\approx 2,29213$$
Das Volumen einer 80-jährigen Douglasie beträgt ungefähr 2,3 m³.

</td><td></td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

LA/AG 1

II.1 Zeltkirche

Ein Architekt bekommt den Auftrag, nach dem Vorbild von St. Peter auf Spiekeroog (siehe Abbildung 1) eine neue Kirche zu planen.

Abbildung 1

Fachleute entwerfen ein mathematisches Modell für das Vorhaben. Dazu betrachten sie die Erdoberfläche als x_1-x_2-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems. Alle Längen haben die Einheit Meter.

Die neue Kirche soll 12 Stützbalken erhalten, die von der Spitze S ins Erdreich führen (siehe Abbildung 2).
Der Dachspitze S ordnen sie den Punkt $S(0|0|20)$ zu.
Für die Beschreibung der Lage dieser Balken stellen sie die Geradenschar g_n auf:

$$g_n : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ -20 \end{pmatrix}, n \in \{0,1,2,\ ...\ ,11\} \text{ mit}$$

$$x_1(n) = 15 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{n}{6}\right) \text{ und } x_2(n) = 15 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{n}{6}\right) + 5\ .$$

Dabei sind $x_1(n)$ und $x_2(n)$ mithilfe des Bogenmaßes zu berechnen.

Die Variable n gibt eine Nummerierung der Balken an.

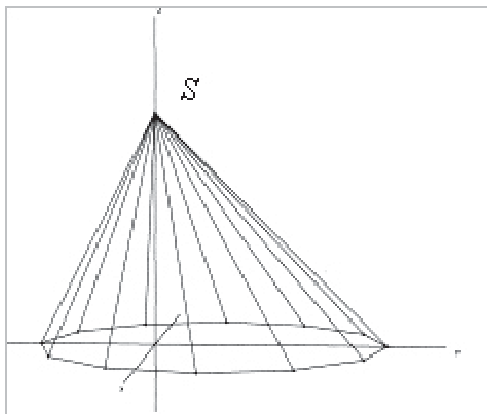


Abbildung 2

a) Die Schnittpunkte der Schargeraden mit der x_1-x_2-Ebene, die sogenannten Durchstoßpunkte, werden mit Q_n bezeichnet. In der Tabelle sind die ersten 4 Punkte mit einer Genauigkeit von einer Nachkommastelle angegeben.

n	$Q_n(x_1(n)\mid x_2(n)\mid 0)$
0	$(0\mid 20,0\mid 0)$
1	$(7,5\mid 18,0\mid 0)$
2	$(13,0\mid 12,5\mid 0)$
3	$(15,0\mid 5,0\mid 0)$

- Zeichnen Sie ein Schrägbild für einen Ausschnitt des Kirchenmodells mithilfe der Tabellenwerte der ersten vier Durchstoßpunkte. Verwenden Sie das vorbereitete Koordinatensystem der Anlage.
- Bestätigen Sie die Koordinaten für Q_3 und berechnen Sie die Koordinaten für Q_4 und Q_5. **(10P)**

Die Anordnung der Durchstoßpunkte Q_n soll nun genauer betrachtet werden.

b) Weisen Sie nach, dass die Punkte Q_n mit $n \in \{0,1,2,\ ...\ ,11\}$ auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0|5|0)$ liegen. **(10P)**

c) • Bestimmen Sie eine Funktion für die Länge des Balkens von S nach Q_n in Abhängigkeit von n.

• Ermitteln Sie den gesamten Bedarf an Balkenholz in Metern. **(15P)**

d) Die Seitenflächen der Zeltkirche sollen mit Kupferplatten belegt werden. Ermitteln Sie die Größe der Dreiecksfläche SQ_1Q_2, um den Materialbedarf abschätzen zu können. **(10P)**

e) Vor der Kirche soll ein Fahnenmast mit dem Fußpunkt $F(22|12|0)$ und der Spitze $H(22|12|10)$ aufgestellt werden.

• Ergänzen Sie diesen Fahnenmast in Ihrer Schrägbildzeichnung.

• Fällt Sonnenlicht mit dem Richtungsvektor $\vec{v}_{Sonne} = \begin{pmatrix} -15 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ ein, so wirft der Fahnenmast einen Schatten, der auf zwei Dreiecksflächen der Kirche und außerdem auf den Boden fällt. Der Schattenpunkt von H liegt auf der Dreiecksfläche SQ_1Q_2.
Dieser Schatten soll gezeichnet werden. Ermitteln Sie die dafür benötigten Punkte. Zeichnen Sie anschließend den Streckenzug des Schattens in Ihrer Schrägbildzeichnung der Anlage ein. **(30P)**

f) Auf die Innenseite der Dreiecksfläche SQ_1Q_2 möchte ein Künstler ein Wandbild malen. Es soll geprüft werden, ob die Lichtverhältnisse am ausgewählten Ort auch ohne Tageslicht günstig sein werden. Zur Ausleuchtung des Kirchenraums ist eine kugelförmige Lampe vorgesehen, deren Mittelpunkt sich senkrecht unter der Spitze S im Punkt $L(0|0|5)$ befindet (siehe Abb.3). Für die folgenden Rechnungen soll die Lampe als punktförmig aufgefasst werden.

Abbildung 3

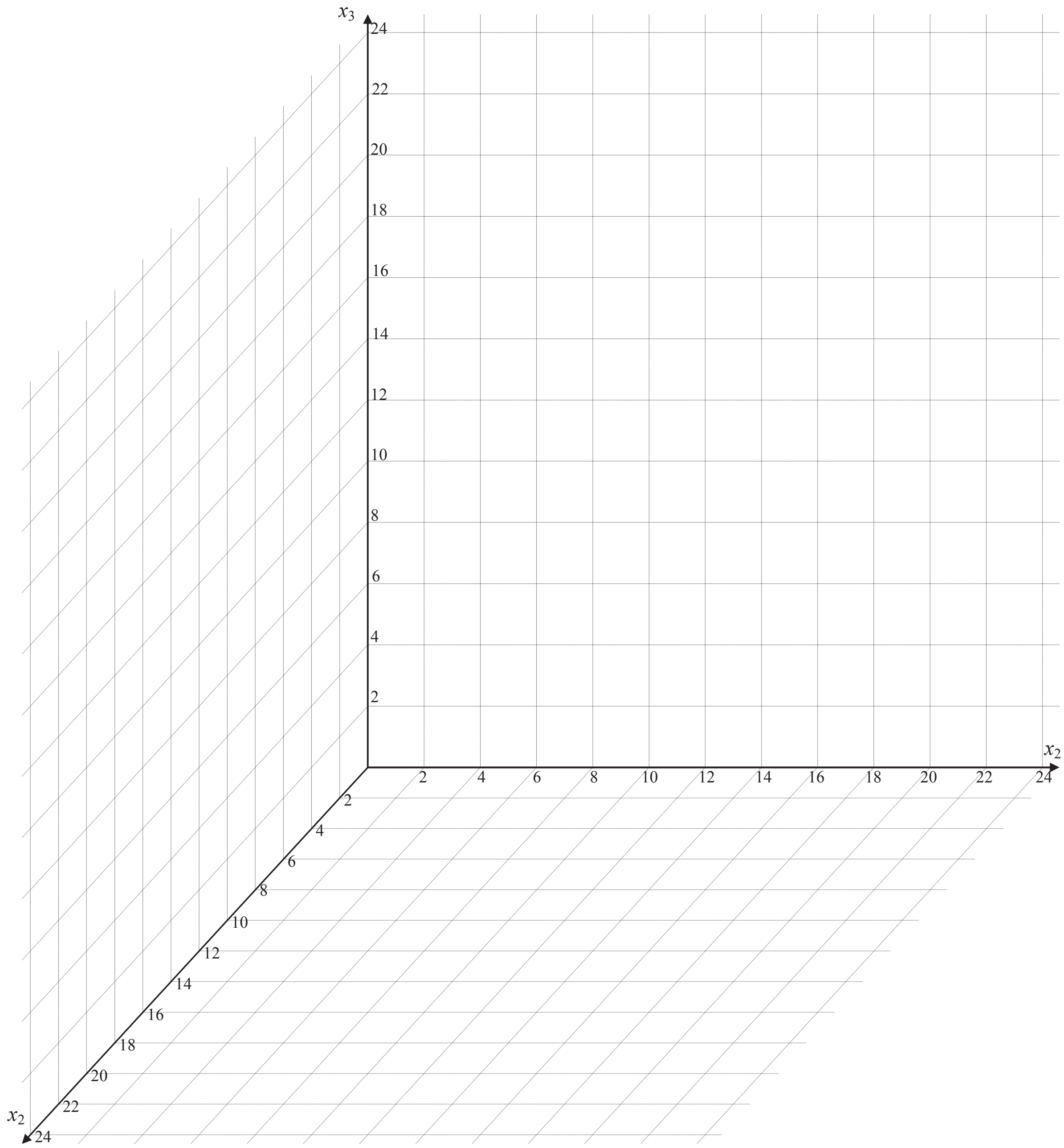
• Fachleute sagen, dass diese Lampe bis zu einer Entfernung von rund 9 Metern gut ausleuchtet. Begründen Sie, dass kein Punkt der ausgewählten Dreiecksfläche SQ_1Q_2 gut ausgeleuchtet wird.

• Die Fachleute gehen davon aus, dass Flächen in einer Entfernung von 10,40 m nicht ideal, aber noch ausreichend ausgeleuchtet werden. Die Auswertung dieser Informationen im Architektenbüro ergibt:

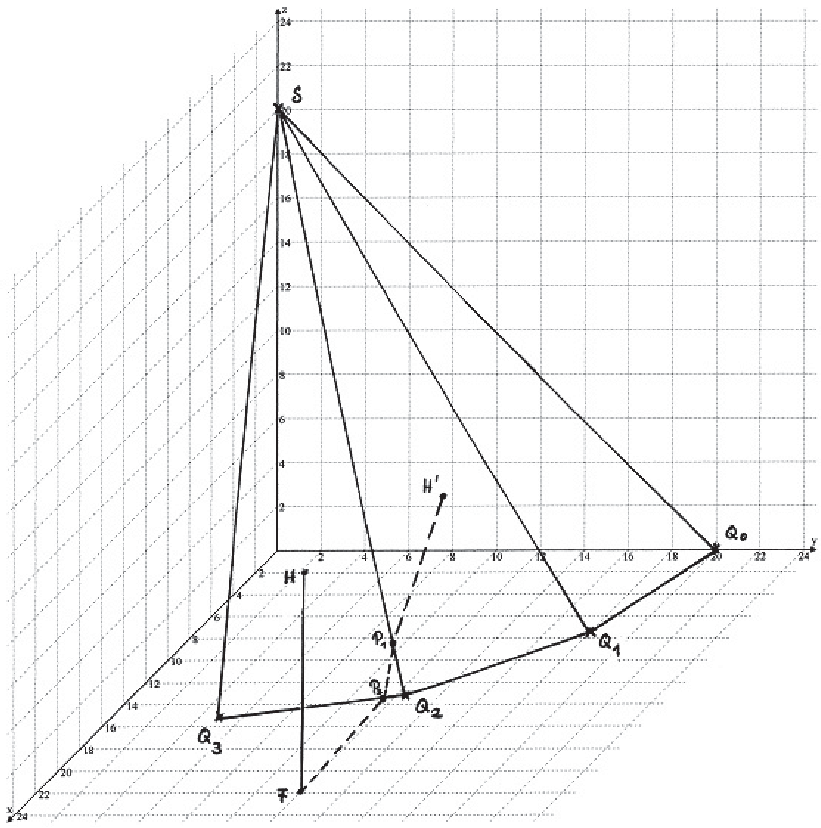
Auf der dreieckigen Wand SQ_1Q_2 entsteht eine ausreichend ausgeleuchtete Fläche für das geplante Kunstwerk. Diese Fläche hat in guter Annäherung die Form eines vollständigen Halbkreises mit dem Mittelpunkt $L'(5{,}3|5{,}3|11{,}7)$ und dem Radius 2,7 m.

Weisen Sie nach, dass diese Auswertung richtig ist. **(25P)**

Anlage zur Aufgabe „Zeltkirche“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• (Das Schrägbild enthält die Lösung der Aufgabe e).)  • Für $r = 1$ ist die x_3-Komponente null. Damit hat Q_4 ungefähr die Koordinaten $(13{,}0\|-2{,}5\|0)$ und Q_5 hat ungefähr $(7{,}5\|-8{,}0\|0)$ als Koordinaten. *Hinweis: Der Nachweis für Q_3 diente nur dazu, dass die Schülerinnen und Schüler überprüfen sollen, ob ihr Lösungsansatz richtig ist.*	10		
b)	Sei Q_n ein beliebiger Durchstoßpunkt. Dann gilt nach Definition: $\overrightarrow{MQ_n} = \begin{pmatrix} 15 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{n}{6}\right) \\ 15 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{n}{6}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$. Dieser Vektor hat für jedes n den Betrag $\left\|\overrightarrow{MQ_n}\right\| = \sqrt{15^2 \cdot \left(\sin^2\left(\pi \cdot \frac{n}{6}\right) + \cos^2\left(\pi \cdot \frac{n}{6}\right)\right)} = 15$.			

	Lösungsskizze	I	II	III
	Also haben alle Punkte Q_n einen Abstand von 15 m zum Punkt M und liegen damit auf einem Kreis mit Mittelpunkt M.		10	
c)	• Es ist $\left\|\overrightarrow{SQ_n}\right\|$ für jedes n zu bilden. $$\overrightarrow{SQ_n} = \begin{pmatrix} 15\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{6}\right) \\ 15\cos\left(\pi\cdot\frac{n}{6}\right)+5 \\ -20 \end{pmatrix}$$ Damit folgt: $$l(n) = \left\|\overrightarrow{SQ_n}\right\| = \sqrt{\left(15\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{6}\right)\right)^2 + \left(15\cos\left(\pi\cdot\frac{n}{6}\right)+5\right)^2 + 20^2} = 5\cdot\sqrt{6\cos\left(\pi\cdot\frac{n}{6}\right)+26}\,.$$ • Für den gesamten Holzbedarf müssen 12 Balkenlängen aufsummiert werden: $\sum_{n=0}^{11} l(n) \approx 304,9099$. Es werden also rund 305 m Balkenholz benötigt.		15	
d)	Mit der Definition aus dem Aufgabenteil c) bestimmt man die Längen der beiden Seiten. Der Winkel α bei S im Dreieck SQ_1Q_2 kann mithilfe des Schnittwinkels der beiden Vektoren $\overrightarrow{SQ_1}$ und $\overrightarrow{SQ_2}$ ermittelt werden. $$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{SQ_1}\cdot\overrightarrow{SQ_2}}{\left\|\overrightarrow{SQ_1}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{SQ_2}\right\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{SQ_1}\cdot\overrightarrow{SQ_2}}{l(1)\cdot l(2)}\right) \approx 16,14°\,.$$ Die Länge der Höhe h_a auf der Seite $a = \overline{SQ_1}$ lässt sich über die Gleichung $h_a = l(2)\cdot\sin\alpha$ bestimmen: $h_a \approx 7,49$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Für die Dreiecksfläche ergibt sich dann
$A = \frac{1}{2} \cdot l(1) \cdot l(2) \cdot \sin\alpha$
$\approx 104{,}52507$
Die Dreiecksfläche SQ_1Q_2 hat einen Flächeninhalt von ungefähr 105 m^2.
Hinweis: In diesem Aufgabenteil muss für die Berechnungen mit Winkeln zwischen Bogenmaß und Grad hin und her geschaltet werden. Durch Unachtsamkeiten können dort Fehler entstehen.
Die Längen $l(1)$ und $l(2)$ werden zwar nicht explizit gebraucht, werden als Korrekturhilfe hier trotzdem angegeben:
$l(1) \approx 27{,}93$
$l(2) \approx 26{,}93$
</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>
• Für die Zeichnung siehe Lösung vom Aufgabenteil a).
• Sei $E_{1,2}$ die Ebene, die durch die Punkte S, Q_1 und Q_2 verläuft und $E_{2,3}$ die Ebene, die durch die Punkte S, Q_2 und Q_3 verläuft.
Aus der Sonnenstrahlrichtung lässt sich abschätzen, dass der Fahnenmast seinen Schatten außer auf die Ebene $E_{1,2}$ auch auf die Ebene $E_{2,3}$ wirft.
(1) Ermittlung des Schattenpunktes H' vom Punkt H auf der Ebene $E_{1,2}$.
Es ist der Schnittpunkt der Ebene $E_{1,2}$ mit der Geraden durch die Mastspitze H und dem Richtungsvektor $\vec{v}_{Sonne}$ zu bilden.
$E_{1,2} : \vec{x} = \vec{S} + k \cdot \overrightarrow{SQ_1} + l \cdot \overrightarrow{SQ_2}$ und $g_{Schatten} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 22 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$
Mithilfe des solve-Befehls löst sich die Gleichung $g_{Schatten} = E_{1,2}$ u. a. zu
$r = \frac{425}{422} \approx 1{,}00711$ und damit errechnet sich der Schattenpunkt ungefähr zu $H'(6{,}89 \,|\, 10{,}99 \,|\, 5{,}97)$.
(2) Für die Ermittlung des Schattenpunktes P_1 auf der Geraden g_{SQ_2} durch S und Q_2 wird der Schnittpunkt von g_{SQ_2} mit der Schattenebene $E_{Schatten}$, die durch die drei Punkte H, F und H' verläuft, berechnet. Es gilt
$E_{Schatten} : \vec{x} = \overrightarrow{H} + k \cdot \overrightarrow{HF} + l \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $g_{SQ_2} : \vec{x} = \vec{S} + r \cdot \overrightarrow{SQ_2}$.
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Mithilfe des solve-Befehls löst sich die Gleichung $E_{Schatten} = g_{SQ_2}$ u. a. zu $r = \frac{316}{349} \approx 0{,}90544$ und man errechnet sich der Schattenpunkt $P1$ ungefähr zu $P_1(11{,}77 \mid 11{,}32 \mid 1{,}89)$. (3) Entsprechend wird nun der Schnittpunkt der Schattenebene $E_{Schatten}$ mit der Geraden $g_{Q_2Q_3}$ durch Q_2 und Q_3 berechnet. Es gilt $g_{Q_2Q_3}: \vec{x} = \overrightarrow{Q_2} + r \cdot \overrightarrow{Q_2Q_3}$. Die Gleichung $E_{Schatten} = g_{Q_2Q_3}$ wird mithilfe des solve-Befehls gelöst und man erhält u. a. $r = \frac{33}{229} \approx 0{,}14410$. Daraus ergibt sich der Schattenpunkt $P_2(13{,}92 \mid 11{,}42 \mid 0)$ auf der Kante $\overline{Q_2Q_3}$. • Für die Zeichnung siehe Aufgabenteil a)	10	20	
f)	• (1) Der Abstand vom Punkt L zur Ebene $E_{1,2}$ wird berechnet. Dabei wird die Abstandsformel aus der Formelsammlung benutzt. Zu bestimmen ist noch ein Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ der Ebene $E_{1,2}$. Ist die Ebene in Parameterform gegeben, so steht $\vec{n}$ senkrecht auf jedem Richtungsvektor. Man erhält $\vec{n}$ also als eine Lösung der Gleichungssystems $\begin{cases} \overrightarrow{SQ_1} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{SQ_2} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$. Mithilfe des solve-Befehls erhält man $n_1 = \frac{40}{51} \cdot c$ und $n_2 = \frac{40}{51} \cdot c$ und $n_3 = c$. Wählt man z. B. $c = 51$, so erhält man $n = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 51 \end{pmatrix}$ als einen Normalenvektor und $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{\lvert \vec{n} \rvert}$ als entsprechenden Normaleneinheitsvektor. Setz man in der Abstandsformel $d = \lvert (\vec{v}_R - \vec{v}_0) \cdot \vec{n}_0 \rvert$ $L = R$ und S als den festen Punkt der Ebene, so erhält man $d \approx 10{,}04 > 9$. Für alle Punkte der Ebene $E_{1,2}$ ist der Abstand zur Lampe mindestens 10,04 m groß, also ist auch keine gute Ausleuchtung der Dreiecksfläche gegeben. • (2) Der Halbkreis auf der betrachteten Dreiecksfläche ist Teil der Kreisfläche, die beim Schnitt der Kugel um L mit Radius R = 10,40 m mit der Ebene $E_{1,2}$ entsteht. Der Mittelpunkt L' dieses Kreises wird bestimmt: Die Gerade g_L, die durch L läuft und senkrecht auf $E_{1,2}$ steht, bestimmt sich			

Lösungsskizze

zu:

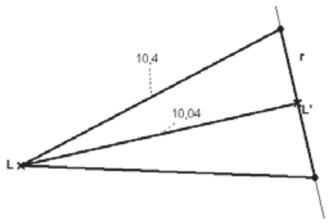
$$g_L : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 51 \end{pmatrix}.$$

Mithilfe des solve-Befehls wird nun der Schnittpunkt der Geraden g_L bestimmt. Man erhält $s = \frac{765}{5801} \approx 0{,}13187$ und damit die ungefähren Koordinaten $L'(5{,}3 \,|\, 5{,}3 \,|\, 11{,}7)$.

Der Radius berechnet sich mithilfe des Satzes von Pythagoras.

$$r = \sqrt{10{,}4^2 - 10{,}04^2}$$
$$\approx 2{,}712$$

Das entspricht der Vorgabe.



Nun muss noch nachgewiesen werden, dass etwa eine Halbkreisfläche dieser Schnittkreisfläche in der Dreiecksfläche SQ_1Q_2 liegt. Dies ist nur möglich, wenn L' ungefähr auf einem der Begrenzungsbalken liegt. Mithilfe der Grafik aus a) lässt sich abschätzen, dass L' fast auf der Geraden durch S und Q_2 liegt. Eine Rechnung bestätigt dies. Es gilt:

$$g_{SQ_2} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 12{,}5 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Für $t = 0{,}415$ bekommt man z. B. den Punkt mit den Koordinaten $(5{,}4 \,|\, 5{,}2 \,|\, 11{,}7)$, der fast mit L' übereinstimmt.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass der Halbkreis nicht über die Gerade durch S und Q_1 hinausragt. Eine Kugel um L' mit dem Radius $r = 2{,}7$ hat die Gleichung:

$$K : \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5{,}3 \\ 5{,}3 \\ 11{,}7 \end{pmatrix} \right)^2 = 2{,}7^2 .$$

Setzt man die Gerade durch S und Q_1 in die Kugelgleichung ein, ergibt sich keine Lösung für den Parameter der Geraden. Also gibt es keinen Schnittpunkt vom Kreis und der Geraden.

Zuordnung Bewertung	I	II	III
		5	20
Insgesamt 100 BWE	20	60	20

LA/AG 2

II.2 Seeschildkröten

Grüne Seeschildkröten sind weltweit vom Aussterben bedroht, sodass eine Beobachtung und Bestandsaufnahme notwendig ist.

Auf Hawaii wurde eine Population beobachtet.

Die Eiablage erfolgt an Stränden. Dabei reifen die gelegten Eier im Sand und nach etwa zwei Monaten schlüpfen die Schildkröten. Nach ca. 25 Jahren werden diese geschlechtsreif und kehren an den Strand zur Eiablage zurück.

Im Folgenden wird eine Population betrachtet, die in 3 Altersklassen unterteilt ist:

E (Eier), J (Jungschildkröten) und G (geschlechtsreife Schildröten).

Eine Population von Schildkröten wird durch den Bestandsvektor $\vec{P}_n = \begin{pmatrix} E_n \\ J_n \\ G_n \end{pmatrix}$ der Anzahlen von Individuen in den jeweiligen Altersklassen zum Zeitpunkt n angegeben.

Die jährliche Entwicklung der Schildkrötenpopulation wird durch die Lesliematrix M beschrieben.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0{,}05 & 0{,}89 & 0 \\ 0 & 0{,}0005 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

Die Übergangsraten von einer zur nächsten Altersstufe sind durchschnittliche Werte und enthalten bereits, dass nur weibliche Schildkröten Eier legen.

a) • Stellen Sie die Populationsentwicklung mit einem Übergangsgraphen dar und beschreiben Sie, welche Annahmen diesem Modell zugrunde liegen, indem Sie dabei auf alle von Null verschiedenen Elemente in der obigen Matrix M eingehen.

• Interpretieren Sie die Zahlen in der zweiten Zeile der Matrix M^2. **(20P)**

b) In einem Jahr ist der folgende Bestandsvektor ermittelt worden: $\vec{P}_0 = \begin{pmatrix} 60000 \\ 2400 \\ 600 \end{pmatrix}$

• Berechnen Sie die Anzahlen der geschlechtsreifen Schildkröten (G) nach 1, 5, 10, 20 und 40 Jahren.

• Ermitteln Sie mithilfe einer Regression den Term einer Exponentialfunktion w, welche diese Entwicklung in guter Näherung beschreibt.
Hinweis: Falls Sie w nicht ermitteln können, benutzen Sie die Ersatzfunktion ersatz mit $ersatz(x) = 589 \cdot e^{-0{,}023 \cdot x}$.

• Ermitteln Sie die maximale prozentuale Abweichung der Funktionswerte $w(x)$ von den zuvor ermittelten Anzahlen. **(15P)**

Ein Bestandsvektor $\vec{B}$ heißt reproduzierbar, wenn nach einem Zeittakt die gleiche Anzahl an Individuen in jeder Altersklasse vorhanden ist, d.h. wenn $M \cdot \vec{B} = \vec{B}$ gilt.

c) Bestätigen Sie, dass es unter den durch die Matrix M beschriebenen Umweltbedingungen keinen Bestandsvektor geben kann, der sich reproduziert. **(10P)**

d) Ein Hobbybiologe überlegt, ob man durch Bewachung und Schutz der Schildkröteneier die Gesamtpopulation stabilisieren kann.

- Bestimmen Sie dazu eine Matrix M_2, sodass es für M_2 einen Bestandsvektor gibt, der sich reproduziert. M_2 soll sich dabei nur durch dasjenige Matrixelement von M unterscheiden, welches die Übergangsrate von der Altersklasse E zur Altersklasse J beschreibt.
  Ermitteln Sie außerdem einen zugehörigen Bestandsvektor.

Die Frau des Hobbybiologen gibt zu bedenken, dass dies wiederum einen Eingriff in das Ökosystem und den Nahrungskreislauf bedeutet, dessen Folgen für die übrige Fauna nicht abzusehen wären. Vielmehr müsse der Umweltschutz so verbessert werden, dass die Überlebensrate der Jungschildkröten (J)und der geschlechtsreifen Schildkröten (G) steigt.

- Gehen Sie im Modell davon aus, dass sich unter verbesserten Umweltbedingungen **nur** die Überlebensraten der Jungschildkröten und der geschlechtsreifen Schildkröten mit demselben Faktor r erhöhen.
  Bestimmen Sie r so, dass eine Reproduktion des Bestandes möglich wird.
  Bestimmen Sie mit diesem r die neue Populationsmatrix M_3 und einen zugehörigen Bestandsvektor. **(25P)**

Zurück zu der anfangs durch M beschriebenen Entwicklung des Bestandes.

e) Angenommen, durch extreme äußere Bedingungen sind in einem Jahr alle Schildkröten gestorben, und nur 60000 Eier haben überlebt. Anschließend liegen wieder die normalen Bedingungen vor, die die Grundlage der Lesliematrix M bilden.
Geben Sie den Bestandsvektor nach 2 Zeittakten an und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. **(10P)**

Durch das anfängliche Modell wird nicht der gesamte Bestand an Schildkröten erfasst. Schildkröten können über 100 Jahre alt werden, geschlechtsreif sind sie jedoch nur ca. 20 Jahre. Es werden nun neben Eiern (E), Jungschildkröten (J), geschlechtsreife Schildkröten (G) auch alte, nicht mehr fortpflanzungsfähige Schildkröten (A) betrachtet.

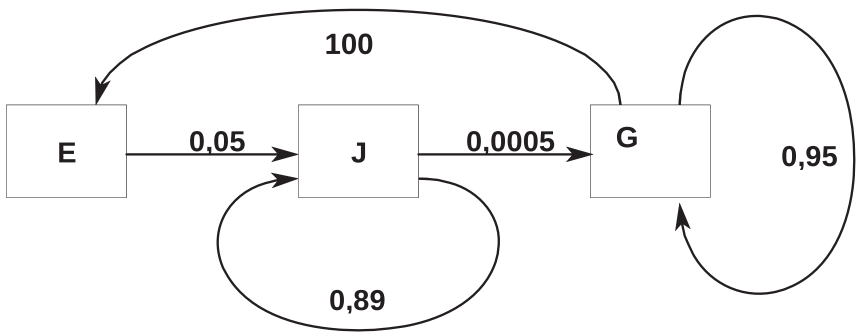
f) Die Entwicklung Population, in der nun auch die nicht mehr fortpflanzungsfähigen alten Schildkröten erfasst sind, soll durch eine Matrix $M_{neu} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ n & p & t & u \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

- Entscheiden Sie, welche Elemente der Lesliematrix M_{neu} gleich null und welche von null verschieden sein müssen.
- Untersuchen Sie, ob – und wenn ja wie – sich die von null verschiedenen Matrixelemente von M beim Übergang auf M_{neu} verändern.
- Neu hinzugekommen sind die Matrixelemente n, p, t, u, d, h, m.
  Beurteilen Sie, welche Aussagen Sie über die von null verschiedenen, neu hinzugekommenen Matrixelemente machen können. **(20P)**

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

• Übergangsgraph:



Folgende Annahmen liegen dem Modell in jedem Zeittakt (ein Jahr) zugrunde:
Jede geschlechtsreife Schildkröte legt durchschnittlich 100 Eier.
Nur noch 5 % der ursprünglich aus den Eiern geschlüpften kleinen Schildkröten sind am Leben.
89 % der Jungschildkröten verbleiben innerhalb ihrer Altersklasse.
0,5 Promille der Jungschildkröten wachsen zu geschlechtsreifen Schildkröten heran.
Die Überlebensrate der geschlechtsreifen Schildkröten beträgt 95 %.

• $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}05 & 95 \\ 0{,}0445 & 0{,}7921 & 5 \\ 0{,}000025 & 0{,}00092 & 0{,}9025 \end{pmatrix}$

Interpretation der 2. Zeile:
4,45 % der Schildkröteneier werden durchschnittlich 2 Jahre überleben **und** werden zu Jungtieren, 79,21 % der Jungschildkröten (*J*) verbleiben durchschnittlich in der Altersklasse *J* und von 100 gelegten Eiern gibt es nach 2 Jahren durchschnittlich 5 Jungtiere.

</td><td>10</td><td>5</td><td>5</td></tr>
</table>

Lösungsskizze

Zuordnung Bewertung: I | II | III

b)

- Die Anzahlen wurden ermittelt durch Berechnung von $M^n \cdot \overrightarrow{P_0}$.

n	1	5	10	20	40
G_n	571	481	405	309	197
prozentuale Abweichung	3,6%	-2,6%	-6,1%	-5,7%	4,4%
prozentuale Abweichung der Ersatzfunktion	3,6%	-2,6%	-6,3%	-5,9%	4,0%

Hinweis: Je nach Rechnertyp variieren die Ergebnisse geringfügig.

- Eine exponentielle Regression liefert die Gleichung $w(x) \approx 565{,}88 \cdot 0{,}9729^x \approx 565{,}88 \cdot e^{-0{,}02750 \cdot x}$.
  Hinweis: Die Regression liefert eine leicht abweichende Funktion, wenn der Startpunkt (0|600) nicht berücksichtigt wird.

- Die prozentuale Abweichung wurde folgendermaßen ermittelt: $1 - \frac{w(n)}{G_n}$
  Die Ergebnisse finden sich in der obigen Tabelle.
  Die maximale prozentuale Abweichung beträgt 6,1%.
  Für die Ersatzfunktion sind es 6,3%.

I	II	III
5	10	

c)

Das Gleichungssystem, das sich aus dem Ansatz $M \cdot \begin{pmatrix} E_n \\ J_n \\ G_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n \\ J_n \\ G_n \end{pmatrix}$ ergibt, hat nur die Lösung $E_n = J_n = G_n = 0$.

Also gibt es keinen Bestand, der sich reproduziert.

I	II	III
5	5	

d)

- Gesucht ist x, sodass zu $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ x & 0{,}89 & 0 \\ 0 & 0{,}0005 & 0{,}95 \end{pmatrix}$ ein stabiler Bestandsvektor $\overrightarrow{P_n} = \begin{pmatrix} E_n \\ J_n \\ G_n \end{pmatrix}$ existiert.

  Aus dem Ansatz $M_2 \cdot \begin{pmatrix} E_n \\ J_n \\ G_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n \\ J_n \\ G_n \end{pmatrix}$ erhält man

  $x = 0{,}11$ und $E_n = J_n$ beliebig wählbar und $100 \cdot G_n = E_n$.

  Damit ist $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0{,}11 & 0{,}89 & 0 \\ 0 & 0{,}0005 & 0{,}95 \end{pmatrix}$ eine mögliche Matrix. Setzt man z. B.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	$E_n = J_n = 10000$, so erhält man $G_n = 100$ und den reproduzierbaren Bestandsvektor $\begin{pmatrix} 10000 \\ 10000 \\ 100 \end{pmatrix}$. *Hinweis: Andere Rechner liefern z. B.* $x = 0{,}11 \cdot \frac{J_n}{E_n}$ *und* $0{,}95 \cdot G_n + 0{,}0005 \cdot J_n = G_n$ *und* $100 \cdot G_n = E_n$. • Gesucht ist *r*, sodass zu $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0{,}05 & 0{,}89r & 0 \\ 0 & 0{,}0005r & 0{,}95r \end{pmatrix}$ ein stabiler Bestandsvektor $\overrightarrow{P_n} = \begin{pmatrix} E_n \\ J_n \\ G_n \end{pmatrix}$ existiert. Der Ansatz $M_3 \cdot \begin{pmatrix} E_n \\ J_n \\ G_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n \\ J_n \\ G_n \end{pmatrix}$ liefert die Lösungen $r \approx 1{,}02267$ und $E_n \approx 1{,}79647 \cdot \mathrm{J}_n$ und $G_n \approx 0{,}017965 \cdot J_n$ und $J_n > 0$ beliebig oder $r \approx 1{,}15651$ und $E_n \approx -0{,}585944 \cdot \mathrm{J}_n$ und $G_n \approx -0{,}005859 \cdot J_n$ und $J_n > 0$ beliebig . Die zweite Lösung ist im Sachkontext unsinnig, da z. B. $0{,}89 \cdot 1{,}15651 > 1$. Die erste Lösung ergibt die Matrix $M_3 \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0{,}05 & 0{,}910176 & 0 \\ 0 & 0{,}000511 & 0{,}971537 \end{pmatrix}$. Setzt man z. B. $J_n = 30000$ so erhält man als reproduzierbaren Bestandsvektor $\overrightarrow{P_n} \approx \begin{pmatrix} 53894 \\ 30000 \\ 539 \end{pmatrix}$		15	10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Mit $\vec{P_1} = \begin{pmatrix} 60000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert $M^2 \cdot \vec{P_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2670 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ nach zwei Jahren 1-2 geschlechtsreife Schildkröten. Dies kann nicht sein, da Schildkröten erst nach ca. 25 Jahren geschlechtsreif werden. Auch wenn wieder identische Verhältnisse herrschen, so ist die Entwicklung der Population nicht unabhängig vom momentanen Bestand und die Matrix ist in diesem Fall nur bedingt geeignet, die Entwicklung zu beschreiben.	5		5
f)	• Da sich nur geschlechtsreife Schildkröten fortpflanzen, gilt: $a = b = d = 0$, $c \neq 0$. Jungschildkröten entwickeln sich aus den Eiern oder verbleiben in der „Altersstufe“ (*J*). Hieraus folgt: $g = h = 0$, $e \neq 0$, $f \neq 0$. Geschlechtsreife Schildkröten entwickeln sich aus den Jungschildkröten oder verbleiben in der „Altersstufe“ (*G*). Hieraus folgt: $j = m = 0$, $k \neq 0$, $l \neq 0$. Aus analogen Überlegungen zu den alten Schildkröten folgt: $n = p = 0$, $t \neq 0$, $u \neq 0$. • Die von null verschiedenen, „alten“ Matrixelemente verändern sich nicht, denn die Hinzunahme der alten Schildkröten verändert nichts an der Entwicklung der jungen Schildkröten. Nach dem ersten Spiegelpunkt sind nur *t* und *u* von null verschieden. *t* gibt die Übergangsrate der geschlechtsreifen zu den alten Schildkröten an. Da 95% der geschlechtsreifen Schildkröten in dieser Gruppe verbleiben, muss $0 < t < 5\%$ gelten. Die übrigen 5% sind aus dieser Klasse herausgewachsen, sind also gealtert, oder haben das Jahr nicht überlebt. *u* gibt an, wie viele alte Schildkröten in der Gruppe der alten Schildkröten verbleiben. Über *u* kann keine Aussage gemacht werden. Bei der Festsetzung der Überlebenswahrscheinlichkeit der alten Schildkröten muss berücksichtigt werden, dass jede solche Schildkröte bereits ein Alter von mindestens 45 Jahren erreicht hat und einige noch weit mehr als 55 Jahre Lebenserwartung haben müssen. Ob nun die jährlich Überlebenswahrscheinlichkeit unter oder über der „Verbleiberate“ von *G* von 0,95 festgesetzt wird, hängt davon ab, ob man den „Alten“ höhere Sterbewahrscheinlichkeiten z. B. aus „Altersschwäche“ zuschreibt oder nicht. *Ähnliche Überlegungen werden von den Schülerinnen und Schülern erwartet.*		15	5
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

STOCHASTIK 1

III.1 Nach der Wahl

In dieser Aufgabe geht es um zwei vereinfachte mathematische Modelle für Wahlprognosen.

Bei einer Landtagswahl wird vom Spitzenkandidaten der Partei ABC erwartet, dass er möglichst bald nach Schließung der Wahllokale vor die Kameras tritt, um das Wahlergebnis zu interpretieren.
Er will natürlich unterschiedliche Erklärungen abgeben, je nachdem, ob die Wahl für ihn gewonnen oder verloren wurde.
Er geht davon aus, dass die Wahl für ihn gewonnen wäre, wenn die ABC <u>mindestens einen Anteil von 44% der abgegebenen Stimmen</u> bekäme, da dann entsprechend der politischen Lage das bisherige Regierungsbündnis fortgesetzt werden könnte.
Je nach Wahlbeteiligung werden 10 bis 11 Millionen Menschen an der Wahl teilnehmen.

Kurz nach der Wahl wird das schnell ausgezählte Ergebnis von 500 repräsentativ ausgewählten Wählern als Stichprobe mitgeteilt.

a) Die Anzahl X der Wähler der Stichprobe, die für die ABC stimmen, kann als binomialverteilt angesehen werden. Geben Sie Gründe dafür an. **(5P)**

b) Nehmen Sie zunächst beispielhaft an, der unbekannte Stimmenanteil für die ABC unter <u>allen abgegebenen Stimmen</u> wäre 43%.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dann auch genau 43%, also 215 der 500 ausgezählten Stimmen, auf die ABC entfallen.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Stichprobenergebnis zwischen 210 und 230 Stimmen für die ABC liegt (unter Einschluss der beiden Werte).
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass <u>mindestens 44% von den 500 ausgezählten Stimmen</u> auf die ABC entfallen.
- Beschreiben Sie, was insbesondere die dritte Beispielrechnung für eine spätere Interpretation der Stichprobenergebnisse bedeutet. **(25P)**

Die bisherigen Betrachtungen gingen einfach davon aus, dass das Ergebnis der gesamten Wahl bekannt sei (43% für die ABC).

Zum betrachteten Zeitpunkt kurz nach Schließung der Wahllokale ist aber der Stimmenanteil der ABC-Wähler noch unbekannt. Deshalb ist die umgekehrte Fragestellung die eigentlich wichtige: Welche Folgerungen kann man aus den Ergebnissen der Stichprobe im Hinblick auf das Gesamtergebnis ziehen?

In c) einerseits und d) bis f) andererseits werden dazu zwei völlig unterschiedliche mathematische Vorgehensweisen betrachtet.

<u>Die Methode des Signifikanztests</u>

c) Es sei p der unbekannte Stimmenanteil für die ABC.

- Bestimmen Sie für die beiden Nullhypothesen
  $\mathrm{H}_0 :\ p < 44\%$ (Die Wahl ist für die ABC verloren) und
  $\widehat{\mathrm{H}_0} :\ p \geq 44\%$ (Die Wahl ist für die ABC gewonnen)
  auf dem 5%-Niveau jeweils einen entsprechenden Ablehnungsbereich.
- In der obigen beschriebenen Stichprobe von 500 Wählern haben <u>221 Wähler</u> für die ABC gestimmt. Entscheiden Sie, ob aufgrund dieses Ergebnisses mit Signifikanz auf Sieg oder Niederlage der ABC statistisch geschlossen werden kann. **(25P)**

Die Methode der „Bayes-Statistik“

Hier werden Hypothesen als Ereignisse von Zufallsexperimenten gedeutet, die – je nach Betrachter - subjektive Wahrscheinlichkeiten haben (a-priori) und die sich dann durch Stichprobenergebnisse ändern. Die Stichprobenergebnisse werden dabei als Bedingungen in bedingten Wahrscheinlichkeiten (a-posteriori) gedeutet. Die Rechnungen verwenden den Satz von Bayes.

A-priori-Wissen: Aus vorangegangenen Meinungsumfragen wurde deutlich, dass die Wahl vermutlich äußerst knapp ausgehen würde. Die Parteistrategen schätzten deshalb unmittelbar vor der Wahl die Gewinnchancen für die ABC mit etwa 50% ein. Sie gingen auch davon aus, dass der Gesamtstimmenanteil p für die ABC mit Gewissheit irgendwo zwischen 40% und 47% liegen wird.
Um nicht mit zu vielen möglichen Ergebnissen zu rechnen, lassen sie deshalb im Modell für p nur acht gerundete Werte zu: 40%, 41%, 42%, … , 46%, 47%. Andere Werte schließen sie aus.

In der Stichprobe von 500 Wählern haben 221 Wähler für die ABC gestimmt. (vgl. c). Dieses Ereignis werde mit B bezeichnet.
Außerdem sei $E_{0,40}$ das Ereignis, dass $p = 0,40$ wahr ist. $E_{0,41}$, $E_{0,41}$, ... , $E_{0,47}$ sind entsprechend definiert. Der Satz von Bayes kann dann verwendet werden: $P(E_p \mid B) = \dfrac{P(E_p) \cdot P(B \mid E_p)}{\sum\limits_y P(E_y) \cdot P(B \mid E_y)}$.

d) Die Wahlstrategen halten zunächst diese 8 Ergebnisse a priori alle für gleichwahrscheinlich, d. h.:

$$P\left(E_p\right) = \frac{1}{8} \qquad p \in \{0,40\ ;\ 0,41\ ;\ ...\ ;\ 0,47\}$$

- Geben Sie den inhaltlichen Sinn dieser Gleichverteilungsannahme an.
- Begründen Sie, dass auch die „50% Siegesannahme vor der Wahl“ in diesem Modell korrekt wiedergegeben ist. **(10P)**

e)
- Zeigen Sie: $P(E_p \mid B) = \dfrac{p^{221} \cdot (1-p)^{279}}{\sum\limits_{i=40}^{47} \left(\dfrac{i}{100} \cdot\right)^{221} \cdot \left(1 - \dfrac{i}{100}\right)^{279}} \qquad p \in \{0,40\ ;\ 0,41\ ;\ ...\ ,\ 0,46\ ;\ 0,47\}$
- Bestimmen Sie in Tabellenform die a-posteriori-Verteilung über alle 8 als möglich angenommenen Wahlergebnisse.
- Ermitteln Sie daraus die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit dafür, dass der genannte Spitzenkandidat der ABC die Wahl gewonnen hat. Und interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf die abzugebende Erklärung des Spitzenkandidaten. **(20P)**

f) Die Gleichverteilungsannahme ist aus politischer Perspektive ziemlich problematisch. Sinnvoller wäre es, eine a-priori-Verteilung für die 8 betrachteten möglichen Wahlendergebnisse zu betrachten, die von der Mitte nach außen abnimmt. Ein möglicher Ansatz wäre z. B.:

$$P\left(E_p\right) = r \cdot e^{-1000(p-0,435)^2} \qquad p \in \{0,40\ ;\ 0,41\ ;\ ...\ ;\ 0,46\ ;\ 0,47\}$$

Die Konstante r wird dabei so bestimmt, dass der Term - bezogen auf die 8 möglichen Argumente für E_p bzw. p - eine Wahrscheinlichkeitsverteilung liefert.

- Zeigen Sie, dass die Konstante r den Wert $r \approx 0,1921$ und begründen Sie, dass die „50% Siegesannahme“ vor der Wahl auch in diesem Modell korrekt erfasst ist.
- Bestimmen Sie mithilfe der hier angenommenen veränderten a-priori-Verteilung, erneut die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit dafür, dass der genannte Spitzenkandidat der ABC die Wahl gewonnen hat. **(15P)**

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Wegen der großen Anzahl an Wählern (über 10 Millionen) relativ zur Stichprobengröße von 500 ausgezählten Wählern, kann das tatsächliche Ziehen von 500 abgegebenen Wählerstimmen mit zu vernachlässigendem Fehler als unabhängiges „Ziehen mit Zurücklegen“ betrachtet werden. Repräsentativ bedeutet hier, dass der Stimmenanteil für die ABC unter allen abgegebenen Wählerstimmen als Bernoulli-Parameter p in der Stichprobe verwendet werden kann. Die Verteilung der Anzahl X von ABC-Wählern in der Stichprobe kann deshalb als B(500 ; p)-verteilt angesehen werden.</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Hinweis: Je nach Rechnertyp variieren die Bezeichnungen.
• $binomPdf\,(500\ ,\ 0{,}43\ ,\ 215) = \binom{215}{500} \cdot 0{,}43^{215} \cdot 0{,}57^{285} \approx 0{,}036019$
Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 215 Stimmen auf die ABC entfallen, beträgt etwa 3,6%.
• Entweder rechnet man die zugehörige Summe von Werten der B(500 ; p)-Verteilung aus, oder man bildet die entsprechende Differenz von akkumulierten Werten:
$binomCdf\,(500, 0{,}43, 210, 230)$
$= \sum_{k=210}^{230} \binom{500}{k} \cdot 0{,}43^{k} \cdot 0{,}57^{500-k}$
$= \sum_{k=0}^{230} \binom{500}{k} \cdot 0{,}43^{k} \cdot 0{,}57^{500-k} - \sum_{k=0}^{209} \binom{500}{k} \cdot 0{,}43^{k} \cdot 0{,}57^{500-k}$
$\approx 0{,}608761$
Die Wahrscheinlichkeit, dass das Stichprobenergebnis zwischen 210 und 230 Stimmen für die ABC liegt, beträgt ca. 61%.
• 44% von 500 Personen sind 220 Personen.
$binomCdf\,(500, 0{,}43, 220, 500) = 1 - \sum_{i=0}^{219} \binom{500}{i} \cdot 0{,}43^{i} \cdot 0{,}57^{500-i}$
$\approx 0{,}341564$
Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 44% der Stichprobenstimmen auf die ABC entfallen, beträgt etwa 34%.
Bemerkung: Die Werte von akkumulierten Binomialverteilungen, also $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^{i} \cdot (1-p)^{n-i}$ *können auch direkt aus den Rechnern gewonnen werden.*</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>• Wenn lediglich die Stichprobe 44% oder mehr ABC-Wähler enthält, sollte sich der Spitzenkandidat nicht allzu sicher sein, die Wahl gewonnen zu haben: Bei nämlich exakt nur 43% ABC-Wählern unter allen Wähler würde die Stichprobe mit immerhin ca. 34 % Wahrscheinlichkeit ein falsches Ergebnis „vorgaukeln“, dieser Wert wäre noch höher, wenn die Wahl für die ABC tatsächlich ganz knapp verloren wäre. Z. B. bei 43,9 % wäre der entsprechend berechnete Wert sogar fast 50 % !
Bemerkung: Die zweite Beispielrechnung wird nicht erwartet, aber ein qualitatives Argument in diese Richtung.</td><td>15</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>• Große Werte von X führen zur Ablehnung von H_0,
kleine Werte von X führen zur Ablehnung von $\widehat{H_0}$.
Es gilt: $binomCdf(500, 0{,}44, 239, 500) \approx 4{,}8\%$,
aber. $binomCdf(500, 0{,}44, 238, 500) \approx 5{,}8\%$
H_0 kann also auf dem 5%-Niveau signifikant abgelehnt werden, wenn mehr als 238 ABC-Stimmen in der 500er-Stichprobe gezählt werden.

Es gilt: $binomCdf(500, 0{,}44, 0, 201) \approx 4{,}8\%$, aber
$binomCdf(500, 0{,}44, 0, 202) \approx 5{,}7\%$.
$\widehat{H_0}$ kann also auf dem 5%-Niveau signifikant abgelehnt werden, wenn weniger als 202 ABC-Stimmen in der 500er-Stichprobe gezählt werden.
• Der tatsächlich ermittelte Wert von 221 ABC-Wählern befindet sich in keinem der beiden Ablehnungsbereiche, es liegt also bei diesem Verfahren für beide Tests kein signifikantes Ergebnis vor.
Der Spitzenkandidat ist so schlau wie zuvor!</td><td></td><td>25</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>• Die Gleichverteilungsannahme drückt aus, dass man alle 16 Möglichkeiten deshalb für gleichwahrscheinlich hält, weil man kein Vorwissen hat oder verwenden will. Gleichverteilung drückt „a-priori-Unwissen“ aus!
• Es sind jeweils genau 4 „Siegeswerte“ und 4 „Verlustwerte“ für p zugelassen, die wegen der Gleichverteilung auch jeweils zusammen 50% ausmachen.</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>• Es bezeichne
B: „In der Stichprobe sind 221 Stimmen für die ABC“.
E_p : Das Wahlendergebnis liefert den Anteil p für die ABC “ .
Dann gilt:
$$P(E_p \mid B) = \frac{P(E_p) \cdot P(B \mid E_p)}{\sum_y P(E_y) \cdot P(B \mid E_y)} \qquad p \in \{0{,}40 ; 0{,}41 ; \dots , 0{,}46 ; 0{,}47\}$$
$$= \frac{\frac{1}{8} \cdot \binom{500}{221} \cdot p^{221} \cdot (1-p)^{279}}{\frac{1}{8} \cdot \binom{500}{221} \cdot \sum_y y^{221} \cdot (1-y)^{279}}$$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$= \frac{p^{221}\cdot(1-p)^{279}}{\sum_{i=40}^{47}\left(\frac{i}{100}\cdot\right)^{221}\cdot\left(1-\frac{i}{100}\right)^{279}}$$

Der a-priori-Wert $\frac{1}{8}$ und der einzig vorkommende Binomialkoeffizient $\binom{500}{221}$ wirken hier als Konstanten und kürzen sich weg.

- Man erhält dann folgende a-posteriori-Verteilung als Wertetabelle mit gerundeten Werten:

p	$P(E_p \mid B)$
0,4	0,032
0,41	0,069
0,42	0,120
0,43	0,170
0,44	0,196
0,45	0,184
0,46	0,142
0,47	0,089

- Addiert man die Werte in dieser Tabelle für die Argumente $\geq 0{,}44$, so erhält man folgende a-posteriori-Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ABC die Wahl gewinnt: $p_{CPD} \approx 61\%$. Allerdings, wenn man vorsichtiger ist und nur die Argumente > 44% verwendet, erhält man nur noch $\hat{p}_{CPD} \approx 41\%$.
Der Spitzenkandidat kann optimistisch sein und sollte eine – allerdings die Möglichkeit einer Niederlage nicht ausschließende – Siegesrede halten.

</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

- Die Summe der veränderten a-priori-Werte muss 1 sein, also muss r der Kehrwert dieser Summe sein: $r = \frac{1}{\sum_{i=40}^{47} e^{-1000\left(\frac{i}{100}-0{,}435\right)^2}} \approx \frac{1}{5{,}2057} \approx 0{,}19210$
Die veränderte a-priori-Verteilung ist symmetrisch zu $p = 0{,}435$ gewählt, und auch die die vier „Gewinnausgänge“ liegen bezüglich 0,435 symmetrisch zu den vier „Verlustausgängen“, also haben die Ereignisse „ABC gewinnt die Wahl“ und „ABC verliert die Wahl“ die gleiche a-priori-Wahrscheinlichkeit, die dann natürlich 50% beträgt.
- Es ist fast genau so zu rechnen wie in d), nur dass die Konstante $\frac{1}{8}$ durch die variablen Werte $P\left(E_p\right)$ zu ersetzen sind. Dabei kürzt sich die Konstante r weg.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$\frac{\sum_{i=44}^{47} P\left(E_{\frac{i}{100}}\right)\cdot binomPdf\,(500,\frac{i}{100},221)}{\sum_{i=40}^{47} P\left(E_{\frac{i}{100}}\right)\cdot binomPdf\,(500,\frac{i}{100},221)}$$

$$\approx \frac{\sum_{i=44}^{47} 0{,}1921\cdot e^{-1000(\frac{i}{100}-0{,}435)^2}\cdot binomPdf\,(500,\frac{i}{100},221)}{\sum_{i=40}^{47} 0{,}1921\cdot e^{-1000(\frac{i}{100}-0{,}435)^2}\cdot binomPdf\,(500,\frac{i}{100},221)}$$

$$\approx 0{,}59$$

Man erhält also 59% als neue a-posteriori-Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ABC die Wahl gewinnt.

<u>Bemerkung:</u> *Dieser Wert unterscheidet sich kaum von dem in e) berechneten Wert. Das ist ein Indiz für die Güte der Theorie bzw. für die Robustheit gegenüber der ziemlich willkürlichen Wahl einer a-priori-Verteilung. Entscheidend ist das Stichprobenergebnis.*

</td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

STOCHASTIK 2

III.2 EURO-Münzen

Der Euro ist die Währung in 15 europäischen Ländern. Jedes Land prägt seine eigenen Münzen, aber alle Münzen sind in allen Euro-Ländern gültig.

Deswegen „bewegen" sich die Münzen im Lauf der Zeit über die Landesgrenzen; überall findet man inzwischen ein Gemisch an Münzen aus den verschiedenen Euro-Ländern.

Diese „Bewegung" lässt sich mit folgendem Ansatz modellieren:

Wenn man nach dem Anteil der Münzen aus einem Ausland F an allen im Inland kursierenden Münzen fragt und diese Größe a_F nennt, dann ist diese Größe zeitabhängig, und die zugehörige Gleichung lautet

$$(*) \qquad a_F(t) = a_{0,F} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{b}}\right),$$

wobei $a_{0,\mathrm{F}}$ den Anteil der Münzen des jeweiligen Landes an der gesamten in Europa geprägten Münzenmenge und t die Zeit (in Jahren) seit Einführung des Euro in Jahren in dem jeweiligen Land bezeichnet. Der Parameter b ist spezifisch für das jeweilige Inland.

Im Folgenden wird die Situation in Deutschland betrachtet. Der Parameter b ist aus den bisherigen Beobachtungen in Deutschland zu $b = 10$ bestimmt worden.
In der Tabelle 1 in der Anlage finden sich die Daten aus den 15 Euro-Ländern für die 1-Euro-Münzen und 2-Euro-Münzen zusammengenommen (also für die sogenannten Bimetall-Münzen).
Es werden auch <u>nur diese</u> Münzen betrachtet.

a) Beschreiben Sie, warum bei Deutschland in der letzten Spalte kein Wert auftreten kann.
Berechnen Sie dennoch den Anteil der deutschen Münzen, die nach diesem Modell in Deutschland kursieren. **(10P)**
(Zur Kontrolle: $a_D = 67{,}142\%$)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
A – Wenn Sie drei Münzen aus einem großen Münzhaufen in Deutschland herausnehmen, befindet sich keine italienische darunter.
B – Unter zehn Münzen in Deutschland befinden sich genau sieben deutsche Münzen.
C – Unter fünf Münzen in Deutschland befinden sich genau eine französische und genau eine italienische Münze. **(15P)**

In einer Schulkantine eines Hamburger Gymnasiums wurden in zwei Wochen die Bimetall-Münzen gezählt und den verschiedenen Ausgabeländern zugeordnet. Insgesamt wurden 1000 Münzen gezählt.

c) Begründen Sie, dass gilt:
Das Sortieren der Münzen nach „kommt aus dem Land L“ und „kommt nicht aus dem Land L“ kann als Bernoulli-Kette angesehen werden. **(5P)**

Die tatsächliche Häufigkeitsverteilung der Münzen nach den Ländern findet sich in der Tabelle 2 in der Anlage.

d) Berechnen Sie, welche Häufigkeitsverteilung zu erwarten wäre, wenn sich die Münzen gemäß Tabelle 1 über die gesamte Euro-Zone verteilt hätten.
Tragen Sie diese Werte in Tabelle 2 ein. **(5P)**

e) Betrachten Sie jetzt nur die Münzen aus Frankreich, Italien, den Niederlanden, Österreich und Deutschland.
Bestimmen Sie von diesen diejenigen Länder, bei denen die tatsächliche Anzahl um mehr als drei Standardabweichungen von der erwarteten entfernt liegt.
Begründen Sie, warum die entsprechende Frage z.B. für Luxemburg wenig sinnvoll ist. **(15P)**

f) Bestimmen Sie die minimale Anzahl von Bimetall-Münzen, die die Kantine einnehmen müsste, damit mit einer Sicherheit von 97,7% mindestens eine Münze aus Malta auftaucht, wenn man vom Vorkommen maltesischer Münzen gemäß dem Wert für a_{Malta} aus Tabelle 1 ausgeht. **(10P)**

g) Jetzt geht es um das vorgestellte Modell, das durch Gleichung (*) beschrieben wird.
- Untersuchen Sie die Auswirkungen des Parameters b auf die Funktionswerte $a_F(t)$. Gehen Sie dabei insbesondere auf den Wertebereich von a_F sowie auf die Auswirkungen ein, wenn b groß ist gegenüber dem deutschen b (z.B. $b = 25$) oder wenn der Wert klein ist (z.B. $b = 3$).
- Interpretieren Sie die Bedeutung von b im Sachkontext.
- Stellen Sie sich vor, die entsprechende Untersuchung zur Münzverteilung würde auch in Luxemburg unternommen.
  Beurteilen Sie, ob sich für Luxemburg in etwa der gleiche Wert für b wie in Deutschland ergeben würde – oder ob der Wert wesentlich abweichen müsste.
- In Luxemburg liegt der Anteil belgischer Münzen bei 11 %. Begründen Sie, wieso hiermit das Modell gesprengt wird. **(30P)**

Jedes Land darf pro Jahr eine Ausgabe an 2-Euro-Sondermünzen prägen.
Deutschland hat in den letzten Jahren jeweils 30 Millionen Münzen mit Motiven „Mecklenburg-Vorpommern“, „Schleswig-Holstein“ und „Römische Verträge“ geprägt sowie 30 Millionen mit dem Hamburger Michel. (Nehmen Sie vereinfachend an, dass all diese Münzen bereits bei der Einführung des EURO in Deutschland geprägt worden wären.)

h) Bestimmen Sie die zu erwartende Anzahl von Michel-Sondermünzen in der oben beschriebenen Kantineneinnahme.
Tatsächlich wurden 12 Michel-Münzen gefunden. Beurteilen Sie die Signifikanz dieses Resultats.
Beschreiben Sie einen möglichen Grund für diese Abweichung. **(10P)**

Anlage 1 zur Aufgabe „EURO-Münzen“

Tabelle 1:

Land	Anzahl der hergestellten Bimetall-Münzen in Millionen	Anteil $a_{0,F}$ in Prozent	Einführungs-datum des Euro	a_F (30.6.2008) in Prozent nach (*)
Belgien	616	5,098	1.1.2002	2,437
Deutschland	3680	30,454	1.1.2002	*Siehe a)*
Finnland	199,9	1,654	1.1.2002	0,791
Frankreich	1517	12,554	1.1.2002	6,000
Griechenland	363,7	3,010	1.1.2002	1,439
Irland	268,7	2,224	1.1.2002	1,063
Italien	2016,9	16,691	1.1.2002	7,978
Luxemburg	84,6	0,700	1.1.2002	0,335
Malta	24	0,199	1.1.2008	0,010
Niederlande	437,4	3,620	1.1.2002	1,730
Österreich	546,3	4,521	1.1.2002	2,161
Portugal	255,7	2,116	1.1.2002	1,011
Slowenien	51	0,422	1.1.2007	0,059
Spanien	1978,6	16,374	1.1.2002	7,826
Zypern	43,9	0,363	1.1.2008	0,018

Anlage 2 zur Aufgabe „EURO-Münzen“

Tabelle 2:

Land	**Anzahl der Münzen in der Kantinen-Einnahme**	**Erwartungswert (siehe Aufgabenteil d))**
Belgien	19	
Deutschland	733	
Finnland	4	
Frankreich	56	
Griechenland	7	
Irland	6	
Italien	60	
Luxemburg	4	
Malta	0	
Niederlande	28	
Österreich	43	
Portugal	4	
Slowenien	0	
Spanien	36	
Zypern	0	
Gesamt	**1000**	

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Da diese Betrachtung von Deutschland aus unternommen wird, Deutschland von sich selbst nicht Ausland ist, kann die Gleichung (*), die ja die Diffusion aus den Ausländern nach Deutschland beschreibt, nicht verwendet werden. Der Anteil der deutschen Münzen ist die Differenz von 100 % und der Summe der Anteile der ausländischen Münzen. Er ergibt sich zu $a_D = 67{,}142\%$.	10		
b)	A: Die Wahrscheinlichkeit für A ergibt sich durch $p(A) = (1-0{,}07978)^3 \approx 0{,}7792$. *B: B* ist ein Fall für die Binomialverteilung: $p(B) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}67142^7 \cdot 0{,}32858^3 \approx 0{,}2619$. C: Die Wahrscheinlichkeit für C lässt sich mit folgender Überlegung berechnen: Man zieht die 5 Münzen hintereinander und betrachtet den ganzen Vorgang in (gedanklich) in einem fünfstufigen Baumdiagramm, in dem nur die drei Ereignisse „italienische Münze“, „französische Münze“ und „andere Münze“ vorkommen. Jeder Erfolgspfad hat dann die Wahrscheinlichkeit: $0{,}06000 \cdot 0{,}07978 \cdot (1-0{,}07978-0{,}0600)^3$. Nun berechnen wir die Anzahl dieser Erfolgspfade: Die italienische Münze kann auf einer der fünf „Stufen“ auftreten, die französische dann noch an vier. So ergibt sich: $p(C) = 5 \cdot 4 \cdot (1-0{,}07978-0{,}0600)^3 \cdot 0{,}07978 \cdot 0{,}06000 \approx 0{,}0609$. *<u>Alternativ:</u> Es gibt* $\binom{5}{3}$ *Möglichkeiten, welche von den 5 Münzen deutsch sind, danach noch 2 Möglichkeiten, die italienische und die französische auf die beiden verbleibenden zu verteilen. Jede der* $\binom{5}{3} \cdot 2 = 20$ *Möglichkeiten hat die Wahrscheinlichkeit* $(1-0{,}07978-0{,}0600)^3 \cdot 0{,}07978 \cdot 0{,}06000$.	15		
c)	Da das Herkunftsland zweier beim Sortieren hintereinander befindlicher Münzen voneinander unabhängig ist und da sich der Anteil der Münzen des entsprechenden Landes in der Gesamtmenge praktisch überhaupt nicht ändert, kann der Sortiervorgang als Bernoulli-Kette beschrieben werden.		5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	Der jeweilige Erwartungswert bestimmt sich durch $E_i = 1000 \cdot p_i$:			

Land	Anzahl der Münzen in der Kantinen-Einnahme	Erwartungswerte
Belgien	19	24,37
Deutschland	733	671,42
Finnland	4	7,91
Frankreich	56	60,00
Griechenland	7	14,39
Irland	6	10,63
Italien	60	79,78
Luxemburg	4	3,35
Malta	0	0,10
Niederlande	28	17,30
Österreich	43	21,61
Portugal	4	10,11
Slowenien	0	0,59
Spanien	36	78,26
Zypern	0	0,18
Gesamt	**1000**	**1000**

Bewertung d): I: 5

e) Die Abweichung in Standardabweichungen ($\sigma = \sqrt{E \cdot (1-p)}$) berechnet sich mit dem Erwartungswert E und dem tatsächlichen Wert T durch

$$abw = \frac{T - E}{\sqrt{E \cdot (1-p)}} .$$

Dies ergibt folgende Tabelle:

Land	Anteil nach (*) in Prozent	Erwartungswert bei $n = 1000$	Sigma	Tatsächliche Münzzahl	Abweichung in Sigma
F	6,000	60,003	7,510	56	–0,53
I	7,978	79,776	8,568	60	–2,31
NL	1,730	17,301	4,123	28	2,59
A	2,161	21,608	4,598	43	4,65
D	67,142	671,440	14,853	733	4,15

Frankreich, Italien und die Niederlande liegen mit ihren Abweichungen innerhalb, Deutschland und Österreich außerhalb des 3-σ-Bereiches.

Letztlich liegt nur Frankreich nahe am Erwartungswert.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Bemerkung: Die italienischen Münzen sind auf „hohem Signifikanzniveau" zu selten, die niederländischen auf ähnlichem Signifikanzniveau auffällig häufig und die österreichischen extrem häufig. Ebenso liegt der Anteil der deutschen Münzen weit über dem erwarteten Anteil. Man könnte diese Feststellungen im Rahmen einer statistischen Theorie als signifikante Ablehnungen der Nullhypothese „Die Formel (*) beschreibt die Realität" versuchen zu begründen. Dahinter liegt dann aber als Annahme eine Annäherung der realen Binomialverteilung durch eine Normalverteilung. Diese Argumentation wird von den Prüflingen nicht erwartet. Bei Luxemburg ist $E_{LUX} \approx 3{,}346$ und $\sigma_{LUX} \approx 1{,}826$; die Normalverteilungsnäherung ist hier aber nicht sinnvoll (Laplace-Bedingung nicht erfüllt).		15	
f)	Die Aufgabenstellung lässt sich durch folgenden Ansatz über die Gegenwahrscheinlichkeit lösen: $1-\left(1-p_M\right)^n \geq 0{,}977 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln 0{,}023}{\ln 0{,}9999}$ Dies ergibt mit dem gerundet angegeben $p_M \approx 1\cdot 10^{-4}$ einen Wert von $n \geq 37721$. Bedenkt man die Rundung bei p_M, so ist die Antwort „ab etwa 38000 Münzen" sinnvoll.		10	
g)	• Der Parameter b tritt im Nenner des Exponenten der e-Funktion auf. Bei gleichem t bedeutet eine Vergrößerung von b also eine Verkleinerung des Betrags des Exponenten; da der Exponent negativ ist, heißt dies, dass der Term $e^{-\frac{t}{b}}$ näher an 1 rückt und damit der Term $1-e^{-\frac{t}{b}}$ näher an Null. Der gesamte Funktionswert wird also – bei konstantem t – kleiner. Entsprechend wird der Funktionswert bei kleiner werdendem b größer, kann aber nie $a_{0,F}$ überschreiten. • Der Parameter b hat die Dimension einer Zeit und gibt die Zeit an, in der der Anteil der ausländischen Münzen eines Landes im Inland auf $\left(1-\frac{1}{e}\right) \approx 63\%$ von $a_{0,F}$ herangekommen ist. Je kleiner b ist, desto schneller steigt der Anteil der betrachteten ausländischen Münzen im Inland (bis zum Gesamt-Euroland-Mittelwert $a_{0,F}$), je größer b ist, desto langsamer verläuft die „Einwanderung". • In Luxemburg, als einem kleinen Land mit vier angrenzenden, wesentlich größeren Euroländern, kann man davon ausgehen, dass die ausländischen Münzen wesentlich schneller ins Inland (also nach Luxemburg) kommen und daher eine Durchmischung wesentlich schneller stattfindet: b_{LUX} ist also vermutlich deutlich kleiner.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	• Das durch (*) beschriebene mathematische Verteilungsmodell geht davon aus, dass der Anteil ausländischer Münzen in einem betrachteten Land gegen den Anteil konvergiert, den die Münzen des Auslandes im gesamten Euro-Raum aufweisen: Eine Vergrößerung von $a_F(t)$ über $a_{0,F}$ hinaus ist mit der Formel (*) nicht möglich. Damit könnten auch in Luxemburg nicht mehr als 5% belgische Münzen auftreten. Tatsächlich gibt es aber in Luxemburg einen doppelt so hohen Anteil belgischer Münzen – die Grenzen des Modells sind hier überschritten. Den Widerspruch zum Modell liefert auch formell die Umformung der Gleichung $11 = 5{,}098 \cdot \left(1 - e^{-\frac{6}{b}}\right)$. Dies widerspricht den stets positiven Werten der Exponentialfunktion. Hinweis: *Daraus folgt, dass das Modell mit seiner strikten Trennung von Inland und Ausland (hier) nicht anzuwenden ist – es sei denn, man möchte sagen, dass Belgien für Luxemburg monetär (zumindest teilweise) Inland ist. Das Modell berücksichtigt nicht, dass kleine Euro-Länder von den Münzen ihrer größeren Nachbarn „überschwemmt" werden können.*		20	10
h)	Unter den 3680 Millionen deutschen Bimetallmünzen sind 30 Millionen Michel-Münzen. Das ergäbe einen Erwartungswert von $E = 733 \cdot \frac{30}{3680} \approx 5{,}9755 \approx 6$ Michel-Münzen unter den 733 deutschen Münzen aus der Kantine. Der tatsächliche Wert von 12 Münzen liegt ungefähr $2{,}475\,\sigma \approx 2{,}5\,\sigma$ darüber. Wegen $\sigma \approx 2{,}4$ ist die Laplace-Bedingung nicht erfüllt, eine einfache Anwendung von σ-Regeln ist also nicht geboten. Von „signifikanter Abweichung nach oben" im präzisen Sinn lässt sich also ohne genauere Rechnung nicht sprechen. Ein möglicher Grund für eine Abweichung nach oben wäre aber, dass die Michel-Münzen noch nicht weit von ihrer Ausgabestelle, der Landesbank, „gewandert" sind wegen des ja tatsächlich späteren Zeitpunktes ihrer Einführung.			10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20