ANALYSIS 1

I.1 Bakterien

Ein Forschungslabor untersucht die antibiotische Wirkung einer Substanz auf Bakterien.

Dabei wird zunächst das Wachstum einer Bakterienkultur beobachtet, die zu Beginn der Beobachtung 1000 Bakterien hat. Jede Stunde nimmt die Anzahl der Bakterien um 25 % zu.

Dieser Wachstumsprozess soll durch eine Funktion N_1 mit der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$ beschrieben werden. Der (gerundete) Funktionswert $N_1(t)$ sei die Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt t, und t sei die Zeit in Stunden.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Wachstumsfunktion N_1 in Abhängigkeit von der Zeit t.

b) Berechnen Sie die Anzahl der Bakterien, die nach 8 Stunden in der Kultur vorhanden sind.

8 Stunden nach Beginn der Beobachtung wird eine Substanz zu den Bakterien hinzu gegeben.
Ab diesem Zeitpunkt lässt sich die Anzahl der Bakterien durch folgende Funktionsgleichung beschreiben:

$$N_2(t) = 1000 \cdot e^{0,343 \cdot t - 0,015 \cdot t^2} \quad , t \geq 8.$$

Hinweis: Es ist $N_1(8) \approx N_2(8)$.

c) Untersuchen Sie die Funktion N_2 für $t \geq 8$ hinsichtlich Extrem- und Wendepunkten.
Hinweis: Sie können ohne Rechnung verwenden:
$$N_2'''(t) = (-0,03087 + 0,0027 \cdot t + (0,343 - 0,03 \cdot t)^3) \cdot 1000 \cdot e^{0,343\, t - 0,015\, t^2}$$

d) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem unter den veränderten Bedingungen 1000 Bakterien in der Kultur vorhanden sind.

e) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen von $N(t) = \begin{cases} N_1(t) \text{ für } t < 8 \\ N_2(t) \text{ für } t \geq 8 \end{cases}$.

Untersuchen Sie die Funktion N an der Stelle $t = 8$.

f) Beurteilen Sie abschließend, ob die Güte der Substanz den Anforderungen eines Antibiotikums gerecht wird.
Ein Antibiotikum ist ein Medikament, das im Falle einer Erkrankung eine <u>schnelle</u> Reduzierung der Bakterienanzahl bewirken soll.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Neben der Lösung $N_1(t) = 1000 \cdot 1{,}25^t$ ist auch folgender Ansatz möglich: $N_1(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$. Wegen $N_1(0) = 1000$ gilt $a = 1000$. Aus $e^k = 1{,}25$ folgt $k = ln\ 1{,}25 \approx 0{,}223$. Insgesamt ergibt sich: $N_1(t) \approx 1000 \cdot e^{0{,}223 \cdot t}$.		10	
b)	Das Einsetzen für $t = 8$ ergibt $N_1(8) = 1000 \cdot 1{,}25^8 \approx 5960$ oder $N_1(8) \approx 1000 \cdot e^{0{,}223 \cdot 8} \approx 5954$. *Der Funktionswert kann auch rekursiv mit Hilfe einer Wertetabelle berechnet werden*	5		
c)	$N_2(t) = 1000 \cdot e^{0{,}343 \cdot t - 0{,}015 \cdot t^2}$. Unter Anwendung der Kettenregel gilt: $N_2'(t) = (0{,}343 - 0{,}03 \cdot t) \cdot 1000 \cdot e^{0{,}343 \cdot t - 0{,}015 \cdot t^2}$. Weitere Anwendung der Produkt- und Kettenregel erbringt: $N_2''(t) = -0{,}03 \cdot 1000 \cdot e^{0{,}343 \cdot t - 0{,}015 \cdot t^2} + (0{,}343 - 0{,}03 \cdot t)^2 \cdot 1000 \cdot e^{0{,}343 \cdot t - 0{,}015 \cdot t^2}$ $N_2''(t) = \left(-0{,}03 + (0{,}343 - 0{,}03 \cdot t)^2\right) \cdot 1000 \cdot e^{0{,}343 \cdot t - 0{,}015 \cdot t^2}$ <u>Extremstelle</u>: Gesucht ist ein t mit $N_2'(t) = 0$. $N_2'(t) = (0{,}343 - 0{,}03 \cdot t) \cdot 1000 \cdot e^{0{,}343 \cdot t - 0{,}015 \cdot t^2} = 0$. Da $1000 \cdot e^{0{,}343 \cdot t - 0{,}015 \cdot t^2} > 0$ für alle t, folgt $0{,}343 - 0{,}03 \cdot t$ muss 0 sein und somit $t = \frac{0{,}343}{0{,}03} = 11{,}4\overline{3}$. Für die hinreichende Bedingung muss t in die zweite Ableitung eingesetzt werden: Auch hier ist der zweite Teil des Produkts größer als Null, so dass der Faktor $\left(-0{,}03 + (0{,}343 - 0{,}03 \cdot t)^2\right)$ den Ausschlag für das Vorzeichen gibt. Durch Einsetzen von $t = 11{,}4\overline{3}$ folgt $-0{,}03 + (0{,}343 - 0{,}03 \cdot t)^2 = -0{,}03$; denn t ist Nullstelle der inneren Klammer. Also liegt bei $t = 11{,}4\overline{3}$ ein lokales Maximum. Mit $N_2(11{,}4\overline{3}) \approx 7105$ ergibt sich der Hochpunkt (gerundet) $H(11{,}4 \vert 7105)$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Wendestelle: Gesucht ist ein t mit $N_2''(t)=0$. Analog zur Berechnung der Extremstelle ist nur zu berücksichtigen, dass $-0,03+(0,343-0,03\cdot t)^2=0$ ist. Die Gleichung $(0,343-0,03\cdot t)^2=0,03$ hat die beiden Lösungen $t_1=\frac{343}{30}+\frac{10\sqrt{3}}{3}$ und $t_2=\frac{343}{30}-\frac{10\sqrt{3}}{3}$. Die Lösung $t_1\approx 17{,}207$ liegt im Definitionsbereich von N_2, die Lösung $t_2\approx 5{,}660$ jedoch nicht. Mit der vorgegebenen dritten Ableitung lässt sich die hinreichende Bedingung prüfen: $N_2'''(17,207)\approx 44,8\neq 0$. *Neben der konkreten Berechnung von N_2''' (17,207) gibt es selbstverständlich auch andere Möglichkeiten zu argumentieren, z.B. mit der zweiten Ableitung.* Mit $N_2(17{,}207)\approx 4309$ ergibt sich der Wendepunkt (gerundet) $W(17{,}207 \mid 4309)$. *Möglich ist z.B. auch W(17,2 ǀ 4315).*		25	
d)	Gesucht ist t mit $1000=1000\cdot e^{0,343\cdot t-0,015\cdot t^2}$, somit $1=e^{0,343\cdot t-0,015\cdot t^2}$. $\ln 1=0,343\cdot t-0,015\cdot t^2$. Da $\ln 1=0$, folgt: $0=0,343\cdot t-0,015\cdot t^2$ $=0,015\cdot t\cdot\left(\frac{0,343}{0,015}-t\right)$ Die Lösung $t=0$ liegt außerhalb des Definitionsbereiches von N_2, so dass $t=\frac{0,343}{0,015}=22,8\overline{6}$ der gesuchte Zeitpunkt ist. Knapp 23 Stunden nach Beginn der Beobachtung (und 15 Stunden nach Zugabe der Substanz) entspricht die Anzahl der Bakterien wieder der Startpopulation.		15	
e)	Zur Skizze: Zu berücksichtigen sind $N_1(0)=1000$, der exponentielle Anstieg bis $N_1(8)\approx 5954\approx N_2(8)$ *(siehe dazu auch die unten stehenden Hinweise zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit)*, der Hochpunkt (11,4 ǀ 7105), der Wendepunkt (17,2 ǀ 4309) und der Zeitpunkt t ≈ 23 aus Teil d). *Dabei muss erkannt werden, dass im Bereich des Hochpunktes nur eine Rechtskrümmung vorliegen kann.*			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

Die Genauigkeit in der Hochachse ist nur bedingt möglich (Skizze!).

Die Untersuchung der Funktion an der Stelle $t = 8$ bezieht sich auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit und sollte im Graphen durch einen Knick angezeigt werden.

Stetigkeit: Wegen $N_1(8) \approx N_2(8)$ ist die Funktion praktisch stetig.

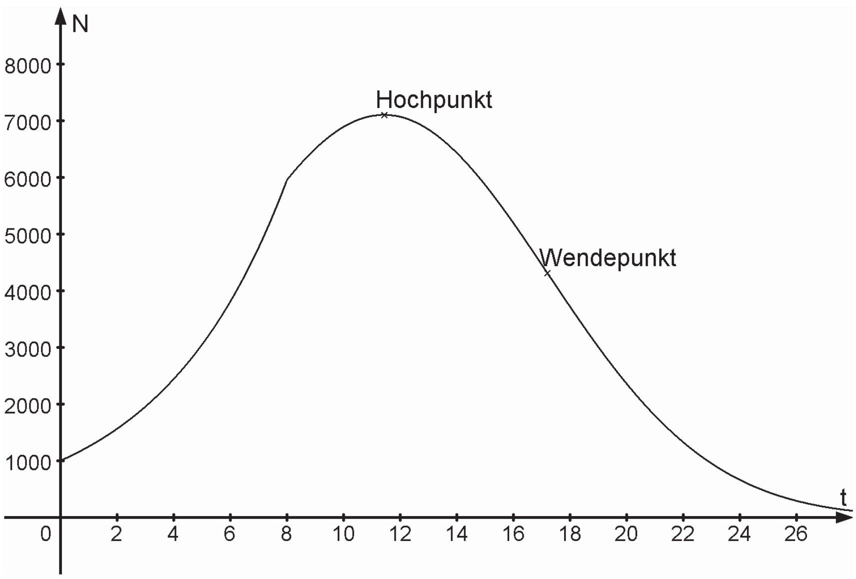
Sollte der Prüfling die Funktionsgleichung $N_1(t) = 1000 \cdot 1{,}25^t$ verwenden, so könnte er zu dem Schluss kommen, dass N an der Stelle t = 8 nicht stetig ist.
Hier muss dann entsprechend bepunktet werden!

Differenzierbarkeit: Es ist $N_1'(t) = 1000 \cdot \ln 1{,}25 \cdot 1{,}25^t$ bzw. $223 \cdot e^{0.223 \cdot t}$.

Wegen $\lim\limits_{t \to 8} N_1'(t) \neq N_2'(8)$ ist die Funktion an der Stelle $t = 8$ nicht differenzierbar (daher im Graph der Knick), denn

$N_1'(t) = 1000 \cdot \ln 1{,}25 \cdot 1{,}25^t$ und $N_1'(8) \approx 1330$ oder

$N_1'(t) = 223 \cdot e^{-0{,}223 \cdot t}$ und $N_1'(8) \approx 1328$ aber $N_2'(8) \approx 613$



I	II	III
15	10	

f) Teilaufgabe d) zeigt, dass es mehr als vierzehn Stunden dauert, bis die Anzahl der Bakterien wieder auf 1000 (wie zu Beginn der Beobachtung) zurückgegangen ist.

Grundsätzlich lässt sich schließen:

1. Die Substanz erfüllt nicht die Anforderungen zu einer schnellen Reduzierung der Bakterienanzahl, da die Zahl der Bakterien gut drei Stunden weiter ansteigt und dann erst verhältnismäßig langsam abnimmt.
2. Die Substanz erfüllt die Anforderungen zur Reduzierung der Bakterienanzahl, da innerhalb von knapp 15 Stunden die Anzahl der Bakterien auf etwa ein Sechstel (1000) reduziert wird und innerhalb eines Tages sogar weiter sehr stark reduziert wird: $N_2(8+24) = N_2(32) \approx 12$.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Jede dieser Positionen ist als richtig zu bewerten, wenn sie vom Prüfling mit den erzielten Ergebnissen stichhaltig begründet wird.			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

ANALYSIS 2

I.2 Heißluftballon

Die Flughöhe eines Heißluftballons wird über die Temperatur der Luftfüllung des Ballons gesteuert, die horizontale Bewegung wird allein durch den Wind beeinflusst. Die Temperatur der Luft im Ballon lässt sich mit einem fest eingebauten Gasbrenner einstellen, der in regelmäßigen Abständen angestellt wird.
Ein Ausschnitt des zeitlichen Verlaufs der Flughöhe (Vertikalbewegung) des Heißluftballons ist im anliegenden Diagrammblatt grob skizziert.

Der zeitliche Verlauf der Flughöhe wird mithilfe der Funktion f mit $f(x) = 4 - \frac{3}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$ modelliert, wobei x die Zeit in Minuten und $f(x)$ die Flughöhe in 100 Metern angibt.

a) Berechnen Sie die Flughöhe des Ballons zum Zeitpunkt $x = 3$ min.

b) Ermitteln Sie möglichst ohne Differenzialrechnung sowohl die maximale als auch die minimale Flughöhe mit ihren zugehörigen Zeitpunkten.

c) Bestimmen Sie die Funktion, die den zeitlichen Verlauf der Vertikalgeschwindigkeit (momentane Änderung der Flughöhe pro Minute) darstellt und skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion im vorgegebenen Koordinatensystem im anliegenden Diagrammblatt, <u>ohne</u> eine ausführliche Kurvendiskussion vorzunehmen.

d) Ermitteln Sie die Zeitpunkte, zu denen der Ballon am schnellsten steigt bzw. fällt und den Betrag der maximalen Vertikalgeschwindigkeit, d.h. der momentanen zeitlichen Änderungsrate der Flughöhe.

e) Bestimmen Sie die mittlere Flughöhe in den ersten 6 Minuten.

f) Bei der Landung eines Heißluftballons soll Folgendes berücksichtigt werden:

   Die Landephase wird zu einem Zeitpunkt eingeleitet, an dem sich der Ballon mit maximaler momentaner zeitlicher Vertikalgeschwindigkeit nach unten bewegt. Die Vertikalgeschwindigkeit soll in der Landephase kontinuierlich bis auf Null zum Zeitpunkt des Bodenkontaktes abnehmen.

   In einem Lehrbuch für Heißluftballonführer soll ein so beschriebener Landevorgang in Form eines Funktionsgraphen in Fortsetzung der Flugfunktion f dargestellt werden.

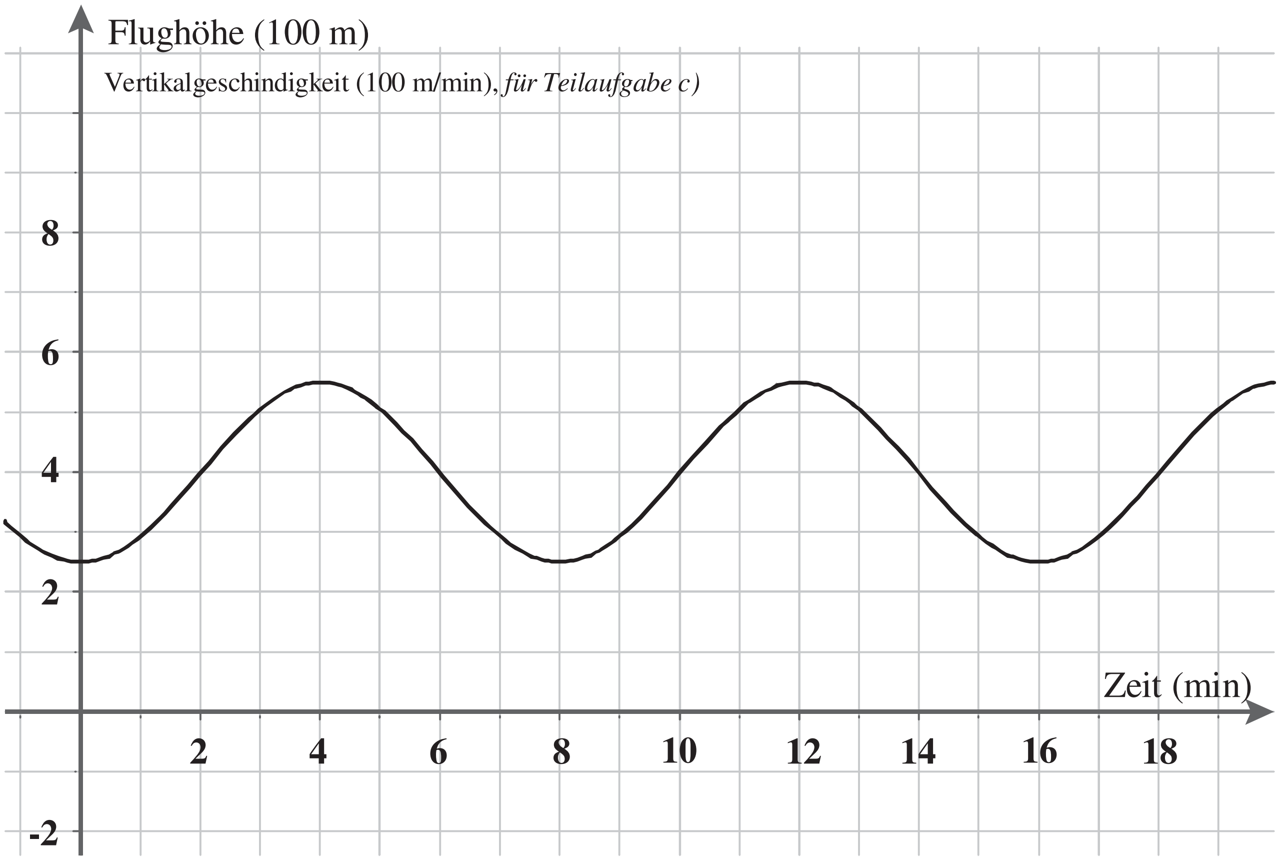
   Ermitteln Sie Eigenschaften einer solchen Landefunktion.

   Bestimmen Sie eine mögliche quadratische Funktion als Landefunktion mit dem zugehörigen Zeitpunkt der Landung.

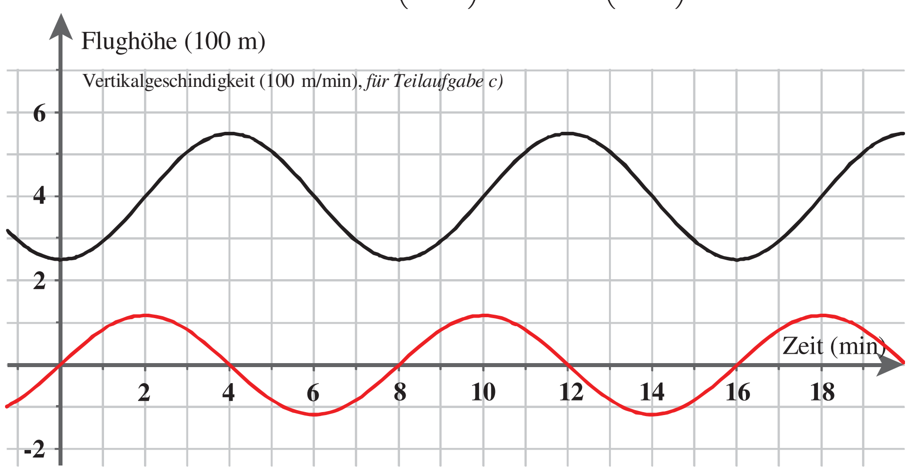
   Skizzieren Sie den Graphen der Fluglandefunktion zusätzlich in das Diagrammblatt.

g) Ein anderer Ballon variiert seine Flughöhe periodisch zwischen 200 und 400 Metern. Für einen Anstieg benötigt er ebenso wie für die Sinkphase jeweils 3 Minuten.
   Bestimmen Sie eine ebenfalls sinusförmige Funktionsgleichung der Funktion, die den zeitlichen Verlauf der Flughöhe anzeigt.

Diagrammblatt zur Aufgabe „Heißluftballon“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Gesucht ist der Funktionswert *f*(3). Es ergibt sich $f(3) = 4-\frac{3}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3\right) = 4-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right) = 4+\frac{3}{4}\sqrt{2}$, also $f(3)\approx 5{,}06$. Der Ballon hat zum Zeitpunkt 3 min eine Höhe von etwa 506 m.	5		
b)	Die einfachere Funktion g mit $g(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot x\right)$ hat an den gleichen Stellen Extremwerte wie die gegebene Flughöhenfunktion *f*. Allerdings sind wegen des Vorzeichenwechsels Minima und Maxima vertauscht. Die reine Cosinusfunktion hat Maxima an den Stellen $k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, und hat Minima an den Stellen $\pi+k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Also hat die Funktion g Maxima an den Stellen $x=8k$, $k\in\mathbb{Z}$, und Minima an den Stellen $x=8k+4$, $k\in\mathbb{Z}$. Und damit hat die Funktion *f* Minima an den Stellen $x=8k$, $k\in\mathbb{Z}$, und Maxima an den Stellen $x=8k+4$, $k\in\mathbb{Z}$. Die Maximal- bzw. Minimalwerte sind jeweils gleich und können z.B. an den Stellen $x = 4$ und $x = 0$ berechnet werden: $f(0) = 4-\frac{3}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 0\right) = 2{,}5$ bzw. $f(4) = 4-\frac{3}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 4\right) = 5{,}5$. Damit beträgt die minimale Flughöhe 250 m und die maximale 550 m.		10	
c)	Der zeitliche Verlauf der Vertikalgeschwindigkeit des Ballons wird durch die Ableitung f' der Funktion *f* des zeitlichen Verlaufs der Flughöhe dargestellt: $f'(x) = \frac{3}{8}\pi\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot x\right)\approx 1{,}18\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot x\right)$ 			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Eine Skizze der Ableitungsfunktion wird auf dem Diagrammblatt ohne explizite Kurvendiskussion erwartet.	10	10	
d)	Der Ballon steigt bzw. fällt dort am schnellsten, wo die Vertikalgeschwindigkeit – also die erste Ableitung von f – ihre Extrema hat bzw. wo f selbst Wendepunkte hat. Mit den gleichen Argumenten wie in b) begründet man, dass diese Stellen bei $x = 2 + 4k$ liegen. Die Minimalwerte sind negativ und vom Betrag auch Maximalwerte. Alle diese Betragswerte sind gleich und zwar $f'(2) = \frac{3}{8}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2\right)$ $f'(2) = \frac{3}{8}\pi \approx 1{,}18.$ Also beträgt die maximale Vertikalgeschwindigkeit immer wieder mit wechselndem Vorzeichen etwa 118 m/min.		10	
e)	Die mittlere Flughöhe m über dem Zeitintervall [0;6] wird über das Integral der Flughöhenfunktion f bestimmt: $m = \frac{1}{6} \cdot \int_0^6 \left(4 - \frac{3}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)\right) dx = \frac{1}{6} \cdot \left[4x - \frac{6}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)\right]_0^6$ $m = \frac{1}{6} \cdot \left(24 + \frac{6}{\pi}\right) \approx 4{,}32.$ Die durchschnittliche Flughöhe des Ballons im Zeitintervall $[0;6]$ beträgt etwa 432 m.		10	
f)	<u>Eigenschaften</u> einer Funktion q, die die Landephase darstellen kann: Der gewählte Zeitpunkt x_w, in dem die Landephase eingeleitet wird, muss eine der Stellen 2 + 4k sein *(maximale Vertikalgeschwindigkeit nach unten).* An einer solchen Stelle x_w muss der Funktionswert und der Wert der 1. Ableitung der Funktion f und der Landefunktion q gleich sein: I. $q(x_w) = f(x_w) = 4$ *(Sprungstelle im Sachkontext nicht möglich)* II. $q'(x_w) = f'(x_w) = -\frac{3}{8}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2\right)$ (vgl. d)) *(ruckfrei)* Zum Zeitpunkt x_n der Landung muss eine weitere Bedingung gelten: III. $q(x_n) = q'(x_n) = 0$ *(sanfte Landung).* Aus I und III folgt, dass die Nullstelle der quadratischen Funktion q mit ihrem Scheitelpunkt zusammenfallen muss, da hier die einzige Stelle vorliegt, die die Bedingung III erfüllt.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

Deshalb ist folgender Ansatz für eine quadratische Funktion notwendig:

$q(x) = a \cdot (x-b)^2$ und damit $q'(x) = 2a \cdot (x-b) = 2a \cdot x - 2a \cdot b$.

Für x_W wählen wir z.B. $x_W = 6$. Dann erhalten wir folgende zwei Gleichungen:

(1) $a \cdot (6-b)^2 = f(6) = 4$ (1') $a \cdot (6-b)^2 = 4$

(2) $2a \cdot (6-b) = f'(6) = -\frac{3}{8}\pi$ $\xrightarrow{\quad}$ (2) : 2 (2') $a \cdot (6-b) = -\frac{3}{16}\pi$

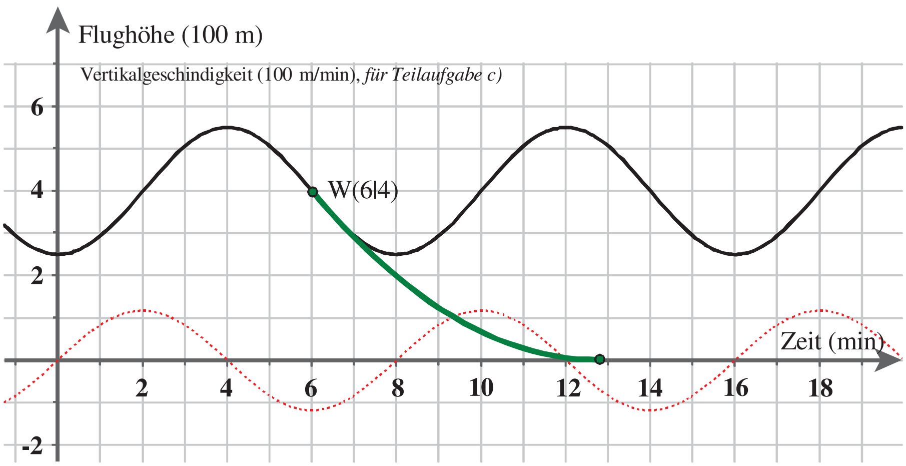
Da $a = 0$ und $b = 6$ keine Lösungen sein können, liefert die Division (1) : (2):

$$6 - b = -\frac{4 \cdot 16}{3\pi} \quad \Rightarrow \quad b = 6 + \frac{64}{3\pi} \approx 12{,}79 .$$

b eingesetzt in (2) ergibt:

$$a \cdot \left(-\frac{64}{3\pi}\right) = -\frac{3}{16}\pi \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3\pi \cdot 3\pi}{16 \cdot 64} = \frac{9\pi^2}{1024} \approx 0{,}087 .$$

Der Landezeitpunkt liegt also bei ca. 13 Minuten, da b die x-Koordinate des Scheitelpunktes von q ist.
q hat die Gleichung $q(x) = 0{,}087 \cdot (x - 12{,}79)^2$.



I	II	III
5	10	15

g) Die Modellierungsfunktion für den Flughöhenverlauf lautet im Ansatz z.B.
$f_{neu}(x) = c - a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{b} \cdot x\right)$, wobei a die Amplitude, also den halben Unterschied zwischen Maximal- und Minimalhöhe darstellt, b die Periodendauer und c die mittlere Höhe.

Die Periodendauer des Flughöhenverlaufs (Diagramm) beträgt 6 Minuten, also ist $b = 6$. Die Amplitude ist $a = 1$, die Verschiebung $c = 3$. Es ergibt sich die Funktion mit der Gleichung $f_{neu}(x) = 3 - \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)$.

I	II	III
	10	5

	I	II	III
Insgesamt 100 BWE	20	60	20

ANALYSIS 3

I.3 Logarithmus-Funktion

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit der Gleichung $f_a(x) = x \cdot (\ln x - a)^2,\ a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich.

Berechnen Sie die Nullstellen und beschreiben Sie die Lage der Nullstellen in Abhängigkeit vom Parameter *a.*

b) Weisen Sie nach, dass für jedes *a* die Graphen von f_a und f_{-a} genau einen gemeinsamen Punkt S_a haben.

Beschreiben Sie die Lage aller Schnittpunkte S_a im Koordinatensystem in Abhängigkeit von *a*.

c) Bestimmen Sie die Extrempunkte von f_a .

Begründen Sie, warum jeder Graph der Funktionenschar einen Wendepunkt haben muss und bestimmen Sie diesen.

Bestimmen Sie sowohl den Funktionsterm des Graphen aller Hochpunkte als auch den aller Wendepunkte (Ortskurven).

(*Zur Kontrolle*: $f_a'(x) = (\ln x - a)^2 + 2(\ln x - a)$.)

d) In der Anlage ist ein Graph der Schar dargestellt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert für *a*.

Zeichnen Sie in das gegebene Koordinatensystem den Graphen für *a* = 1 und die beiden zugehörigen Ortskurven aus Aufgabenteil c).

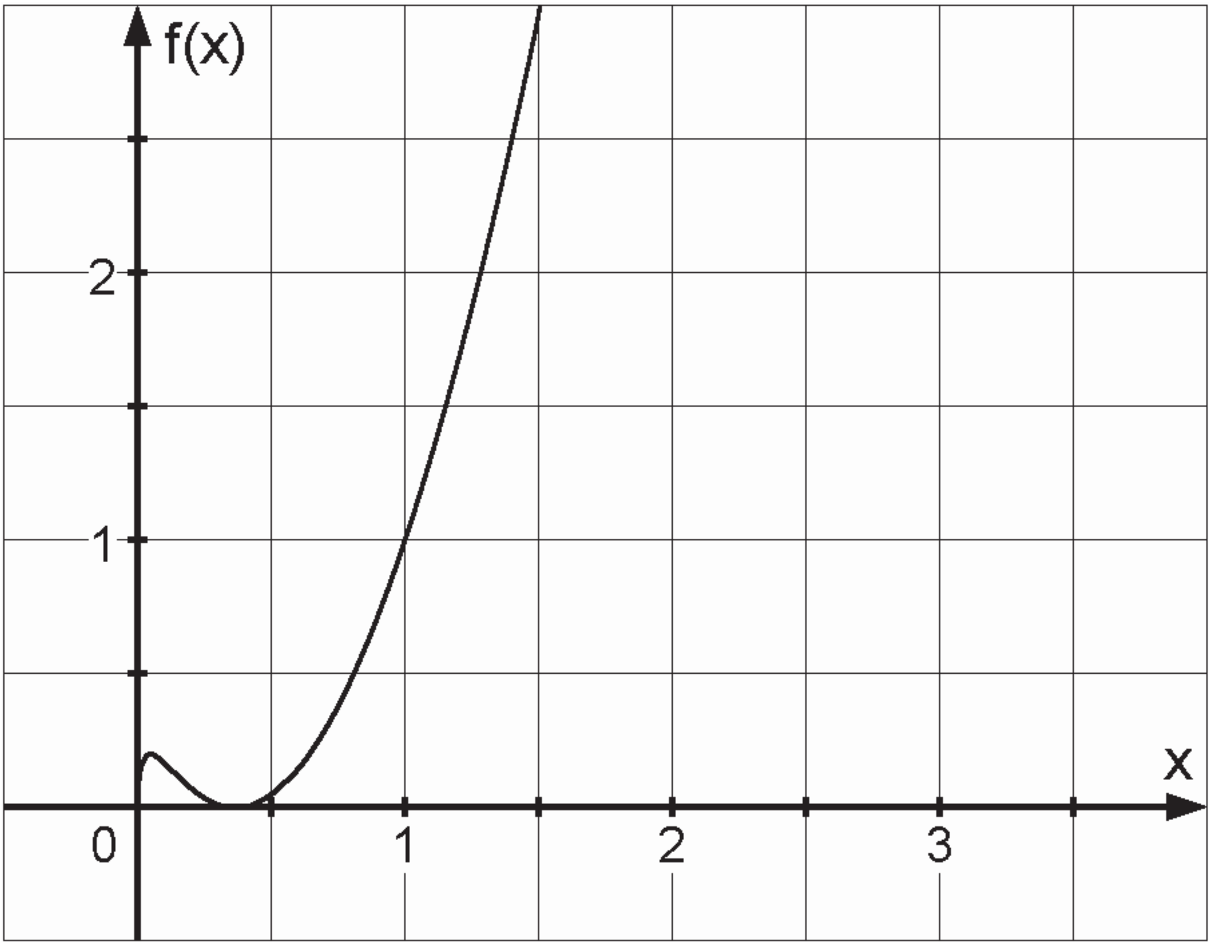
e) Es geht um das Integral $I_2 = \lim\limits_{k \to 0} \int_k^{e^a} x \cdot (\ln x - a)^2 \, dx \quad (a \in \mathbb{R})$ und seine geometrische Bedeutung.

Sie dürfen für diese Teilaufgabe voraussetzen: $\lim\limits_{k \to 0} \left(k^2 \cdot (\ln k - a)^n\right) = 0$ für $n \in \{1,2\}$.

Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: $I_1 = \lim\limits_{k \to 0} \int_k^{e^a} x \cdot (\ln x - a)^1 \, dx = -\dfrac{e^{2a}}{4}$.

Bestimmen Sie mit Hilfe von I_1 das Integral I_2 und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

Anlage zu Aufgabe „Logarithmus-Funktion“



Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td><u>Definitions- und Wertebereich:</u>
$D=\mathbb{R}^+$, da der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert ist.
$W=\mathbb{R}_0^+$, da der erste Faktor des Funktionsterms wegen der Definitionsmenge nur positive Werte annehmen kann und der zweite Faktor wegen des Quadrates stets größer oder gleich Null ist.
<u>Nullstellen:</u>
Der Funktionsterm hat die Form eines Produktes. Dieses wird Null, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist. Der 1. Faktor wird (wegen Definitionsbereich) nicht Null. Der 2. Faktor wird 0, wenn $a = \ln x$ ist, wenn also $x=e^a$. Somit haben alle Graphen der Schar eine Nullstelle $N_a\left(e^a \,\middle|\, 0\right)$. Und zwar gilt:
1.) Für $a < 0$ liegt die Nullstelle im Intervall $]0;1[$.
2.) Für $a = 0$ liegt die Nullstelle bei $x = 1$.
3.) Für $a > 0$ wandert die Nullstelle mit wachsendem a nach rechts (im Intervall $]1\,;\infty[$).</td><td>10</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Wenn die Graphen von f_a und f_{-a} gemeinsame Punkte haben, dann muss die Gleichung
$$x\cdot(\ln x-a)^2 = x\cdot(\ln x+a)^2$$
nicht nur trivial erfüllbar sein.
Elementare Umformungen liefern zwei Gleichungen
$$\ln x - a = \ln x + a \quad \text{und} \quad \ln x - a = -(\ln x + a) = -\ln x - a\,.$$
Vereinfacht man beide Gleichungen, so folgt für die erste, dass diese nur für $a = 0$ erfüllt ist (triviale Lösung).
Die 2. Gleichung ist erfüllt, wenn $x = 1$ ist. Der Funktionswert an dieser Stelle ist a^2. D. h. alle Schnittpunkte haben als 1. Koordinate den Wert 1, liegen also im Koordinatensystem auf einer Parallelen zur y-Achse durch die Stelle $x = 1$.
Es gilt $S_a\left(1 \,\middle|\, a^2\right)$.
Mit wachsendem Betrag von a wachsen auch die Funktionswerte.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td><u>Bestimmen der Extrempunkte:</u>
Um die Extrempunkte zu bestimmen, bildet man zunächst mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel die 1. und 2. Ableitung:
$f_a'(x)=(\ln x-a)^2+2(\ln x-a)$ und
$f_a''(x)=\frac{2}{x}\cdot(\ln x-a+1)$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Man setzt die 1. Ableitung gleich 0 und klammert $(\ln x - a)$ aus: $(\ln x - a)^2 + 2(\ln x - a) = (\ln x - a)\cdot(\ln x - a + 2) = 0$. Der Term $(\ln x - a)$ wird 0, wenn $x = e^a$. Die Nullstelle ist also gleichzeitig auch Extremstelle. Aus den Überlegungen bzgl. des Wertebereichs folgt, dass hier ein Minimum vorliegt. Es gilt $T_a\left(e^a \mid 0\right)$. Der Term $(\ln x - a + 2)$ wird 0, wenn $x = e^{a-2}$ ist. Um zu überprüfen, ob an dieser Stelle tatsächlich eine Extremstelle liegt, setzt man diesen Wert in die 2. Ableitung ein. $f_a''(e^{a-2}) = \frac{2}{e^{a-2}}\cdot(\ln\left(e^{a-2}\right) - a + 1) = \frac{2}{e^{a-2}}\cdot(a - 2 - a + 1) = -\frac{2}{e^{a-2}}$. Da sowohl der Zähler als auch der Nenner für alle $a \in \mathbb{R}$ positiv ist, ist der Wert des Terms negativ, also liegt dort für alle $a \in \mathbb{R}$ ein Maximum vor. $f_a(e^{a-2}) = e^{a-2}\cdot(\ln\left(e^{a-2}\right) - a)^2 = e^{a-2}\cdot 4$. Es gilt $H_a\left(e^{a-2} \mid 4\cdot e^{a-2}\right)$. <u>Bestimmen der Wendepunkte:</u> Um die möglichen Wendestellen zu berechnen, setzt man die 2. Ableitung gleich 0. $f_a''(x) = \frac{2}{x}\cdot(\ln x - a + 1) = 0$. Der 1. Faktor kann nicht den Wert 0 annehmen. Der 2. Faktor wird 0, wenn $x = e^{a-1}$ ist. An dieser Stelle müssen alle Graphen der Schar eine Wendestelle haben, da bei einer stetigen Funktion zwischen Minimum- und Maximumstelle (ohne Pol) eine Wendestelle existieren muss. Der Funktionswert der Wendestelle ist $f_a(e^{a-1}) = e^{a-1}\cdot(\ln\left(e^{a-1}\right) - a)^2 = e^{a-1}\cdot 1 = e^{a-1}$. Es gilt $W_a\left(e^{a-1} \mid e^{a-1}\right)$. <u>Gleichungen der Ortskurven:</u> Die Ortskurve aller Hochpunkte $H_a\left(e^{a-2} \mid 4\cdot e^{a-2}\right)$ ist die Gerade mit der Gleichung $g_H(x) = 4x$. Die Ortskurve aller Wendepunkte $W_a\left(e^{a-1} \mid e^{a-1}\right)$ ist die Gerade mit der Gleichung $g_W(x) = x$.		25	5

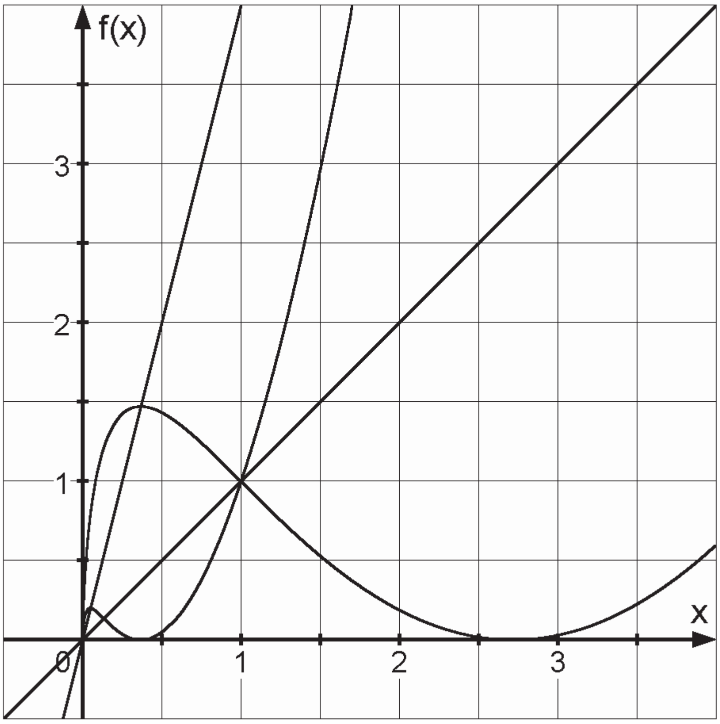
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

d) Der Zeichnung kann man entnehmen, dass der Punkt (1 | 1) ein Punkt des Graphen ist. Setzt man die Koordinaten in die Funktionsgleichung ein, dann gilt:

$$1 = 1 \cdot (\ln 1 - a)^2 = a^2 .$$

Es folgt daher, dass a den Wert 1 bzw. den Wert –1 annehmen kann. Um zu entscheiden, welcher Wert von a zu diesem Graphen gehört, berechnet man z.B. die Nullstelle für $a = 1$:

$0 = x \cdot (\ln x - 1)^2$. Da diese Gleichung für $x = e$ erfüllt ist, gibt die Zeichnung den Graphen für $a = -1$ an.



I	II	III
10	5	5

e) **Berechnung von I_1** (Lösung mit partieller Integration):

$v'(x) = x$ und $u(x) = \ln x - a$. Dann folgt: $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$ und $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Setzt man nun die Terme gemäß der partiellen Integration ein, so erhält man:

$$I_1 = \lim_{k \to 0} \left(\left[\frac{1}{2} x^2 (\ln x - a) \right]_k^{e^a} - \int_k^{e^a} \frac{1}{2} x \, dx \right) = 0 - \lim_{k \to 0} \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_k^{e^a} = -\frac{e^{2a}}{4} .$$

Berechnung von I_2 (mit partieller Integration):

$v'(x) = x$ und $u(x) = (\ln x - a)^2$. $\Rightarrow$ $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$ und $u'(x) = 2 \cdot (\ln x - a) \cdot \dfrac{1}{x}$.

$$I_2 = \lim_{k \to 0} \left(\left[\frac{1}{2} x^2 (\ln x - a)^2 \right]_k^{e^a} - \int_k^{e^a} x \cdot (\ln x - a) \, dx \right) = 0 - \left(-\frac{e^{2a}}{4} \right) = \frac{e^{2a}}{4} .$$

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Dieser Wert beschreibt das Maß der Flächen, die jeweils von den Graphen von f_a und der x-Achse eingeschlossen werden.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	20	55	25

LA/AG 1

II.1 Gerade und Geradenschar

Gegeben sind eine Geradenschar g_a und eine einzelne Gerade h

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3a \\ 1 \\ -6a \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

mit den Stützpunkten $G(5|3|8)$ und $H(8|0|2)$.

a) Beschreiben Sie, warum der Stützpunkt G nicht auf der Geraden h liegt.

b) Weisen Sie nach, dass jede Gerade g_a der Schar die Gerade h schneidet und dass jeder Punkt von h Schnittpunkt mit einer der Schargeraden ist.

c) Begründen Sie ausgehend von Ihren Ergebnissen zu a) und b) die Aussage, dass die Geraden g_a und h alle in einer Ebene E liegen.
Ermitteln Sie eine Koordinatenform von E.

d) Bestimmen Sie in der Ebene E eine Gerade k (in Parameterform), die zwar durch den Stützpunkt der Schar verläuft, aber selbst nicht zur Schar gehört.

e) Eine Ebene F ist orthogonal zur Strecke $\overline{GH}$ und verläuft durch den Punkt G. Diese Ebene enthält eine der Schargeraden g_a.
Beschreiben Sie einen Ansatz zur Bestimmung von F und des Parameters a.
Weisen Sie nach, dass $F : x_1 - x_2 - 2x_3 = -14$ die geforderten Eigenschaften hat und bestimmen Sie den Parameter a.
Ermitteln Sie den Schnittpunkt von F mit der Geraden h.

f) Die Punkte G und H, der Ursprung O und ein beliebiger Punkt P auf der Geraden h sind die Ecken einer Pyramide.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von P.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>G kann nicht auf der Geraden h liegen, da bei allen Punkten auf h die zweite Koordinate gleich 0 ist. G dagegen hat als zwei Koordinate 3.</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Der Schnittpunktansatz für die Geraden führt zum linearen Gleichungssystem
$\begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3a\\1\\-6a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}3a & -2 & 3\\1 & 0 & -3\\-6a & 4 & -6\end{array}\right).$
$r=-3$ ist ablesbar, es verbleiben die beiden Gleichungen
$-9a-2s=3 \;\wedge\; 18a+4s=-6$,
die äquivalent zueinander sind. Für jeden Wert von a, d.h. für jede Schargerade, gibt es ein s, das die Gleichung löst, d.h. einen Punkt auf h, durch den die Schargerade verläuft.
Umgekehrt gibt es zu jedem s ein passendes a.</td><td></td><td>20</td><td>5</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Der Stützpunkt G der Geradenschar liegt nicht auf der Geraden h. Daher spannen G und h eine Ebene E auf. In dieser Ebene müssen auch alle Geraden der Schar liegen, weil sie h schneiden und den gemeinsamen Stützpunkt G haben, der in der Ebene liegt.
Es sind auch andere Begründungen möglich.
<u>Bestimmung einer Koordinatenform der Ebene E:</u>
Variante 1:
Aus $\overrightarrow{GH}=\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ folgt eine Parameterform $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$.
$x_1=8+2s+3t$
$x_2=-3t \qquad \Rightarrow 2x_1+x_3=18$ ist damit eine Koordinatenform von E.
$x_3=2-4s-6t$
Variante 2:
Einen Normalenvektor, der senkrecht zu allen Richtungsvektoren der Schar und zum Richtungsvektor von h ist, liefert das Kreuzprodukt
$\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$ und mit $\begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix}$ folgt E: $4x_1+2x_3=36$.
Vereinfacht gilt natürlich auch $E:\; 2x_1+x_3=18$.</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	Nach Teil b) gibt es keinen Schnittpunkt der Geraden k und h, weil alle Schargeraden die Gerade h schneiden und k keine Schargerade sein soll. Die Gerade k muss demnach parallel zu h sein: $k:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}$, $r\in\mathbb{R}$.		10	
e)	<u>Ermitteln von F und a:</u> Die Ebene F ist orthogonal zu $\overrightarrow{GH}$, d.h. $\overrightarrow{GH}$ ist ein Normalenvektor von F. Davon ausgehend ist die Koordinatenform der Ebene schon weitgehend bestimmt. Die fehlende rechte Seite der Ebenengleichung ergibt sich durch Einsetzen eines bekannten Punktes der Ebene, z.B. von G. Da F durch G verläuft, gilt $\overrightarrow{GH}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\overrightarrow{GH}\cdot\begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix}=-42$, also $F: 3x_1-3x_2-6x_3=-42$ bzw. $F: x_1-x_2-2x_3=-14$ Kriterium zur Bestimmung des Parameters a ist, dass alle Geradenpunkte die Ebenengleichung erfüllen: $(5+3\cdot r\cdot a)-(3+r)-2\cdot(8-6\cdot r\cdot a)=-14$ für alle $r\in\mathbb{R}$, $\Leftrightarrow\ -14+15ar-r=-14$, $\Leftrightarrow\ 15ar-r=0$, $\Leftrightarrow\ r\cdot(15a-1)=0$, also $a=\frac{1}{15}$. <u>Schnittpunkt F und h:</u> Im Teil b) ist festgehalten worden, dass für den Parameter s des Schnittpunktes der Geraden g_a mit der Geraden h gilt: $-9a-2s=3$. Also ist $s=-\frac{1}{2}\cdot(9a+3)$. Mit $a=\frac{1}{15}$ ergibt sich $s=-\frac{9}{5}$ und damit der Schnittpunkt $\left(\frac{22}{5}\middle\|0\middle\|\frac{46}{5}\right)$. s kann auch berechnet werden durch das Einsetzen eines allgemeinen Punktes von h in die Koordinatenform der Ebene F. $(8+2s)-2(2-4s)=-14\Leftrightarrow 4+10s=-14\Leftrightarrow s=-\frac{9}{5}$	10	15	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Das Volumen der Pyramide kann als Spatprodukt berechnet werden. $V(s)=\frac{1}{6}\cdot\left\lvert\left(\begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}8+2s\\0\\2-4s\end{pmatrix}\right\rvert=\frac{1}{6}\left\lvert\begin{pmatrix}6\\54\\-24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8+2s\\0\\2-4s\end{pmatrix}\right\rvert$ $=\frac{1}{6}\cdot\lvert 6(8+2s)-24(2-4s)\rvert=18\cdot\lvert s\rvert$.	10		
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

LA/AG 2

II.2 Schattenspiele

An einer Hauswand befindet sich ein kunstvoll bemalter Vorbau in Form eines Prismas, das mathematisch durch die Eckpunkte

$$W_1(0\,|\,-2\,|\,2),\;\; W_2(0\,|\,2\,|\,2),\;\; W_3(0\,|\,2\,|\,6),\;\; W_4(0\,|\,-2\,|\,6),\;\; V_1(2\,|\,0\,|\,2) \;\text{ und }\; V_2(2\,|\,0\,|\,6)$$

beschrieben werden kann (1 LE $\hat{=}$ 1 m).

Die Hauswand liegt in der Halbebene mit $x_1 = 0$ und $x_3 \geq 0$.

Zur Beleuchtung dieses Vorbaus verläuft im Abstand 6 m von der Hauswand in 3 m Höhe parallel zum Erdboden (also in der x_1-x_2-Ebene) eine Schiene, an der eine punktförmige Lichtquelle beweglich befestigt ist.

a) Zeichnen Sie den Vorbau in das beigefügte Koordinatensystem ein.

Berechnen Sie die Winkel zwischen der Seitenfläche $V_1W_2W_3V_2$ und der Hauswand sowie zwischen dieser Seitenfläche und der anderen Vorbauseite.

b) Die punktförmige Lichtquelle befindet sich auf der Schiene zunächst im Punkt $A\,(\,6\,|\,0\,|\,3\,)$.

Bestimmen Sie die Form des Schattens, den der Vorbau auf die Hauswand wirft. Ermitteln Sie dazu die Schattenpunkte von V_1 und V_2 an und zeichnen Sie den Schatten des Vorbaus in Ihr Koordinatensystem ein.

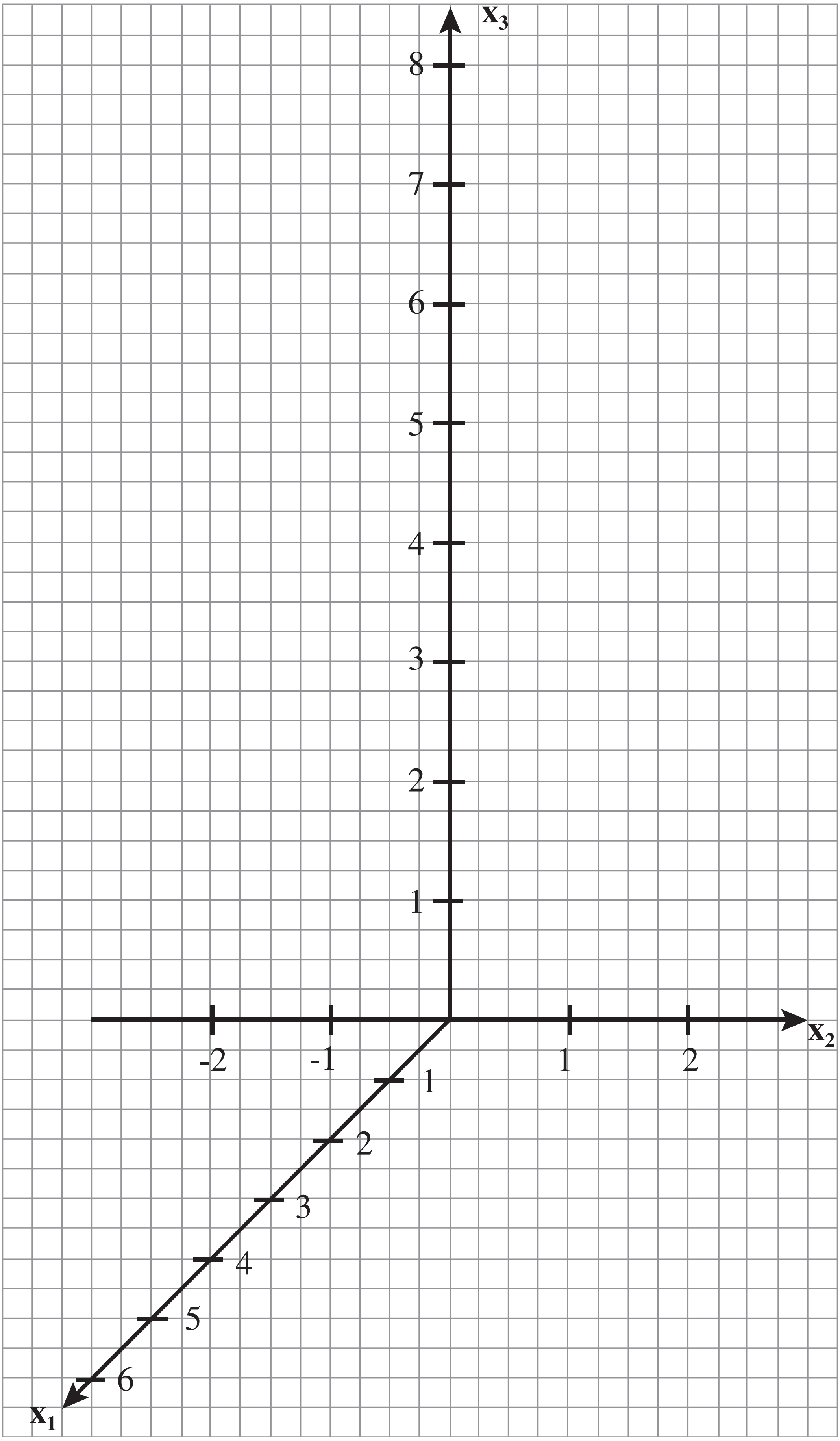
c) Bestimmen Sie, um wie viele Meter die Lichtquelle von A aus auf der Schiene höchstens nach links oder rechts (negative oder positive x_2-Richtung) verschoben werden darf, wenn seitlich vom Vorbau kein Schatten auf die Hauswand fallen soll.

d) Beschreiben Sie, wie sich die Schattenform oberhalb und unterhalb des Vorbaus auf der Hauswand verändert, wenn man die Lichtquelle auf der Schiene von Punkt $B\,(\,6\,|\,-4\,|\,3\,)$ nach Punkt $C\,(\,6\,|\,4\,|\,3\,)$ verschiebt. Bestimmen Sie dazu den tiefsten und höchsten Punkt des Schattens auf der Wand in Abhängigkeit von der Position der Lichtquelle.

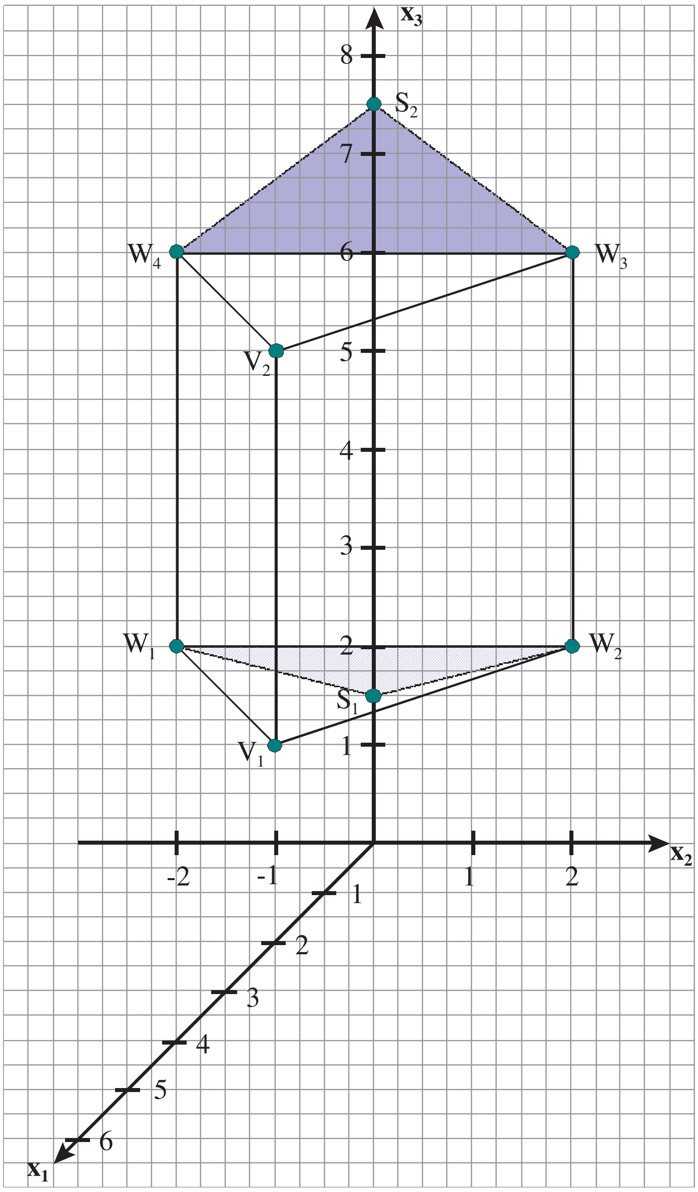
e) Damit Regenwasser von dem flachen Vorbau abfließen kann, wird dem Vorbau ein schräges Dach aufgesetzt. Dieser Dachaufsatz besteht aus zwei dreieckigen Kupferplatten mit den Ecken V_2, W_3 und $D\,(\,0\,|\,0\,|\,7\,)$ sowie W_4, V_2 und D.
Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Dachplatte V_2W_3D und der Vorbauseite $V_1W_2W_3V_2$.

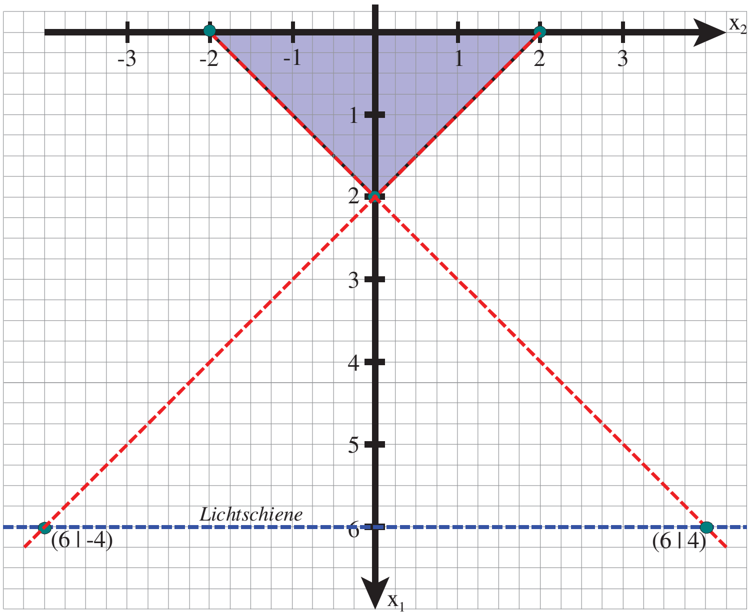
f) Beurteilen Sie, ob der Dachaufbau Einfluss auf den Schatten auf der Wand hat, wenn die Lichtquelle wie im Aufgabenteil d) von Punkt B nach Punkt C bewegt wird.

Anlage zur Aufgabe „Schattenspiele“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	 Da die Ebene, die durch V_2, W_3 und W_4 aufgespannt wird, senkrecht zur Hauswand ist, kann der gesuchte Winkel α elementargeometrisch bestimmt werden als Winkel bei W_3 im rechtwinkligen Dreieck V_2W_3Z mit $Z(\,0\,\|\,0\,\|\,6)$. $\left\|\overrightarrow{W_3Z}\right\| = \left\|\overrightarrow{V_2Z}\right\| = 2$. Das rechtwinklige Dreieck ist also gleichschenklig. Damit ist der Winkel zur Wand 45° und zur anderen Vorbauseite 90°. *Beide Winkel erhält man auch durch eine Projektion des Dreiecks V_2,W_3,W_4 in die x_1-x_2-Ebene direkt aus der Skizze oder rechnerisch.* *α kann auch als Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{W_3V_2}$ und $\overrightarrow{W_3W_4}$, oder aber auch als Winkel zwischen Normalenvektoren der Ebenen berechnet werden.*	20		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
b)	Der Schattenpunkt S_1 von V_1 ergibt sich als Schnittpunkt der Geraden g_{AV_1} durch A und V_1 mit der x_2-x_3-Ebene (Wand). $g_{AV_1}: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{v}_1 - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$. Schnitt mit der x_2-x_3-Ebene $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow r = \frac{3}{2} \wedge x_2 = 0 \wedge x_3 = 1{,}5$ ergibt den Schattenpunkt S_1 (0 | 0 | 1,5) von V_1. Entsprechend bestimmt man den Schattenpunkt S_2 von V_2 als Schnittpunkt der Geraden g_{AV_2} durch A und V_2 mit der x_2-x_3-Ebene (Wand) zu S_2 (0 | 0 | 7,5). Es ergibt sich unterhalb des Vorbaus ein dreieckiger Schatten $W_2W_1S_1$ und oberhalb ein dreieckiger Schatten $W_4W_3S_2$. *Die Zeichnung in a) ist zu ergänzen.*	5	15	
c)	Es ergibt sich kein seitlicher Schatten, wenn die Schattenpunkte von V_1 und V_2 x_2-Koordinaten zwischen –2 und 2 haben. <u>1. Lösungsvorschlag:</u> (elementargeometrisch, senkrechte Projektion in x_1-x_2-Ebene):  *Die Lösung entnimmt man der Zeichnung oder ermittelt sie durch Rechnung. Antwortsatz s.u.*			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
<u>2. Lösungsvorschlag:</u>
$P\,(6 \mid x_2 \mid 3)$ sei der Punkt auf der Schiene, bei dem der Schattenpunkt S_{PV_1} von V_1 die x_2-Koordinate –2 oder 2 hat.
$$g_{PV_1}:\ \vec{x} = \vec{p} + r\cdot(\vec{v}_1 - \vec{p}) = \begin{pmatrix}6\\x_2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-4\\-x_2\\-1\end{pmatrix},\quad r\in\mathbb{R}.$$
Der Schnitt der Geraden g_{PV_1} durch P und V_1 mit der x_2-x_3-Ebene ergibt $S_{PV_1}\,(0 \mid -0{,}5x_2 \mid 1{,}5)$.
$-0{,}5x_2 = -2 \Leftrightarrow x_2 = 4$ bzw. $-0{,}5x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = -4$.
Für den Schatten S_{PV_2} von V_2 gilt entsprechend $S_{PV_2}\,(0 \mid -0{,}5x_2 \mid 7{,}5)$.
Die Lichtquelle kann also bis zu 4 m nach links oder rechts auf der Schiene verschoben werden, ohne dass ein seitlicher Schatten auf der Hauswand erscheint.
</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>
Verschiebt man die Lichtquelle zwischen B und C, so erhält man nach Teil c) keinen seitlichen Schatten.
Bezeichnet $P(6 \mid x_2 \mid 3)$ die Position der Lichtquelle, so ist der tiefste Punkt des Schattens auf der Wand bereits in Teil c) zu $S_{PV_1}\,(0 \mid -0{,}5x_2 \mid 1{,}5)$ bestimmt worden, der höchste Punkt zu $S_{PV_2}\,(0 \mid -0{,}5x_2 \mid 7{,}5)$. (nur bei Lösungsvorschlag 2)
Der Schatten oberhalb des Vorbaus ist immer ein Dreieck mit den Eckpunkten W_3, S_{PV_2} und W_4 mit $S_{PV_2}\,(0 \mid s_2 \mid 7{,}5)$ und $-2 \le s_2 \le 2$.
Der Schatten unterhalb des Vorbaus ist immer ein Dreieck mit den Eckpunkten W_2, W_1 und S_{PV_1} mit $S_{PV_1}\,(0 \mid s_2 \mid 1{,}5)$ und $-2 \le s_2 \le 2$,
d.h. die oberen Schattendreiecke besitzen immer die Basis $\overline{W_4W_3}$ der Länge 4 m und die Höhe 1,5 m.
Die unteren Schattendreiecke besitzen immer die Basis $\overline{W_1W_2}$ der Länge 4 m und die Höhe 0,5 m.
</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>
Der Winkel zwischen zwei Ebenen entspricht dem Winkel zwischen ihren Normalenvektoren. Ein Normalenvektor zur Ebene durch die Punkte V_1, W_2 und W_3 ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Das folgt z.B. aus Teil a), denn der dort berechnete Winkel ist 45°.
Die Ebene E des Daches wird durch die Punkte V_2, W_3 und D aufgespannt. Ein Normalenvektor $\vec{n}_D$ von E steht senkrecht auf den Richtungsvektoren von E, also muss gelten:
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$\vec{n}_D \cdot (\vec{w}_3 - \vec{v}_2) = 0 \wedge \vec{n}_D \cdot (\vec{d} - \vec{v}_2) = 0 \Leftrightarrow -2n_1 + 2n_2 = 0 \wedge -2n_1 + n_3 = 0$.

Ein Normalenvektor von E ist damit $\vec{n}_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Den Winkel zwischen den Normalenvektoren erhält man aus:

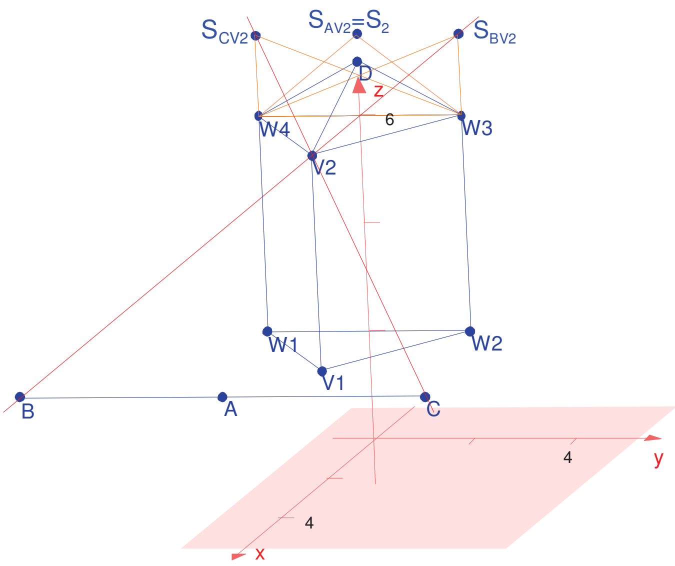
$\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_D|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_D|} \Rightarrow \cos(\alpha) = 0{,}5774... \Rightarrow \alpha \approx 54{,}74°$.

Da der Winkel der Dachplatte zur Vorbauseite stumpf ist, berechnet er sich zu $180° - \alpha \approx 125{,}26°$.

</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

Ohne Dachaufsatz entsteht ein Schatten auf der Wand, der auch den Teil der Wand umfasst, den der Dachaufsatz abdeckt. Der Grund dafür ist, dass der Punkt S_{PV2} einen halben Meter höher auf der Wand ist als der Punkt D – unabhängig von der Position der Lichtquelle im zulässigen Bereich.

Teile des Schattens auf der Wand fallen jetzt also auf den Dachaufsatz.



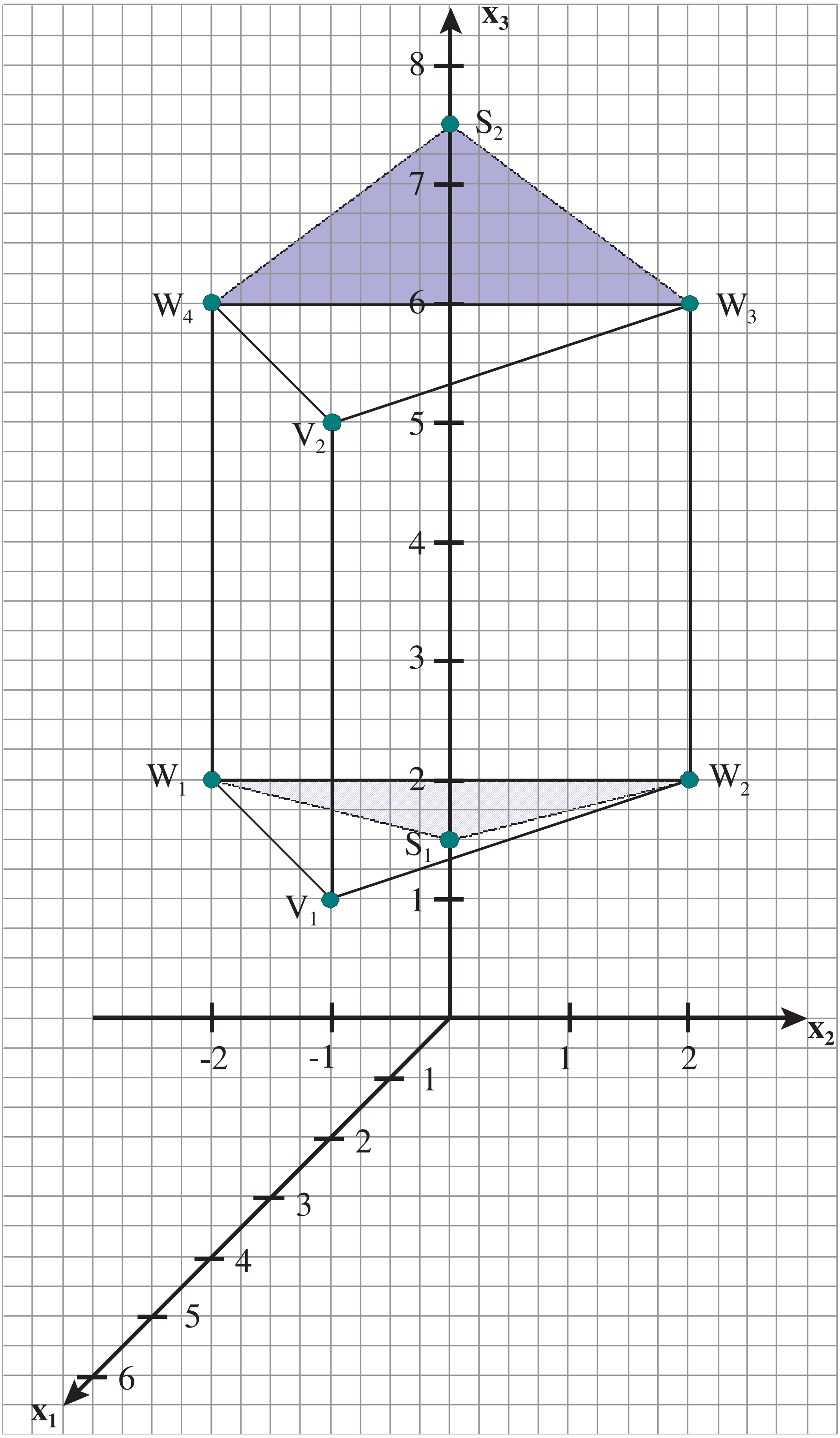
Befindet sich die Lichtquelle in B, so ergibt die Dachkante V_2D als Schatten die Kante DS_{BV2}, die oberhalb von W_4S_{BV2} verläuft. Die obere Begrenzungslinie des Schattens hat sich also verändert.

Bewegt sich die Lichtquelle von B aus nach rechts, so nähert sich der Schattenpunkt S_{PV2} dem Punkt S_2 (bei stets gleicher x_3-Koordinate) und die Steigung der Kante W_4S_{PV2} wächst, sodass für P (6\|–2\|3) der Punkt D auf dieser Kante liegt. Der Dachaufbau verändert nun die oberen Begrenzungslinien nicht mehr, bis sich die Lichtquelle in P (6\|2\|3) befindet. Ab dort bis zum Punkt C tritt der zum oberen Fall symmetrische ein.

Argumentation z.B. mit einer Skizze in der x_2-x_3-Ebene möglich, die auf den Ergebnissen aus d) basiert.

</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

Lösungsschablone:



Stochastik 1

III.1 Sportschuhe

Ein Sportschuhhersteller verkündet, dass sein neuestes Produkt bei 99 % seiner Kunden die Sprintleistung verbessern wird.

a) Geben Sie an, was gewährleistet sein muss, damit die Anzahl X der Kunden ohne Verbesserung ihrer Sprintleistung als binomialverteilt angenommen werden kann. Nennen Sie außerdem Gründe, die dagegen sprechen.

Die Zufallsgröße X beschreibe wie in a) die Anzahl der Kunden, deren Sprintleistungen sich nicht verbessert haben. X wird im Folgenden als binomialverteilt mit der aus den Herstellerangaben folgenden Wahrscheinlichkeit von 0,01 angenommen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 Kunden höchstens einer keine Verbesserung der Sprintleistung feststellt.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 500 Kunden mehr als 3 keine Verbesserung der Sprintleistung beobachten.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 950 Kunden bei mindestens 12 von diesen keine Verbesserung der Sprintleistung eintritt.

e) In einem kleinen Leichtathletik-Verein schwärmen die Mitglieder von dem neuen Schuh und behaupten, bei allen hätten sich die Leistungen verbessert.

   Untersuchen Sie, ob in einem Großverein die gleiche Euphorie ausbrechen könnte.

   Es liegt auf der Hand, dass bei der Betrachtung hinreichend vieler Personen auch solche dabei sein werden, die keine Verbesserung der Sprintleistung feststellten.
   Ermitteln Sie daher die Mindestanzahl von Vereinsmitgliedern, ab der die Wahrscheinlichkeit, dass bei allen Mitgliedern Leistungsverbesserungen zu beobachten sind, unter 0,05 % sinkt.

f) Die Zentrale für Verbraucherschutz hält die allgemeine Begeisterung für übertrieben. Sie möchte ihre Skepsis durch einen Signifikanztest auf dem 5 %-Niveau belegen und dazu 950 Schuhbesitzer aus einer repräsentativen Stichprobe befragen.

   Bestimmen Sie einen entsprechenden Test.

g) Bereits nach einem halben Jahr sinken die Verkaufszahlen der Sportschuhe signifikant.
   Die Werbeabteilung möchte deswegen eine Kampagne starten, um den Bekanntheitsgrad des Produkts wieder über 80 % zu heben.
   Die Finanzabteilung hält dies für überflüssig. Der Bekanntheitsgrad läge bereits über 80 % und die Ursache für das Sinken der Verkaufszahlen sei eher in der Qualität der Konkurrenzprodukte zu suchen.

   Bestimmen Sie die Hypothesen, die hinter diesen Behauptungen stehen, und beschreiben Sie, durch welches Vorgehen und welche Ergebnisse die jeweiligen Verfechter sich von ihren Standpunkten abbringen ließen.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	*Es wird eine „ergebnisoffene" zusammenhängende Darstellung erwartet, z.B.:* Die Unabhängigkeit der Ergebnisse muss gewährleistet sein. Sie ist es nicht, sobald ein Sportler aufgrund der Erfahrungsberichte anderer seine Erwartungshaltung anpasst. Es muss davon ausgegangen werden, dass die Sportler ihre eigene Leistung objektiv bewerten, d.h. dass sie auch andere Faktoren, welche die Sprintleistung nicht besser werden lassen, erkennen. Tagesform, Klima, Halle oder Stadion usw. können sich negativ auf die Leistung auswirken, unabhängig von der Qualität des neuen Schuhs.	10		
b)	$P(X \leq 1) = 0{,}99^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0{,}01^1 \cdot 0{,}99^{99} \approx 73{,}58\%$.	10		
c)	$P(X > 3) = 1 - 0{,}99^{500} - \binom{500}{1} \cdot 0{,}01^1 \cdot 0{,}99^{499} - \binom{500}{2} \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}99^{498} - \binom{500}{3} \cdot 0{,}01^3 \cdot 0{,}99^{497}$ $\approx 73{,}64\%$.		10	
d)	Es gilt $\sigma = \sqrt{950 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99} = \sqrt{9{,}405} > 3$. Damit kann die Binomial- durch die Normalverteilung approximiert werden. Die Anwendung der integralen Näherungsformel mit Hilfe der Tafel für die Gaußsche Integralfunktion führt zu $P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) \approx 1 - \Phi\left(\frac{11{,}5 - 9{,}5}{\sqrt{9{,}405}}\right) \approx 1 - \Phi(0{,}65) \approx 0{,}26$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei mindestens 12 von 950 Kunden keine Verbesserung der Sprintleistungen eintritt, ist etwa 26 %.		15	
e)	Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl *n*, für die gilt $0{,}99^n < 0{,}0005$. Es ergibt sich $n > \frac{\lg\ 0{,}0005}{\lg\ 0{,}99} \approx 756{,}28$. In einem Verein mit mehr als 756 Mitgliedern ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei allen Mitgliedern die Sprintleistungen verbessern, kleiner als 0,05%. In einem Großverein wird eine Euphorie also kaum ausbrechen.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Es sei p die Einzelwahrscheinlichkeit, dass bei einem Kunden durch den Schuhkauf keine Verbesserung der Sprintleistung eintritt. Die Verbraucherschutzzentrale wird die Nullhypothese H_0: $p \le 1\%$ zu verwerfen versuchen. Viele unzufriedene Kunden sprechen gegen die Nullhypothese. Es sei X die Anzahl unzufriedener Kunden unter den 950 Kunden. Gesucht ist eine kleinste Grenze g, so dass $P(X > g \mid H_0) \le 5\%$. Nun ist $P(X > g \mid H_0) < P(X > g \mid p = 0{,}01)$. Man bestimmt daher g so klein wie möglich, damit die rechte Seite kleiner oder gleich 5 % wird. Wie in d) kann die Normalverteilung zur Approximation verwendet werden: $P(X > g \mid p = 0{,}01) = 1 - P(X \le g \mid p = 0{,}01) \approx 1 - \Phi\left(\frac{g + 0{,}5 - 9{,}5}{\sqrt{9{,}405}}\right)$ $\Phi\left(\frac{g + 0{,}5 - 9{,}5}{\sqrt{9{,}405}}\right) = 0{,}95$. Die Tabelle liefert $\frac{g + 0{,}5 - 9{,}5}{\sqrt{9{,}405}} \approx 1{,}65$ und daher ist $g \approx 14,\ldots$ Die Nullhypothese sollte also verworfen werden, wenn mehr als 15 der Befragten keine Verbesserung der Sprintleistungen durch den neuen Schuh erfahren haben.		10	20
g)	Bezeichne p den Bekanntheitsgrad des Produkts. Dann vertreten die Werber die Meinung, dass $p \le 0{,}8$. Sie lassen sich nur durch signifikant große Stichprobenergebnisse vom Gegenteil überzeugen. Die Finanzabteilung vertritt den Standpunkt, dass $p > 0{,}8$. Sie ändert ihre Meinung nur durch signifikant kleine Stichprobenergebnisse. *Andere in sich stringente Lösungen sind ebenfalls als richtig zu bewerten.*		15	
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Stochastik 2

III.2 Lichterkettenproduktion

Eine Firma stellt hochwertige Lichterketten für den Einsatz im Außenbereich her, die durch ihre spezielle Konstruktion, bei der die einzelnen Glühlampen – im Volksmund auch *Glühbirnen* genannt – fest eingelötet werden, jedem Wetter standhalten sollen. Die Ketten werden an die Abnehmer mit folgender Garantie verkauft: Wenn die Lichterkette nicht einwandfrei funktioniert, so erhält der Kunde 20 als Entschädigung.

Bei der Produktion sind zwei voneinander unabhängige Fehler möglich:

- Die Glühlampen können bereits vor dem Einlöten defekt sein. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühlampe defekt ist, beträgt erfahrungsgemäß 4 %.
- Der Zusammenbau der Kette kann fehlerhaft erfolgen, z.B. indem ein Kontakt (oder mehrere) nicht richtig gelötet wird. Die Wahrscheinlichkeit für fehlerhaften Zusammenbau einer Kette beträgt erfahrungsgemäß 5 %.

Eine Lichterkette enthält 24 Glühlampen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lichterkette einwandfrei funktioniert.

b) Ein Kunde hat eine defekte Lichterkette reklamiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Kette alle Glühlampen heil sind und damit der Fehler nur im Zusammenbau liegt.

c) Es gehen gleich nach Verkaufsbeginn viele Garantieansprüche bei der Firma ein. Die hohen Kosten geben den Verantwortlichen zu denken. Daher beauftragen sie einen Stochastiker, um die Gründe zu klären. Dieser berechnet zunächst den Erwartungswert der Garantiekosten für 1 000 verkaufte Lichterketten. Berechnen auch Sie diesen Wert.

Anschließend wird in der Firma diskutiert, ob man nicht besser die einzelnen Glühlampen vor dem Zusammenbau oder auch die fertig gestellte Kette vor dem Verkauf kontrollieren sollte. Ein Mitarbeiter stellt die Kosten für die Kontrolle zusammen: Jede Funktionskontrolle einer Glühlampe kostet 0,06 , die Kontrolle der Kette 0,40 . Dabei hat er die Kosten für den Arbeitsplatz und die Arbeitszeit des Prüfers berücksichtigt.

Nun soll die Summe der zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten für drei verschiedene Möglichkeiten berechnet werden (siehe Aufgabenteile d) bis f)), und zwar für jeweils 1000 zum Verkauf kommende Ketten. Die Gesamtkosten will man dann mit dem in c) berechneten Erwartungswert vergleichen.

d) <u>Fall 1:</u> Es werden nur die Lampen kontrolliert.
Bestimmen Sie die Zahl der durchschnittlich zu kontrollierenden Lampen, damit man 24 funktionierende Lampen erwarten kann.
Da keine Kontrolle der Kette erfolgen soll, kommen dennoch defekte Ketten zum Verkauf. Bestimmen Sie für diesen Fall die Summe der zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten.

e) <u>Fall 2:</u> Es werden nur die fertigen Ketten kontrolliert.
Wenn die Ketten kontrolliert werden, kommen natürlich nur brauchbare Ketten in den Verkauf. Ermitteln Sie die Summe der zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten.

f) <u>Fall 3:</u> Es werden die Lampen und die Ketten kontrolliert.
Bestimmen Sie die Summe der zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten, wenn sowohl die einzelnen Glühlampen als auch die fertigen Ketten kontrolliert werden.

g) Mit den so bestimmten Gesamtkosten ist der zuständige Betriebswirtschaftler nicht einverstanden. Er meint, dass man die Materialkosten und die Arbeitszeit für den Zusammenbau der Ketten ebenfalls berücksichtigen muss und zwar mit 3 pro Kette, unabhängig davon, ob die Kette in den Verkauf geht oder bei einer Kontrolle aussortiert wird. Die Materialkosten für aussortierte Glühlampen will aber auch er vernachlässigen.

Ermitteln Sie unter dieser Annahme das kostengünstigste Kontrollverhalten der Firma.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Jede einzelne Glühlampe muss funktionieren und auch der Zusammenbau muss korrekt erfolgt sein. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit ca. 36 %: $0{,}96^{24} \cdot 0{,}95 \approx 0{,}3566$.	10		
b)	Die Lösung erfolgt über die Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit bei geeigneter Definition von Ereignissen: A: Alle Glühlampen sind heil. B: Die Lichterkette ist defekt. Gesucht ist $P(A \mid B)$: Gegeben ist in der Aufgabe $P(A \cap B) = 0{,}96^{24} \cdot 0{,}05 \approx 0{,}0188$, und mit Aufgabenteil a) erhält man $P(B) \approx 1 - 0{,}3566 = 0{,}6434$. Also ist $P(A \mid B) \approx \frac{0{,}0188}{0{,}6434} \approx 0{,}0292$. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler nur im Zusammenbau ist knapp 3 %.		15	
c)	Da für jede defekte verkaufte Kette 20 anfallen, ergibt sich mit dem Wert aus a) für 1 000 Ketten $(1 - 0{,}3566) \cdot 20 \quad \cdot 1000 = 12\,868$.	10		
d)	<u>Fall 1</u>: Da 4 % aller Glühlampen defekt sind, erwartet man bei 25 geprüften Lampen durchschnittlich 24 Lampen, die funktionieren. ($25 \cdot 0{,}96 = 24$). Es fallen somit Kontrollkosten von $25 \cdot 0{,}06 \quad = 1{,}50$ pro zusammengebauter Kette an. Wegen Fehlern bei Zusammenbau sind aber durchschnittlich 50 von 1 000 verkauften Ketten dennoch defekt, also muss man mit $50 \cdot 20 \quad = 1\,000$ Garantiekosten rechnen. Die zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten betragen $1\,000 \cdot 1{,}50 \quad + 1\,000 \quad = 2\,500$.		15	
e)	<u>Fall 2</u>: Damit 1 000 Ketten in den Verkauf kommen, müssen durchschnittlich $\frac{1000}{0{,}96^{24} \cdot 0{,}95} \approx 2804$ Ketten kontrolliert werden. Die zu erwartenden Kontrollkosten sind somit $2\,804 \cdot 0{,}40 \quad = 1\,121{,}60$. Garantiekosten entfallen, da alle verkauften Ketten intakt sind.		15	
f)	<u>Fall </u>3: Wie unter d) berechnet, betragen die Kontrollkosten zur Gewinnung einer Kette mit intakten Glühlampen im Mittel 1,50 . Da jetzt 95% aller zu prüfenden Ketten intakt sind, muss man $1\,000 : 0{,}95 \approx 1\,053$ Ketten mit intakten Glühlampen weiter prüfen. Die Kontrollkosten und damit die zu erwartenden Gesamtkosten betragen somit $1\,053 \cdot (1{,}50 \quad + 0{,}40 \quad) = 2\,000{,}70$.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
g)	Für jede zusammengebaute Kette müssen jetzt Kosten in Höhe von 3 zusätzlich berücksichtigt werden. Damit erhält man ohne Kontrolle 15 868 , da bei 1 000 verkauften Ketten auch nur 1000 zusammengebaut werden (12 868 $+ 1\,000 \cdot 3$). Im <u>Fall 1</u> erhält man aus dem gleichen Grunde 2 500 $+ 1\,000 \cdot 3 = 5\,500$. Im <u>Fall 2</u> werden 2 804 Ketten zusammengebaut, also betragen die Kosten jetzt 1 121,60 $+ 2\,804 \cdot 3 = 9\,533{,}60$. Im <u>Fall 3</u> werden 1 053 Ketten zusammengebaut, also betragen die Kosten jetzt 2 000,70 $+ 1\,053 \cdot 3 = 5\,159{,}70$. Unter dieser Annahme ist es am günstigsten, alles zu prüfen (Fall 3).			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20