ANALYSIS 1

I.1 Kettenlinie

Bei vielen technischen Problemen treten Kombinationen von Exponentialfunktionen auf. Zwei von ihnen, die besondere Namen tragen, sollen hier näher betrachtet werden.

Sinus hyperbolicus: $f_1(x) = \sinh(x) := \frac{1}{2} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right)$

Cosinus hyperbolicus: $f_2(x) = \cosh(x) := \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)$

a) Untersuchen Sie die Funktionen sinh und cosh auf Nullstellen, Symmetrien und Asymptoten. Zeichnen Sie die Graphen dieser beiden Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem ein $\left(-3 \le x \le 3\right)$. **20 P**

b) Die Namen dieser Funktionen erinnern nicht zufällig an die Funktionen Sinus und Cosinus; es gibt formale Ähnlichkeiten.

Zeigen Sie:

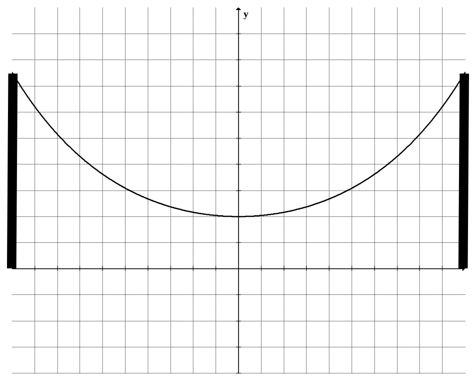
- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $f_1'(x) = f_2(x)$ und $f_2'(x) = f_1(x)$
- sinh und cosh erfüllen die Differentialgleichung $f'' - f = 0$.

Geben Sie jeweils die entsprechenden Beziehungen für die Funktionen Sinus und Cosinus an.

10 P

Spannt man ein Seil (oder eine Kette) zwischen zwei gleich hohen Türmen auf, so folgt seine Linie der so genannten Kettenlinie $y = k(x) = a \cdot \cosh\left(b \cdot x\right)$ mit $a, b > 0$.

c) Begründen Sie, dass a dabei die Höhe des tiefsten Seilpunktes über der Grundebene ist.
Untersuchen Sie, wie sich die Kettenlinie ändert, wenn sich bei festgehaltenem a der Parameter b vergrößert.



10 P

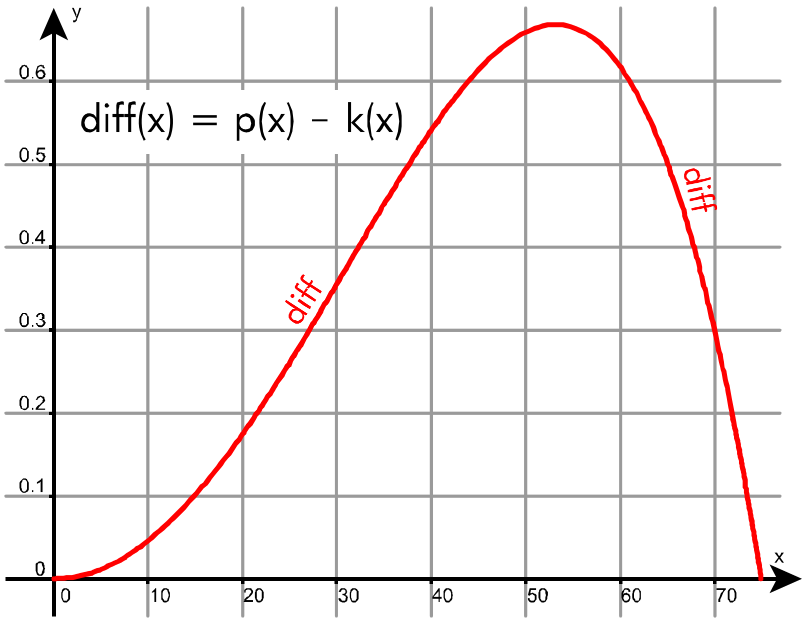
d) Ein Seil wird zwischen zwei jeweils 117,8 m hohen Türmen gespannt. Die Türme sind 150 m voneinander entfernt. Das Seil hat in der Mitte einen Bodenabstand von 80 m.

- Weisen Sie nach, dass die Kettenlinie für dieses Seil der Gleichung $k(x) = 80 \cdot \cosh\left(0{,}0125 \cdot x\right)$ folgt.
- Berechnen Sie den Winkel zwischen Seil und Turm am Befestigungspunkt des Seils.
- Untersuchen Sie, wie sich die Parameter a und b sowie der eben berechnete Winkel ändern, wenn man das Seil straffer spannt. **20 P**

e) Bestimmen Sie die Länge des bereits betrachteten Seils zwischen den Türmen. (Es folgt der Funktion mit der Gleichung $k(x) = 80 \cdot \cosh(0{,}0125 \cdot x)$.)

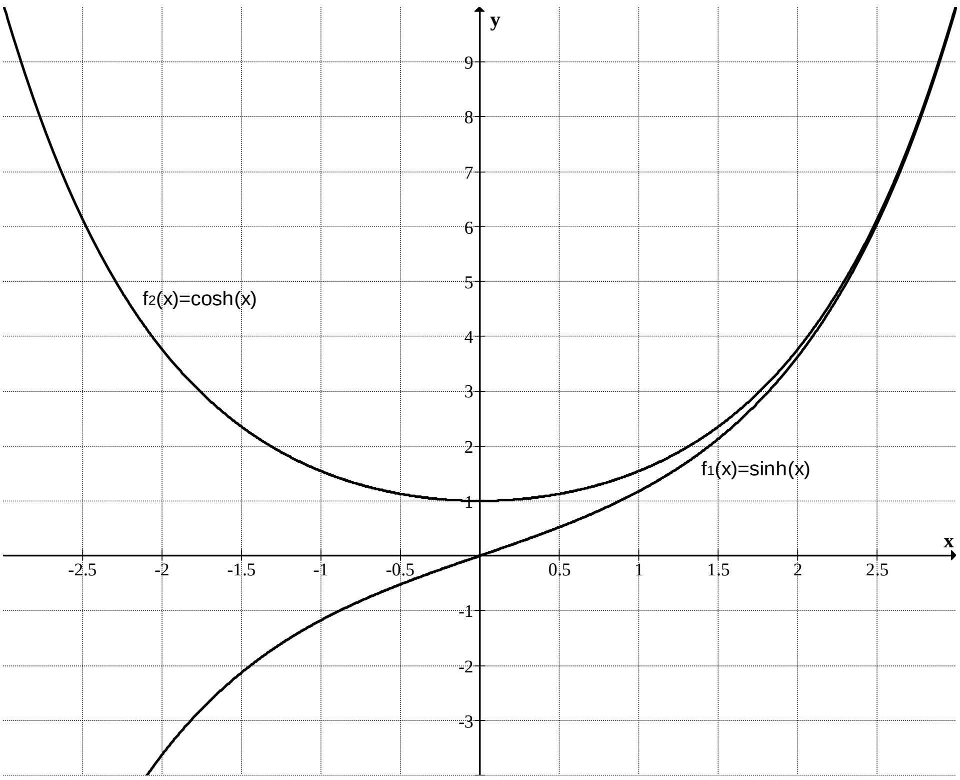
Hinweis: Für eine im Intervall [*c*; *d*] stetig differenzierbare Funktion *f* berechnet sich die Bogenlänge *l* des Graphen von *f* über [*c*; *d*] durch $l = \int_c^d \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$. **20 P**

f) Man kann *k* durch eine einfache quadratische Funktion *p* annähern, z. B. durch $p(x) = 80 + 0{,}00672 \cdot x^2$. Um eine hinreichend genaue Näherung für das gegebene Problem zu erreichen, sollte die Differenz der Seilhöhen, die durch *p(x)* und *k(x)* berechnet werden, zwischen den Türmen nie einen halben Meter überschreiten.



Entscheiden Sie, auch mithilfe der obigen Abbildung, ob *p* in diesem Sinn hinreichend genau ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls eine Verbesserung der quadratischen Näherungsfunktion. Beurteilen Sie die erreichte Verbesserung. **20 P**

Erwartungshorizont

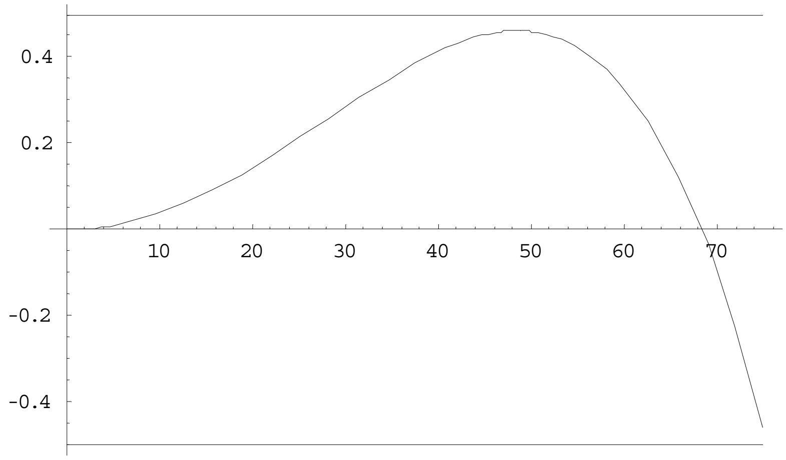
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<u>Sinus hyperbolicus:</u> $\frac{1}{2}\left(e^{x_0}-e^{-x_0}\right)=0 \Rightarrow e^{x_0}=e^{-x_0} \Rightarrow e^{2x_0}=1 \Rightarrow x_0=0$, Nullstelle bei $x_N=0$. Da $\sinh(-x)=0{,}5\cdot(e^{-x}-e^{x})=-\sinh(x)$, ist Sinus hyperbolicus eine ungerade Funktion und sein Graph damit zum Ursprung punktsymmetrisch. Mit $x\to\infty$ geht $e^{-x}\to 0$, und damit gilt $\sinh(x)\to 0{,}5\cdot e^{x}$. <u>Cosinus hyperbolicus:</u> Keine Nullstelle, da der Term in der Klammer als Summe zweier positiver Zahlen immer positiv ist. Da $\cosh(-x)=0{,}5\cdot(e^{-x}+e^{x})=\cosh(x)$, ist der Cosinus hyperbolicus eine gerade Funktion und sein Graph damit zur y-Achse spiegelsymmetrisch. Mit $x\to\infty$ geht $e^{-x}\to 0$, und damit gilt $\cosh(x)\to 0{,}5\cdot e^{x}$. Aufgrund der Geradheit des cosh ist dies auch die Asymptote für $x\to-\infty$. <u>Graphen der Funktionen:</u>  	10	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
b)	Nachrechnen liefert: • $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=0{,}5^2\left(\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2\right)$ $=0{,}25\cdot(2+2)=1$. • $\sinh'(x)=0{,}5\cdot(e^x+e^{-x})=\cosh(x)$ und $\cosh'(x)=0{,}5\cdot(e^x-e^{-x})=\sinh(x)$. • Die beiden hyperbolischen Funktionen sind damit mit ihrer 2. Ableitung identisch. Damit sind sie Lösungen der angegebenen Differentialgleichung. Für die Winkelfunktionen gilt (Tafelwerk!) • $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$. • $\sin'(x)=-\cos(x)$ und $\cos'(x)=-\sin(x)$. Die beiden Winkelfunktionen sind damit mit ihrer 4. Ableitung identisch. • Die entsprechende Differentialgleichung lautet damit $f''+f=0$.	5	5	
c)	Mit der Beachtung der Symmetrie der Kettenlinie und der Tatsache, dass das Seil in der Mitte am tiefsten hängt: $k(0)=a\cdot\cosh\left(b\cdot 0\right)=a\cdot 0{,}5\cdot(2e^0)=a\cdot 0{,}5\cdot 2=a$. Dies ist das gewünschte Resultat. Wenn bei festgehaltenem a der Parameter b vergrößert wird, so ändert sich bei $x=0$ nichts. Der Tiefpunkt der Funktion bleibt also erhalten. Für größere x-Werte vergrößern sich der Betrag der Argumente in der Exponentialfunktion. Da e^x im Wesentlichen den Funktionswert bestimmt, weil e^{-x} für große x-Werte sehr klein ist, wird auch der Funktionswert größer: Der Graph wird bei gleichem Minimum nach beiden Seiten steiler; er erreicht bei festgehaltenem x größere Höhen.		10	
d)	• Mit dem gegebenen Bodenabstand in der Mitte ergibt sich sofort $a=80$. Einsetzen liefert: $80\cdot 0{,}5\cdot\left(e^{0{,}0125\cdot 75}+e^{-0{,}0125\cdot 75}\right)\approx 117{,}808$. Da vorausgesetzt war, dass es sich um eine Kettenlinie handelt, ist damit alles gezeigt. • Der Winkel ergibt sich aus der Steigung der Kettenlinie an der Stelle $x=75$: $k'(75)=80\cdot\sinh(0{,}0125\cdot 75)\cdot 0{,}0125\approx 1{,}08099$. Damit ergibt sich das Winkelmaß zu $\alpha=90°-\arctan(k'(75))\approx 42{,}77°$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	• Wenn das Seil straffer gespannt wird, so hängt es in der Mitte höher. Also wächst der Parameter *a*. Da zugleich das Höhenwachstum zwischen Mitte und Türmen abnimmt, muss (mit dem Ergebnis von c) oder z.B. durch Nachrechnen an einem Beispiel) der Parameter *b* abnehmen. Da das Seil „waagerechter" in den Aufhängungspunkten ankommt, wird der Winkel größer, bleibt aber unter 90°.	5	15	
e)	Da hier $k'(x) = (80 \cdot \cosh(0{,}0125 \cdot x))' = \sinh(0{,}0125 \cdot x)$, ist $\sqrt{1+(k'(x))^2} = \cosh(0{,}0125 \cdot x)$. Damit ergibt sich $l = 2 \cdot \int_0^{75} \cosh(0{,}0125 \cdot x)dx = 2 \cdot 80 \cdot \left[\sinh(0{,}0125 \cdot x)\right]_0^{75}$ $\approx 172{,}96$ Das Seil ist also fast 173 m lang *(und damit etwa 23 m länger als die direkte Verbindung zwischen den Aufhängungspunkten).*		15	5
f)	Sei $diff(x) := p(x) - k(x)$. Gefragt ist, ob der Betrag von *diff* im Intervall [0, 75] immer unter 0.5 bleibt. Ersichtlich ist *diff*(0) = 0 und *diff* (75) ≈ 0. Weiter erkennt man an der Skizze, dass etwa im Intervall [37 , 65] die Genauigkeit nicht ausreicht. So ist z.B. $diff(50) \approx 0{,}66$ - hier ist die maximale Abweichung also weit überschritten. *(Die Methode, diff abzuleiten, dann z.B. mit dem Newton-Verfahren die Nullstelle der Ableitung zu finden – diese Extremstelle liegt bei* $x_E \approx 53{,}15$ *– und schließlich den Funktionswert an dieser Stelle zu bestimmen – er beträgt etwa 0,669, ist ebenso sinnvoll.)* Zur Verbesserung der Näherung gibt es mehrere Möglichkeiten. • Zunächst kann man die beiden Parameter von *p* verändern. Leicht einzusehen ist, dass die veränderte quadratische Funktion p_1 mit $p_1(x) = 79{,}7 + 0{,}00672x^2$ die Differenzfunktion einfach um 30 cm nach unten schiebt; damit bleibt das Maximum der Differenz mit knapp 40 cm im genügenden Bereich, während in der Mitte (mit –30 cm Differenz) und am Rand (mit -31 cm Differenz) ebenfalls noch eine genügende Genauigkeit erreicht wird. Allerdings stimmt p_1 mit *k* gerade an den „empfindlichen" Stellen nicht mehr so gut überein.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

• Möchte man die Übereinstimmung bei $x = 0$ erhalten, so muss der Koeffizient des quadratischen Terms verändert werden – genauer gesagt, er muss kleiner werden. Aber Vorsicht! Hiermit wird der „genäherte“ Aufhängungspunkt am Turm nach unten verlegt! Deswegen ist der Raum für die Anpassung klein. Die folgende Abbildung zeigt die Differenz für $p_2(x) = 80 + 0,00664x^2$:



• Ebenso sinnvoll ist es, statt einer Funktion 2. Grades eine gerade Funktion 4. Grades zu verwenden und hier z.B. $x = 0$, $x = 50$ und $x = 75$ als Stützstellen zu verwenden. Bei diesen Stützstellen ergibt sich für die Näherungsfunktion (durch Lösung des zugehörigen 2 x 2 LGS)
$p_4(x) = 80 + 0,006244 \cdot x^2 + 8,49 \cdot 10^{-8} \cdot x^4$.
Diese Funktion weicht übrigens um höchstens 6 mm von der Kettenlinie ab. Generell ist die Kettenlinie durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades deutlich besser zu nähern!

Hinweis: Die Aufgabenstellung verlangt nicht die Angabe mehrerer Verbesserungsmöglichkeiten für die Näherung von k. Auch die „einfachste“ Lösung ist, wenn sie denn richtig begründet ist, eine vollständige Aufgabenlösung.

</td><td></td><td>5</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

ANALYSIS 2

I.2 Hecken

Für jedes $c \neq 0$ ist eine Funktion f_c gegeben durch $f_c(x) = \dfrac{c \cdot e^x}{\left(e^x + 10\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f_c mit den Koordinatenachsen.
Untersuchen Sie den Graphen von f_c auf Extrempunkte.
Hinweis: Argumentieren ohne die zweite Ableitung ist möglich.
Entscheiden Sie, für welches c Hochpunkte vorliegen.
Geben Sie c so an, dass $H(\ln 10 \mid 11)$ Hochpunkt des Graphen von f_c ist. **20 P**

b) Im Koordinatensystem in der Anlage sind der Graph der Funktion f_{440} und der Graph der Funktion g mit $g(x) = 40 \cdot e^{-x}$ eingezeichnet. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Graphen von f_{440} und g.
Zur Kontrolle: Für die Schnittstelle x_s gilt $x_s = \ln\left(1 + \sqrt{11}\right) \approx 1{,}46$. **10 P**

Für eine große Zierhecke pflanzt eine Landschaftsgärtnerin verschiedene Sträucher der Sorten F und G in einer Reihe abwechselnd ein. Zum Zeitpunkt des Pflanzens sind die Sträucher jeweils 4 Dezimeter hoch. Die Funktionen f_{440} und g beschreiben vereinfachend die momentanen Wachstumsgeschwindigkeiten der Sträucher F und G (in Dezimeter pro Jahr) in Abhängigkeit von der Zeit x, gemessen in Jahren ab dem Zeitpunkt des Einpflanzens.

c) Ermitteln Sie die Stammfunktionen F und G, die die Strauchhöhen der Sorten F bzw. G in Abhängigkeit von der Zeit x darstellen.
Hinweis: Die Substitution $u = e^x + 10$ kann hilfreich sein.
Berechnen Sie die Strauchhöhen beider Sorten zum Zeitpunkt gleicher momentaner Wachstumsgeschwindigkeiten. **25 P**

Arbeiten Sie in jedem Fall mit folgenden Funktionen für die Strauchhöhe weiter:

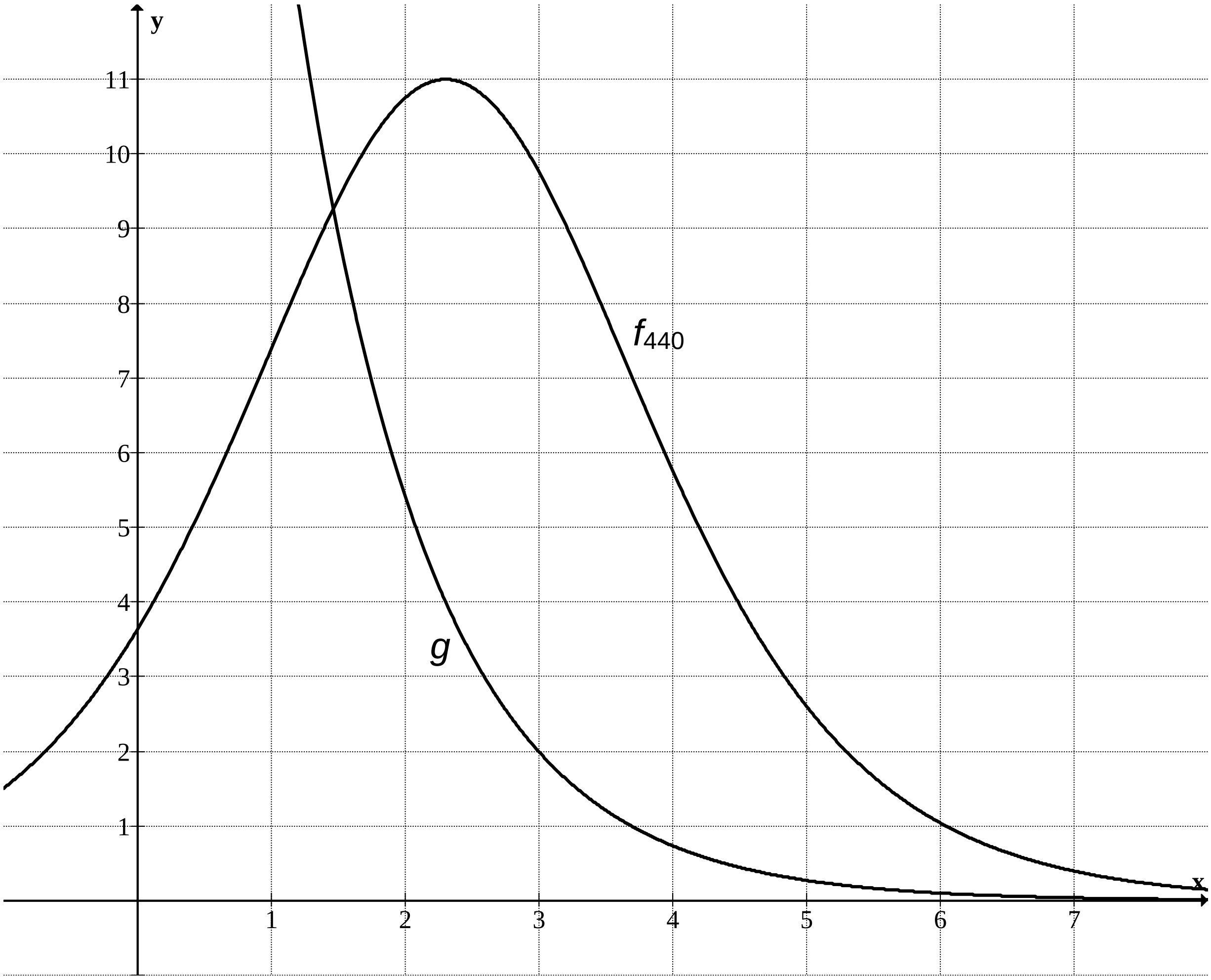
Sorte F: $F(x) = \dfrac{44}{10 \cdot e^{-x} + 1}$, Sorte G: $G(x) = 44 - 40 \cdot e^{-x}$.

d) Begründen Sie, dass beide Sträucher nach 8 Jahren als ausgewachsen gelten. **15 P**

e) Vergleichen Sie das Wachstumsverhalten beider Sorten (Wachstumsgeschwindigkeit und Höhenentwicklung). Weisen Sie nach, dass die beiden Sorten zu jenem Zeitpunkt den größten Höhenunterschied aufweisen, an dem sich die Graphen der Funktionen f_{440} und g schneiden. **20 P**

f) Die relative Wachstumsgeschwindigkeit w ist definiert als Quotient aus der momentanen Wachstumsgeschwindigkeit eines Strauches und seiner Höhe.
Ermitteln Sie für beide Strauchsorten $w(x)$ und stellen Sie die Funktionsterme möglichst einfach dar. **10 P**

Anlage zur Aufgabe „Hecken“



Erwartungshorizont:

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

<u>Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen</u>:

Mit der x-Achse gibt es keinen Schnittpunkt, da der Zähler nie Null wird.

Schnittpunkt mit der y-Achse: Durch Einsetzen $S_y(0 \mid \frac{1}{121}c)$.

<u>Extrempunkte</u>:

Ableiten liefert

$$\begin{aligned} f_c{}'(x) &= \frac{c\cdot e^x\cdot(e^x+10)^2 - c\cdot e^x\cdot 2\cdot(e^x+10)\cdot e^x}{(e^x+10)^4} \\ &= \frac{c\cdot e^x\cdot(e^x+10-2e^x)}{(e^x+10)^3} \\ &= \frac{c\cdot e^x}{\left(10+e^x\right)^3}\cdot\left(10-e^x\right). \end{aligned}$$

Die einzige Nullstelle dieser Funktion liegt bei $x_E = \ln 10 \approx 2{,}30$.
Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion ist dies eine Durchgangsnullstelle, deswegen handelt es sich bei $E\left(\ln 10 \mid \frac{c}{40}\right)$ um einen Extrempunkt.

Selbstverständlich ist auch eine Argumentation mit $f_c''(\ln 10) = -\frac{1}{80}c \neq 0$ *möglich.*

<u>Fallunterscheidung</u>:

Für $c > 0$ gilt: Nenner ist positiv, $c\cdot e^x > 0$, $10-e^x$ monoton fallend, Vorzeichenwechsel $+\to-$. E ist somit Hochpunkt.

Für $c < 0$ gilt: Nenner ist positiv, $c\cdot e^x < 0$, $10-e^x$ monoton fallend, Vorzeichenwechsel $-\to+$. E ist somit Tiefpunkt.

Der Graph besitzt den Hochpunkt $E_H\left(ln 10 \mid 11\right)$ für $c = 440$.

</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

<u>Schnittpunktbestimmung:</u>

$\frac{440\cdot e^x}{(e^x+10)^2} = 40\cdot e^{-x} \Leftrightarrow 440\cdot e^{2x} = 40\cdot(e^x+10)^2 \Leftrightarrow 11\cdot e^{2x} = e^{2x}+20e^x+100$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 2\cdot e^x - 10 = 0$.

Nach Substitution $z = e^x$ erhält man die quadratische Gleichung $z^2-2z-10=0$ mit den Lösungen $z_{1,2} = 1\pm\sqrt{11}$ und damit $e^x = 1\pm\sqrt{11}$. Da e^x nicht negativ sein kann, lautet die einzige Schnittstelle $x_s = \ln\left(\sqrt{11}+1\right) \approx 1{,}46$.

Damit ist $f\ (\ln\left(\sqrt{11}+1\right) = 4\sqrt{11}-4 \approx 9{,}27$.

Die Graphen schneiden sich in $S(\ln\left(\sqrt{11}+1\right) \mid 4\sqrt{11}-4)$ bzw. $S(1{,}46 \mid 9{,}27)$.

</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

c) Berechnung der Stammfunktionen von *f*:

Substitution: $u(x)=e^x+10 \Leftrightarrow e^x=u(x)-10,\ du=e^x\,dx \Leftrightarrow dx=\frac{du}{e^x}$.

Damit folgt für das unbestimmte Integral

$$\int f_{440}(x)\,dx=\int\frac{440e^x}{\left(e^x+10\right)^2}dx=\int\frac{440\cdot(u-10)}{u^2\cdot(u-10)}du=\int\frac{440}{u^2}du=-\frac{440}{u}+c_0$$

$$=-\frac{440}{e^x+10}+c_0\ .$$

Bemerkung: Dass die angegebene Stammfunktion von f wirklich eine solche ist, kann durch Ableiten oder durch Umrechnung entsprechend zu a) gezeigt werden. Dies ist aber nicht gefordert!

Die Stammfunktion *F* von f_{440} gibt die Höhe der Sträucher *F* zum Zeitpunkt *x* an. Mit der Anfangsbedingung *F*(0) = 4 erhält man:

$$F(0)=\frac{-440}{e^0+10}+c_0=-40+c_0=4 \Rightarrow c_0=44\ .$$

Die gesuchte Funktion *F* lässt sich somit folgendermaßen darstellen:

$$F(x)=\frac{-440}{e^x+10}+44=\frac{-440+44e^x+440}{e^x+10}=\frac{44e^x}{e^x+10}=\frac{44}{1+10e^{-x}}\ .$$

Berechnung der Stammfunktionen von *g*:

$$\int 40\cdot e^{-x}dx=-40\cdot e^{-x}+c_0\ .$$

Es folgt für die gesuchte Funktion *G*:

$$G(x)=-40e^{-x}+44\ .$$

Momentane Wachstumsgeschwindigkeiten:

Die momentanen Wachstumsgeschwindigkeiten werden durch die erste Ableitung *F'* bzw. *G'*, also durch *f* und *g*, berechnet. Durch Gleichsetzen von *f* und *g* erhält man den Zeitpunkt *x*; die Lösung ($x\approx 1,46$) wurde bereits im Teil b) berechnet.

Nach etwa eineinhalb Jahren sind also die Wachstumsgeschwindigkeiten beider Straucharten gleich.

Strauchhöhen zum Zeitpunkt gleicher Wachstumsgeschwindigkeiten:

$$F\left(\ln\left(\sqrt{11}+1\right)\right)=\frac{44}{\frac{10}{1+\sqrt{11}}+1}=\frac{44\cdot\left(1+\sqrt{11}\right)}{10+1+\sqrt{11}}=\frac{44\cdot\left(1+\sqrt{11}\right)}{11+\sqrt{11}}$$

$$=\frac{44\cdot\left(1+\sqrt{11}\right)\left(11-\sqrt{11}\right)}{110}=\frac{44\cdot\left(10\cdot\sqrt{11}\right)}{110}=4\sqrt{11}\approx 13,27\ .$$

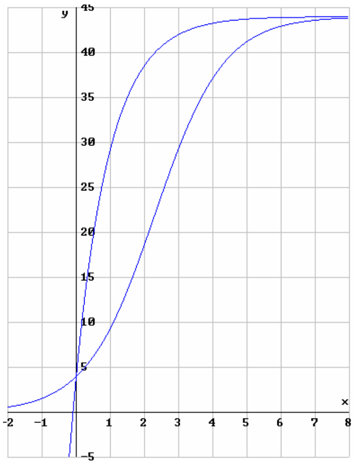
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$G\left(\ln\left(\sqrt{11}+1\right)\right)=\frac{-40}{\sqrt{11}+1}+44=\frac{-40\left(\sqrt{11}-1\right)}{\left(\sqrt{11}+1\right)\left(\sqrt{11}-1\right)}+44=\frac{-40\left(\sqrt{11}-1\right)}{10}+44$$

$$=-4\sqrt{11}+4+44=48-4\sqrt{11}\approx 34{,}73\,.$$

Die Sträucher der Sorte F haben also eine Höhe von ca. 1,30 m, die der Sorte G eine Höhe von ca. 3,50 m.

Zur Information rechts die (nicht geforderten) Graphen der Funktionen F und G.



</td><td>10</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Strauchhöhen im ausgewachsenen Zustand:

Strauchsorte F: $F(8)\approx 43{,}85$ und $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{44}{10\cdot e^{-x}+1}=44\,.$

Strauchsorte G: $G(8)\approx 43{,}98$ und $\lim\limits_{x\to\infty} G(x)=44\,.$

Im Alter von 8 Jahren weichen beide Strauchsorten nur noch geringfügig von ihren endgültigen Höhen im ausgewachsenen Zustand ab.

</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Das Wachstumsverhalten beider Sorten unterscheidet sich deutlich:
Während Sorte F logistisch wächst, wächst Sorte G exponentiell beschränkt.

Im Laufe der Zeit ändert sich der Höhenunterschied der Sträucher in der Hecke gravierend. Zum Zeitpunkt des Pflanzens sind beide Sträucher gleich hoch. Wegen der unterschiedlichen Wachstumsgeschwindigkeiten nimmt der Höhenunterschied in der Folgezeit deutlich zu. Da beide Sorten aber nach 8 Jahren als ausgewachsen gelten und dann die gleiche Höhe erreicht haben (vgl. Teil e)), kann der Höhenunterschied nach acht Jahren nur sehr klein sein.

Hier könnten exemplarisch einige Differenzen $F(x) - G(x)$ berechnet werden.

Um den Zeitpunkt des größten Höhenunterschied zu ermitteln, wird zunächst die Differenzenfunktion $D(x):= F(x) - G(x)$ bestimmt.

Die notwendige Bedingung $D'(x)=0$ führt auf das bereits gelöste Problem $f\left(x_s\right)=g\left(x_s\right)$ mit der bekannten Lösung $x_s=\ln\left(\sqrt{11}+1\right)\approx 1{,}46$ *(vgl. Teil b)).*

Nach etwa eineinhalb Jahren haben also die Sträucher den größten Höhenunterschied.

</td><td></td><td>5</td><td>15</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Laut Definition ist die Wachstumsgeschwindigkeit $w_F = \frac{f}{F}$ *bzw.* $w_G = \frac{g}{G}$. Durch Einsetzen ergibt sich $w_F(x) = \frac{10}{e^x + 10}$ und $w_G(x) = \frac{10}{11 \cdot e^x - 10}$. Die Funktion *w* gibt die relative Wachstumsgeschwindigkeit an; ihre Werte tragen die Einheit (Jahre^{-1}).		5	5
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

LA/AG 1

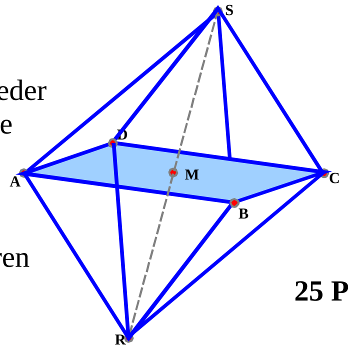
II.1 Oktaeder

In einem kartesischen Koordinatensystem sind folgende Punkte gegeben:

$$A\,(\,2\,|\,0\,|\,4\,),\ B\,(\,-2\,|\,5\,|\,1\,)\text{ und }C\,(\,2\,|\,10\,|\,4\,).$$

a)
- Berechnen Sie einen vierten Punkt *D* so, dass die Punkte *A*, *B* und *C* durch diesen Punkt *D* zu einem Quadrat ergänzt werden.
- Bestätigen Sie, dass der Vektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ senkrecht zur Ebene $\boldsymbol{E_1}$ ist, in der die vier Punkte *A*, *B*, *C* und *D* liegen, und berechnen Sie seine Länge. **20 P**

b) Auf dem Quadrat *ABCD* lässt sich ein reguläres (regelmäßiges) Oktaeder ***O*** = *ABCDRS* aufbauen (siehe Abbildung). Regulär bedeutet, dass alle Kanten gleich lang sind.

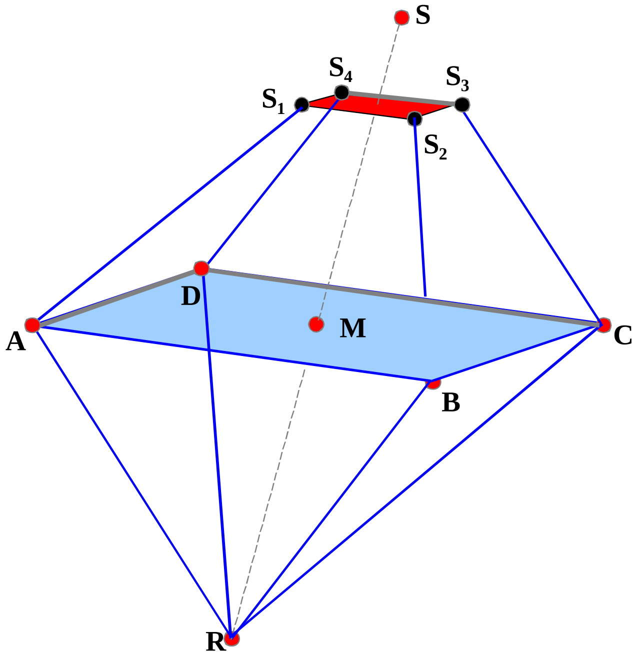


- Berechnen Sie den Abstand der Punkte *R* und *S*.
- Bestimmen Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte und skizzieren Sie das Oktaeder im Koordinatensystem in der Anlage. **25 P**

c) Als regulärer Körper besitzt ***O*** eine so genannte Inkugel $\boldsymbol{K_I}$, also eine einbeschriebene Kugel, die alle Seitenflächen berührt.
- Begründen Sie argumentativ unter Ausnutzung der Regularität, in welchem charakteristischen Punkt die Inkugel $\boldsymbol{K_I}$ die jeweilige Seitenfläche berührt.
- Bestimmen Sie den Berührpunkt *P* von $\boldsymbol{K_I}$ mit der Seitenfläche *BRC*.
(Hinweis: Sollten Sie in b) den Punkt *R* nicht errechnet haben, verwenden Sie *R*(5 | 5 | 0).)
- Bestimmen Sie den Radius von $\boldsymbol{K_I}$ und geben Sie ihren Mittelpunkt an. **15 p**

d) Gegeben ist jetzt noch die Ebenenschar $\boldsymbol{F_t}$ mit $F_t: t\cdot x_1 + (7t-1)\cdot x_3 + (4-30t) = 0\ \ (t \in \mathbb{R})$.
- Zeigen Sie, dass jede Ebene dieser Ebenenschar die Gerade g_{AC} durch *A* und *C* enthält.
- Bestimmen Sie das Intervall *I* der Werte von *t*, für die die Ebene $\boldsymbol{F_t}$ die Kante $\overline{BR}$ des Oktaeders schneidet. Bestimmen Sie auch das entsprechende Intervall bezogen auf die Kante $\overline{SD}$.
- Ermitteln Sie die Form der Schnittfigur, die jede Ebene $\boldsymbol{F_t}$ mit dem Oktaeder ***O*** aufweist, falls der Parameter *t* aus dem eben bestimmten Intervall *I* ist.
Benennen Sie dabei die Schnittpunkte von F_t mit $\overline{BR}$ bzw. $\overline{SD}$ mit *T* und *U*.
- Untersuchen Sie, für welchen Wert von *t* aus dem Intervall *I* die zugehörige Schnittfigur den kleinsten Flächeninhalt aufweist, und geben Sie diesen an.
Skizzieren Sie die zugehörige Schnittfigur. **30 P**

e) In dieser Teilaufgabe geht es um einen Oktaederstumpf. Dabei wird jede der Ecken *A*, *B*, *C*; *D*, *R* und *S* entfernt, wie es beispielhaft für *S* im Schrägbild dargestellt ist.



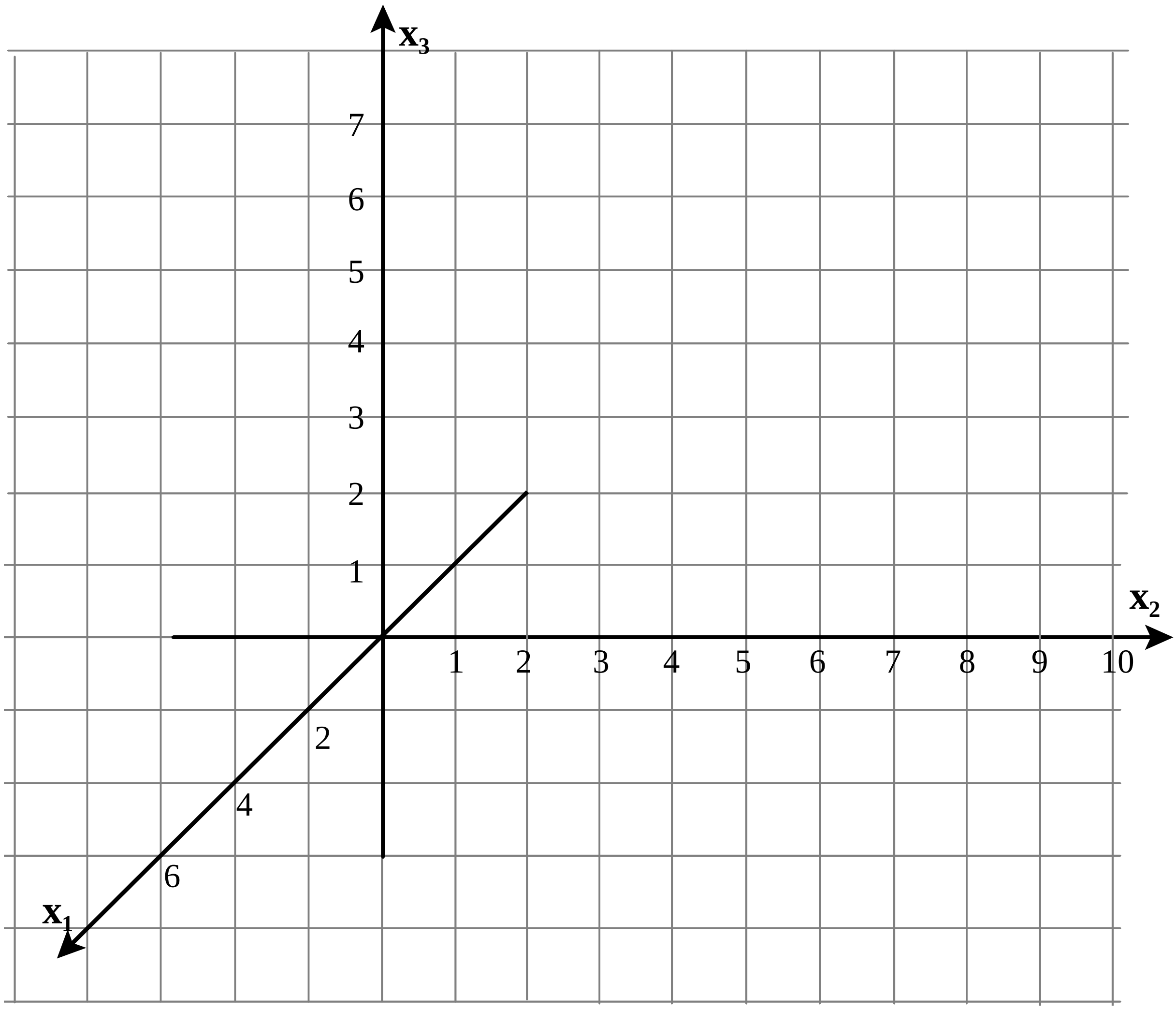
Die Schnittebene $\boldsymbol{E_2}$, welche die vier Punkte S_1, S_2, S_3 und S_4 enthält, ist parallel zur Ebene $\boldsymbol{E_1}$ aus Teilaufgabe a), in der die Punkte *A*, *B*, *C*, *D* und *M* liegen.

Der Abstand der Ebene $\boldsymbol{E_2}$ von *S* betrage 1 LE.

- Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S_2.und dessen Abstand zu *S*.
- Begründen Sie, von welcher Art das Viereck S_1, S_2, S_3, S_4 ist.
- Alle Eckpunkte werden nun auf die geschilderte Art entfernt.
  Geben Sie begründet an, welche Form die ursprünglichen gleichseitigen Dreiecke dann angenommen haben.

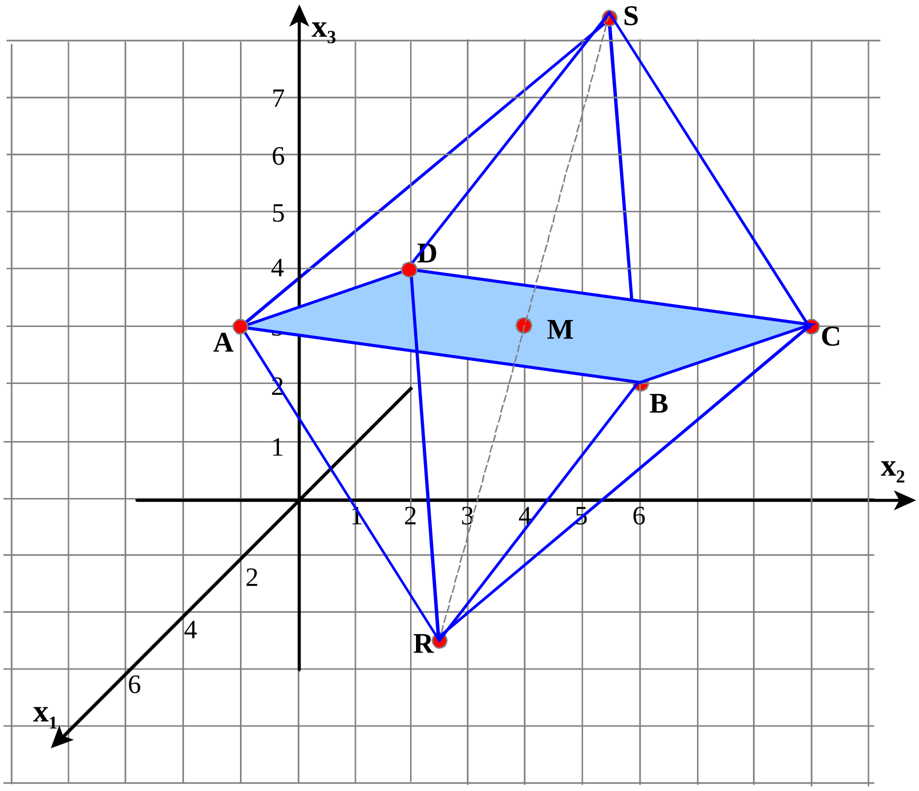
10 P

Anlage zur Aufgabe „Oktaeder“

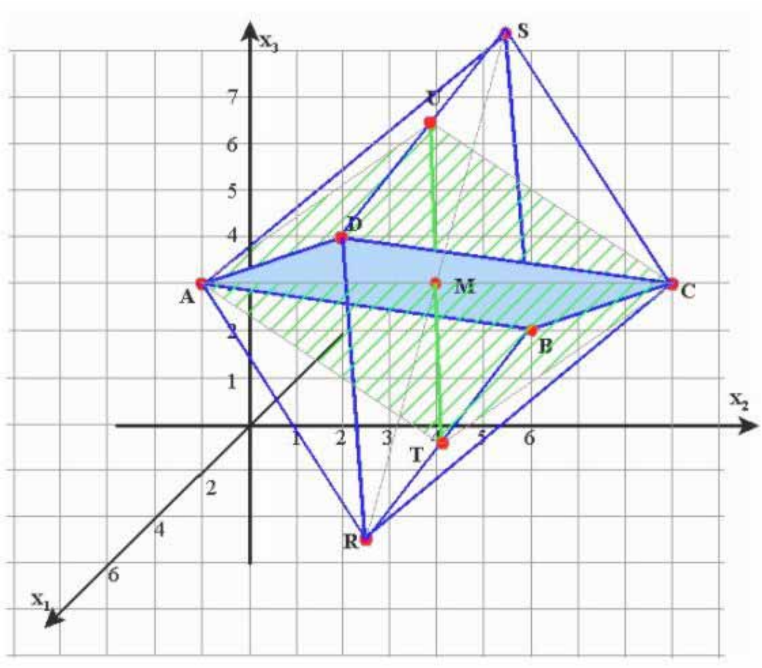


Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
Ergänzung zum Quadrat:
$d(A,B)=\sqrt{4^2+5^2+3^2}=\sqrt{50}; d(B,C)=\sqrt{4^2+5^2+3^2}=\sqrt{50}=5\cdot\sqrt{2}$
$\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}4\\-5\\3\end{pmatrix}; \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}; \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow \overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$
Beide Bedingungen sichern die Möglichkeit der Ergänzung zum Quadrat.
Der Punkt D errechnet sich dann aus $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$ zu D (6 | 5 | 7).
Vektor senkrecht zur Ebene:
Nachweis der Eigenschaft senkrecht z.B. über Ebene E_1, die aufgespannt wird durch die Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$. Es ist dann zu zeigen $\vec{n}_E\perp\overrightarrow{BA}$ und $\vec{n}_E\perp\overrightarrow{BC}$:
$\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\3\end{pmatrix}=-12+0+12=0$ und $\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}=0$.
Länge des Vektors:
$|\overrightarrow{n_E}|=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$.
</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
Abstand der Punkte R und S:
Die Strecke MS ist die Höhe h der oberen quadratischen Pyramide, also in dem rechtwinkligen Dreieck CMS eine Kathete. Die Hypotenuse CS hat dieselbe Länge wie alle Kanten, nämlich $5\cdot\sqrt{2}$, und aus d(A,C) = 10 folgt d(M,C) = 5. Damit gilt für die Höhe h: $h^2 = 2\cdot 25 - 25 = 25$, also h = d(M,S) = 5.
R liegt aus Symmetriegründen auf der Geraden durch S und M und es gilt analog d(M,R) = 5. Daraus folgt insgesamt d(R,S) = 10.
Koordinaten der Punkte R und S:
Der Mittelpunkt des Quadrats liegt bei M(2 | 5 | 4). Mit dem bekannten Normalenvektor (der Länge 5) und dem ebenfalls bekannten Abstand von 5 der beiden Punkte zur Ebene ergibt sich aus (2 | 5 | 4)+(–3 | 0 | 4) der Punkt S(–1 | 5 | 8) und aus (2 | 5 | 4)–(–3 | 0 | 4) der Punkt R(5 | 5 | 0).
Skizze
folgende Seite
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
		15	10	
c)	Berührpunkte der Kugel mit den Seitenflächen Regularität hat hier zur Folge, dass alle Seitenflächen des Oktaeders gleichseitige Dreiecke sind. Sie hat auch zur Folge, dass der Mittelpunkt der Inkugel in M liegt. Die Pyramide aus je einer Seitenfläche und M basiert also auf einem gleichseitigen Dreieck; da die Inkugel die Seitenfläche genau am Fußpunkt der Raumhöhe dieser Pyramide berührt, ist der Berührpunkt der Schwerpunkt S_D des gleichseitigen Dreiecks. *(Hinweis: Es gibt andere Argumentationswege, die die Symmetrie anders ausnutzen und zum gleichen Punkt, aber mit anderen Eigenschaften kommen. S_D ist gleichzeitig Höhenschnittpunkt und Inkreismittelpunkt des Dreiecks.)* Bestimmen von P und r Für die Berechnung von P kann man das Wissen über die besondere Lage des Schwerpunkts (bei zwei Dritteln der Höhe, von der Spitze aus) ausnutzen. Dies ergibt den Ansatz $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OR}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{RB}\right)$ und damit $P\left(\frac{5}{3}\middle|\frac{20}{3}\middle|\frac{5}{3}\right)$. Der Radius r_i der Inkugel ist nun einfach der Abstand von M – denn M ist aus Symmetriegründen auch Mittelpunkt der Inkugel – und P und ergibt sich zu $r_i=\frac{5}{3}\sqrt{3}$.		10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	**Jede Ebene enthält Gerade durch A und C** Wenn zwei Punkte in einer Ebene liegen, liegt auch die gesamte Gerade durch diese Punkte in der Ebene. Also reicht es zu zeigen, dass die Koordinaten von A und C die Gleichung der Ebenenschar erfüllen: Für $A: t\cdot 2+(7t-1)\cdot 4+(4-30t)=0$; für $C: t\cdot 2+(7t-1)\cdot 4+(4-30t)=0$. Damit ist alles gezeigt. **Intervall des Parameters, sodass Kante BR geschnitten wird** Die Strecke $\overline{BR}$ lässt sich darstellen als $\overline{BR}: \vec{x}=\overrightarrow{OB}+\lambda\cdot\overrightarrow{BR}$ mit $\lambda\in[0,1]$ bzw. $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}7\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+7\lambda\\5\\1-\lambda\end{pmatrix}$. Damit ist $\overline{BR}\cap F_t: t(-2+7\lambda)+(7t-1)(1-\lambda)+4-30t=0$ $\Leftrightarrow -25t+3+\lambda=0 \Leftrightarrow t=\frac{3+\lambda}{25}$. Mit den bekannten Intervallgrenzen für λ *(und der impliziten Voraussetzung der Stetigkeit der Drehung der Ebenen mit stetiger Variation von λ)* ergibt sich $t\in\left[\frac{3}{25},\frac{4}{25}\right]$. **Schnittfigur mit *O*** Seien T und U die Schnittpunkte von F_t mit $\overline{BR}$ bzw. $\overline{SD}$. Dann ist $ATCU$ nicht nur ein Viereck, sondern wegen der Regularität des Oktaeders eine Raute mit Diagonalen, die jeweils eine positive Länge aufweisen. Also haben die Rauten jeweils einen nichtleeren Flächeninhalt. **Schnittfigur mit kleinstem Flächeninhalt** Alle diese Rauten haben die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$, die Änderung des Flächeninhalts kann nur aus der Länge der anderen Diagonalen $\overline{TU}$ kommen. Diese ist aus geometrischen Gründen maximal an den Rändern und aus Symmetriegründen minimal, wenn T der Mittelpunkt von $\overline{BR}$ ist. Damit ist $T(1{,}5\mid 5\mid 0{,}5)$. Den Parameter t in F_t für den Punkt T ergibt sich z.B. aus der Beziehung $t=\frac{3+\lambda}{25}$; da $\lambda_T=0{,}5$, ist $t_T=\frac{7}{50}$. Die gesuchte Fläche ergibt sich z.B. durch $A=d(AC)\cdot d(MT)$ zu $A=5\sqrt{50}\approx 35{,}3533$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Skizze: 		20	10

e) Koordinaten von S_2 und Abstand zu S:

Möglicher Lösungsweg mit Mitteln der Analytischen Geometrie:

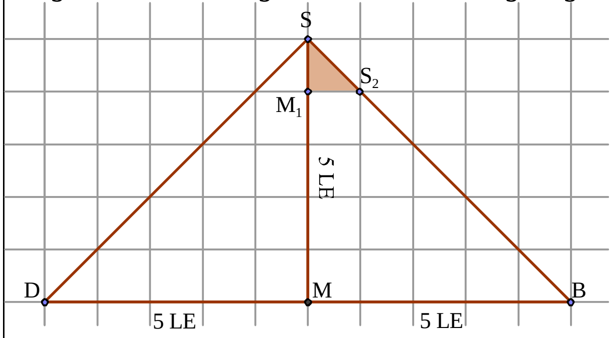
Die Ebenengleichung ergibt sich aus dem Normalenvektor aus a) und einem Punkt der Ebene. Dazu kann man denjenigen Punkt M_1 der Raumdiagonalen $\overline{RS}$ wählen, der 1 LE von S entfernt liegt.
Es ist $g_{MS}: \vec{x} = \overrightarrow{0M} + \lambda \cdot \overrightarrow{MS}$. Aus früheren Teilaufgaben ist bekannt, dass der Abstand von M und S 5 LE ist. Man erhält also M_1, wenn man setzt $\lambda = \frac{4}{5} = 0{,}8$:
$M_1 = (2–2{,}4 \mid 5 \mid 4+3{,}2) = (–0{,}4 \mid 5 \mid 7{,}2)$.

Die Ebenengleichung lautet vorläufig $–3x_1 + 4x_3 = c$. Die Koordinaten von M_1 eingesetzt ergibt $1{,}2 + 28{,}8 = 30 = c$ und damit $E_2: -3x_1 + 4x_3 - 30 = 0$.

Die Gerade durch B und S hat die Gleichung $g_{BS}: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\7\end{pmatrix}$.

Eingesetzt in die Ebenengleichung: $6–3\mu+4+28\mu–30 = 25\mu–20 = 0$. Daraus folgt $\mu = 0{,}8$. Eingesetzt in g_{BS} erhält man $S_2 = (–1{,}2 \mid 5 \mid 6{,}6)$.

Für den Abstand gilt: $\left|\overline{S_2S}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\5\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1{,}2\\5\\6{,}6\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0{,}2\\0\\1{,}4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0{,}04 + 1{,}96} = \sqrt{2}$.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Möglicher elementargeometrischer Lösungsweg:  Aus dem Dreieck $S\,S_2\,M_1$ kann man ablesen $\left\|\overline{S_2S}\right\| = \sqrt{2}$. Um die Koordinaten von S_2 zu erhalten, setzt man wie oben in die Geradengleichung μ = 0,8 ein, denn $\left\|\overline{BS}\right\| = \sqrt{50} = 5\cdot\sqrt{2}$. Viereck S_1, S_2, S_3, S_4 ist Quadrat Das liegt an der Regelmäßigkeit des Oktaeders, sodass die Quadratform von *ABCD* erhalten bleibt. Änderung der Dreiecksform Jeder Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks wird bei der Entfernung der Spitzen des Oktaeders ersetzt durch zwei neue Eckpunkte, deren Verbindungslinie in der Schnittebene liegt. Es wird also ein Sechseck *(mit symmetrisch angeordneten Ecken)*		5	5
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

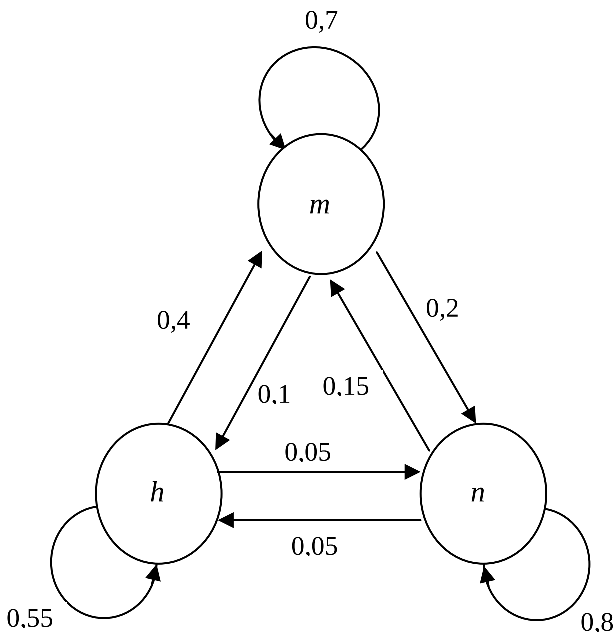
LA/AG 2

II.2 Einkommensgruppen

Die Familien eines fiktiven Landes werden einer der drei angegebenen Einkommensgruppen zugeordnet. In statistischen Erhebungen hat man festgestellt, dass Kinder der Eltern einer bestimmten Einkommensgruppe nach ihrer Ausbildung auch einer anderen Einkommensgruppe angehören können.
Es wird angenommen, dass 10 % der Einkommensgruppe hoch (*h*), 60 % der Einkommensgruppe mittel (*m*) und 30 % der Einkommensgruppe niedrig (*n*) angehören. Vereinfachend wird angenommen, dass jede Familie genau zwei Kinder hat und in der nächsten Generation jedes Kind mit einem Kind einer anderen Familie wieder eine Familie gegründet hat.

a) Es werden 4200 Familien nach repräsentativen Grundsätzen ausgewählt.
Berechnen Sie die Anfangsverteilung $\vec{p}_0$ der ausgewählten Bevölkerungsgruppe. **5 P**

Die nachfolgende Abbildung gibt für jede Einkommensgruppe an, welche Anteile dieser Gruppe von einer Generation zur nächsten die Gruppe wechseln bzw. in der Gruppe bleiben.



$$P = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 8 & 14 & 3 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

b) Begründen Sie anhand des Graphen, dass dieser Prozess durch die Übergangsmatrix *P* beschrieben werden kann und berechnen Sie die Einkommensverteilung $\vec{p}_1$ in der nächsten Generation.
20 P

c) Ermitteln Sie die Einkommensverteilung $\vec{p}_{-1}$ der Elterngeneration der ersten Gruppe.
Setzen Sie dabei voraus, dass obiges Modell auch schon bei dieser Generation galt. **20 P**

Nach einigen Jahren stellt man fest, dass Eltern der hohen Einkommensgruppe durchschnittlich nur ein Kind bekommen, in der mittleren Einkommensgruppe dagegen zwei Kinder und in der niedrigen Einkommensgruppe drei Kinder geboren werden.

d) Ermitteln Sie die modifizierte Übergangsmatrix und begründen Sie Ihre Vorgehensweise. **15 P**

(*Hinweise:*
Überlegen Sie, welche Matrixelemente jeweils die Entwicklung einer Gruppe repräsentieren.

Kontrollergebnis: $P_{Mod} = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 & 3 \\ 8 & 28 & 9 \\ 1 & 8 & 48 \end{pmatrix}$)

e) Berechnen Sie die Einkommensverteilung in den nächsten beiden Generationen.
Vergleichen Sie das modifizierte Modell hinsichtlich der Entwicklung der Gesamtzahl der Familien mit dem ursprünglichen Modell. **20 P**

Bei einigen Populationsmatrizen A erhält man die Einheitsmatrix E durch Mehrfachmultiplikation der Matrix A mit sich selbst, also $A^n = E$ *für bestimmte* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Die Einheitsmatrix E erhält man aber auch durch Multiplikation der Matrix A mit ihrer „inversen Matrix" A^{-1}, sofern diese existiert, also $A \cdot A^{-1} = E$.

Gegeben ist nun die allgemeine Populationsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$.

f) Bestimmen Sie die Matrizen A^2 und A^3 und ermitteln Sie die Bedingungen für a, b und c, damit gilt: $A^3 = E$.
Interpretieren Sie für diesen Fall die Bedeutung der Matrix A^2. **15 P**

g) Interpretieren Sie dieses Phänomen für die Entwicklung einer zugehörigen Population. **5 P**

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Aus der prozentualen Verteilung ergibt sich die Anzahl der Familien in den drei Einkommensgruppen als Bestandsvektor $\vec{p}_0$: $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix}$</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>In der ersten Spalte von P steht die Zuordnung der Kinder der Einkommensgruppe h in der nächsten Generation: 55 % von ihnen bleiben in Gruppe h, 40 % wechseln in Gruppe m, 5 % wechseln in Gruppe n.

In der zweiten Spalte von P steht die Zuordnung der Kinder der Einkommensgruppe m in der nächsten Generation: 10 % von ihnen wechseln in Gruppe h, 70 % bleiben in Gruppe m, 20 % wechseln in Gruppe n.

In der dritten Spalte von P steht die Zuordnung der Kinder der Einkommensgruppe n in der nächsten Generation: 5 % von ihnen wechseln in Gruppe h, 15 % wechseln in Gruppe m, 80 % bleiben in Gruppe n.

Die Übergangsmatrix P enthält die angegebenen Prozentsätze:

$$\vec{p}_1 = P \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 546 \\ 2121 \\ 1533 \end{pmatrix}.$$</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Möglicher Ansatz:

$$P \cdot \vec{p}_{-1} = \vec{p}_0 \text{ bzw. } \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 8 & 14 & 3 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix}$$
Multiplikation mit 20 ergibt das folgende Lineare Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 2 & 1 & 8400 \\ 8 & 14 & 3 & 50400 \\ 1 & 4 & 16 & 25200 \end{array}\right) \xrightarrow[-III+16\cdot I]{II-3\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 2 & 1 & 8400 \\ -25 & 8 & 0 & 25200 \\ 175 & 28 & 0 & 109200 \end{array}\right) \xrightarrow{III+7\cdot II}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 2 & 1 & 8400 \\ -25 & 8 & 0 & 25200 \\ 0 & 84 & 0 & 285600 \end{array}\right) \begin{array}{c} x_1, x_2 \text{ eingesetzt } \Rightarrow x_3 = 720 \\ x_2 \text{ eingesetzt liefert } x_1 = 80 \\ \text{Division durch } 84 \Rightarrow x_2 = 3400 \end{array}$$
Damit gilt für die Einkommensverteilung der Elterngeneration der ersten Gruppe, vorausgesetzt das obige Modell trifft auch hier noch zu:

$\vec{p}_{-1} = (80|3400|720)$</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Ein zweiter Lösungsweg ist über die Inverse der Populationsmatrix möglich.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Die Übergangsfaktoren der Familien aus der Einkommensgruppe h müssen gegenüber der vorherigen Matrix halbiert werden; die Übergangsfaktoren der Familien aus der Einkommensgruppe n müssen gegenüber der vorherigen Matrix mit $\frac{3}{2}$ multipliziert werden. Also wird die erste Spalte der ursprünglichen Übergangsmatrix durch zwei geteilt und die dritte Spalte mit $\frac{3}{2}$ multipliziert.

$$P_{Mod} = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>$$\vec{p}_{Mod1} = P_{Mod} \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 462 \\ 2131{,}5 \\ 2026{,}5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 462 \\ 2132 \\ 2027 \end{pmatrix}.$$
$$\vec{p}_{Mod2} = P_{Mod} \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 462 \\ 2132 \\ 2027 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 492{,}275 \\ 2040{,}875 \\ 2870{,}35 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 492 \\ 2041 \\ 2870 \end{pmatrix}$$
Da in der Realität keine Bruchteile von Familien vorkommen, muss hier im Kontext der Aufgabenstellung gerundet werden. Dabei ist auch konsequentes Abrunden sinnvoll.

Da bei dem ursprünglichen Modell aus jedem Elternpaar wieder ein Kinderpaar, aus jedem Kinderpaar wieder ein Elternpaar entsteht usw., bleibt in diesem Modell die Gesamtzahl der Familien von Generation zu Generation konstant.

Dagegen steigt die Gesamtzahl der Familien in dem modifizierten Modell von Generation zu Generation an, weil die Anzahl der Kinder in der größeren Gruppe n der Familien mit niedrigem Einkommen von zwei auf drei gestiegen ist, während die Anzahl der Kinder in der kleineren Gruppe h der Familien mit hohem Einkommen von zwei auf eins gesunken ist.</td><td>10</td><td>5</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
f)	Ermitteln von A^2 und A^3: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix}$ Also: $A^3 = E$, wenn gilt: $a \cdot b \cdot c = 1$. Die Matrix A^2 ist in diesem Fall gleich der zu A inversen Matrix.		10	5
g)	Für die Entwicklung der Population bedeutet dieses Phänomen, dass sich in einem Zyklus von drei Jahren stets wieder die Ausgangspopulation einstellt.			5
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

STOCHASTIK 1

III.1 „Handygefahren“

Um die Unfallgefahr zu verringern, ist in Deutschland die Benutzung eines Handys im Auto durch den Fahrer nur mit einer Freisprecheinrichtung erlaubt. Weil eine gut funktionierende Freisprecheinrichtung aber relativ teuer ist, telefonieren viele Fahrer trotzdem unerlaubt während der Fahrt mit dem Handy.
Im Folgenden soll stets unter „Ein Fahrer telefoniert“ verstanden werden: Dieser Fahrer telefoniert während der Fahrt mit seinem Handy, ohne eine Freisprechanlage zu verwenden (er begeht also eine Ordnungswidrigkeit).

Auf einer belebten Straße soll der Anteil p der Autofahrer untersucht werden, die zum Zeitpunkt einer Kontrolle telefonieren. Der Anteil p hängt von Ort und Zeitpunkt der Kontrolle ab. Dabei wird angenommen, dass die Fahrer sich in ihrem Telefonierverhalten gegenseitig nicht beeinflussen.

a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
- A: Bei 10 vorbeifahrenden Autos telefonieren genau die Fahrer des 3. und des 5. Autos.
- B: Bei 10 vorbeifahrenden Autos telefonieren die Fahrer der ersten vier Autos nicht, aber trotzdem telefonieren genau zwei Fahrer. **10 P**

b)
- Berechnen Sie, wie groß der Anteil p der telefonierenden Fahrer an einer bestimmten Kontrollstelle mindestens sein muss, wenn unter 100 vorbeifahrenden Autos mit mehr als 95 % Wahrscheinlichkeit mindestens eines von einem telefonierenden Fahrer gelenkt wird.
- Auf der Schlossallee wird an einem Mittwoch zwischen 15 Uhr und 16 Uhr eine Kontrolle durchgeführt. Während dieser Zeit gelte für den Anteil p jener Fahrer, die zu einem beliebigen Zeitpunkt während dieser Zeitspanne gerade telefonieren, p = 3 %.

  Bestimmen Sie die Anzahl der Autos, die mindestens kontrolliert werden müssen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80 % mindestens einen telefonierenden Fahrer erwischt. **20 P**

c) Nun kontrolliert man auf einer Zufahrt zu einer beliebten Diskothek zwischen 21 Uhr und 23 Uhr. Hier ist die Telefonierwahrscheinlichkeit außergewöhnlich hoch, nämlich p = 20 %. Die Polizisten wetten untereinander, beim wievielten Auto sie erstmals einen Telefonierer erwischen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass dieses
- beim sechsten,
- beim zehnten,
- nach dem zehnten Auto passiert.

Einer der Polizisten behauptet, dass im Mittel beim fünften Auto der erste Telefonierer zu erwarten ist.
- Beschreiben Sie diese Behauptung mit Begriffen der Stochastik und begründen Sie diese:

  (1) entweder unter Verwendung der Formel $1+2q+3q^2+4q^3+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^2}$.

  (2) oder indem Sie erkennen, dass nach dem ersten Auto entweder der erste Telefonierer aufgetreten ist oder die erwartete Anzahl der Autos bis zum ersten Telefonierer sich gegenüber der Situation am Anfang um 1 erhöht hat. **25 P**

d) Nach einigen Unfällen, bei denen Autofahrer telefoniert hatten, will die örtliche Polizei in ihrer Stadt verstärkte Kontrollen durchführen, wenn der Anteil der telefonierenden Autofahrer mehr als 15 % beträgt. Dazu überprüft sie in der Stadt 1000 fahrende Autos.

Bestimmen Sie mithilfe der Normalverteilung die Anzahl der telefonierenden Fahrer, die die Kontrolle mindestens passieren müssen, um auf einem Signifikanzniveau von 5 % gute Argumente für verstärkte Kontrollen zu haben. **20 P**

e) Wenn bei einer Umfrage 20 % der Befragten angeben, beim Fahren zu telefonieren, so ergeben sich bei einer Kontrolle dennoch viel geringere Anteile. Dieses liegt daran, dass die Telefonierer nicht ständig telefonieren. Um zu einem differenzierteren Bild zu gelangen, ist es erforderlich, Klasseneinteilungen nach der durchschnittlichen (nach wie vor illegalen) Telefonierdauer pro Stunde vorzunehmen. In sehr starker Vereinfachung ergibt sich bei einer Befragung von Autofahrern das folgende Bild, das als repräsentativ gelten möge:

	Wenig	Normal	Viel	Dauernd
Durchschnittliche Telefonierzeit pro Stunde [in Minuten]	5	10	15	30
Anteil der Autofahrer	7 %	10 %	2 %	1%

Ein Autofahrer passiert eine Kontrolle.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er bei der Kontrolle erwischt wird, wenn man weiß, dass er ein Wenigtelefonierer ist.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er gerade telefoniert, wenn man gar nichts über ihn weiß.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er gerade telefoniert, wenn man weiß, dass er ein Telefonierer ist (die Frage also nach der Wahrscheinlichkeit, ob ein Telefonierer erwischt wird).
- Der Autofahrer telefoniert gerade bei der Kontrolle. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei ihm um einen Wenigtelefonierer handelt. **25 P**

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

- $P(A) = p^2 \cdot (1-p)^8$, da die Einzelereignisse unabhängig sind.
- Es gibt $\binom{6}{2}$ Möglichkeiten für die telefonierenden Fahrer. Daher gilt:
  $P(B) = \binom{6}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^8 = 15 \cdot p^2 \cdot (1-p)^8$ bzw.
  $P(B) = (1-p)^4 \cdot B(6, p, 2)$.

</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

- Es ist die Gleichung $(1-p)^{100} = 0{,}05$ zu lösen, also
  $p = 1 - 0{,}05^{\frac{1}{100}} \approx 0{,}0295 = 3\,\%$
  Der Anteil der telefonierenden Fahrer muss über 3% liegen.

  Man kann den Lösungsweg auch formaler beschreiben:
  Ist X die Zufallsgröße „Anzahl der telefonierenden Fahrer“, so ist X binomialverteilt. Daher gilt:
  $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^{100} > 0{,}95 \Leftrightarrow (1-p)^{100} < 0{,}05 \Leftrightarrow$
  $(1-p) < \sqrt[100]{0{,}05} \Leftrightarrow p > 1 - \sqrt[100]{0{,}05} \approx 0{,}0295$
  Im ersten Fall muss der Anteil der telefonierenden Fahrer über 3% liegen.
- Es ist die Gleichung $0{,}97^n = 0{,}2$ (0 < p < 1) zu lösen, also
  $n = \frac{ln\,0{,}2}{ln\,0{,}97} \approx 52{,}8$
  Es müssen also mindestens 53 Autos kontrolliert werden.

</td><td>5</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

- $P(\text{"beim sechsten Auto"}) = 0{,}8^5 \cdot 0{,}2 \approx 6{,}55\%$,
- $P(\text{"beim zehnten Auto"}) = 0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \approx 2{,}68\%$,
- $P(\text{"nach dem zehnten Auto"}) = 0{,}8^{10} \approx 10{,}74\%$,
- Es ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

k	***P*(*X* = *k*)**
1	0,2
2	$0{,}2 \cdot 0{,}8$
3	$0{,}2 \cdot 0{,}8^2$
4	$0{,}2 \cdot 0{,}8^3$
⋮	⋮

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Die Anzahl N der Kontrollen, bis die Polizisten zum ersten Mal einen Telefonierer erwischen, ist eine Zufallsvariable. Die Behauptung des Polizisten kann dann präzisiert werden zu $E(N) = 5$. Weg (1): $E(N) =$ $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{k-1} = 0{,}2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0{,}8^{k-1} = 0{,}2 \cdot \frac{1}{(1-0{,}8)^2} = 5$ Der Erwartungswert für die Anzahl der zu kontrollierenden Autos, bis man erstmals einen Telefonierer erwischt, beträgt also tatsächlich 5. Weg (2): Es sei $e = E(N)$ der zu berechnende Erwartungswert. Die gemachte Beobachtung kann wie folgt in eine lineare Gleichung übersetzt werden: $e = 1 \cdot 0{,}2 + (1+e) \cdot 0{,}8$ mit der Lösung $e = 5$	10	10	5
d)	Es sei X die Anzahl der Telefonierer, die die Kontrolle passieren. Nullhypothese H_0: „Der Anteil der Telefonierer beträgt höchstens 15%“. Fehler 1. Art: H_0 wird verworfen, obwohl richtig. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler soll höchstens 5% betragen. Ist k die Anzahl der telefonierenden Fahrer, die man mindestens beobachten muss, so soll also gelten $P(X \geq k \mid H_0) \leq 5\%$ und $P(X \geq k-1 \mid H_0) > 5\%$. Dies ist äquivalent zu: $P(X \leq k-1 \mid H_0) \geq 95\%$ und $P(X \leq k-2 \mid H_0) < 95\%$, bei Approximation durch die Normalverteilung löst man die Gleichung $\Phi\left(\frac{k-149{,}5}{\sqrt{127{,}5}}\right) = 0{,}95$. Es folgt: $\frac{k-149{,}5}{\sqrt{127{,}5}} = 1{,}645$ $\Leftrightarrow k \approx 169$. Die Polizisten müssen im Rahmen der hier entwickelten Logik also mindestens 169 Telefonierer beobachten, um (bei Signifikanzniveau von 5 %) gute Argumente für verstärkte Kontrollen zu haben.		15	5

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>
Es sei
T das Ereignis: „Der Autofahrer telefoniert zum Zeitpunkt der Kontrolle“
W das Ereignis „Der Autofahrer ist Wenigtelefonierer“. $P(W) = 7\%$
N das Ereignis „Der Autofahrer ist Normaltelefonierer“. $P(N) = 10\%$
V das Ereignis „Der Autofahrer ist Vieltelefonierer“. $P(V) = 2\%$
D das Ereignis „Der Autofahrer ist Dauertelefonierer“. $P(D) = 1\%$
H das Ereignis „Der Autofahrer ist Telefonierer“. $P(H) = 20\%$

• Da der Autofahrer als Wenigtelefonierer durchschnittlich 5 Minuten pro Stunde telefoniert, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er gerade zum Zeitpunkt der Kontrolle telefoniert: $P(T\,|\,W) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \approx 8{,}33\%$.

• Mit dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit oder mit Hilfe eines Baumdiagramms erhält man:
$P(T) = P(W)\cdot P(T\,|\,W) + P(N)\cdot P(T\,|\,N) + P(V)\cdot P(T\,|\,V) + P(D)\cdot P(T\,|\,D)$
$= \frac{7}{100}\cdot\frac{1}{12} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{50}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{400} \approx 3{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Autofahrer gerade telefoniert, beträgt ungefähr 3 %.

• Gesucht ist P(T|H). Es gilt:
$P(T|H) = \frac{P(T\cap H)}{P(H)} = \frac{P(T)}{P(H)} = \frac{\frac{13}{400}}{\frac{1}{5}} = \frac{13}{80} \approx 16\ \%.$
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Telefonierer erwischt wird, beträgt also ca. 16 %.

• Es ist P(W|T) zu bestimmen. Dies kann entweder mit dem Satz von Bayes geschehen oder unter Verwendung des vorvoriger Ergebnisses (, das gerade der „Bayes-Nenner“ ist):
$P(W\,|\,T) = \frac{P(W)\cdot P(T\,|\,W)}{P(T)} = \frac{\frac{7}{100}\cdot\frac{1}{12}}{\frac{13}{400}} = \frac{7}{39} \approx 18\ \%$
Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einer erwischten Person um einen Wenigtelefonierer handelt, liegt bei 18 % .
</td><td></td><td>15</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

STOCHASTIK 2

III.2 Lübecker Verkehrsbetriebe

Öffentliche Verkehrsbetriebe sind in der Regel hoch defizitär. Daran haben auch Schwarzfahrer ihren Anteil. So ist es erfreulich, dass der Anteil der Schwarzfahrer im Busverkehr der Lübecker Verkehrsbetriebe auf 8 % gesenkt werden konnte, weil alle Fahrgäste vorn beim Fahrer einsteigen müssen. Ein Kontrolleurteam kann pro Tag etwa 800 Fahrgäste überprüfen, die Personalien der entdeckten Schwarzfahrer aufnehmen und die Strafgebühr in Höhe von 40 € kassieren.

a)
- Beschreiben Sie, unter welchen Umständen es sinnvoll ist, unter 800 kontrollierten Fahrgästen die Anzahl X der Fahrgäste ohne gültigen Fahrschein als binomialverteilt anzunehmen.
- Geben Sie eine Situation an, in der diese Voraussetzungen für eine Binomialverteilung nicht erfüllt sind. **10 P**

In den Aufgabenteilen b) bis d) sei die in a) genannte Zufallsvariable X binomialverteilt mit $p = 0,08$.

b)
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei von 50 Fahrgästen keinen Fahrschein besitzen.
- Bestimmen Sie die Gruppengröße, ab der die Wahrscheinlichkeit, dass kein Schwarzfahrer dabei ist, unter 10% sinkt. **20 P**

c) Bestimmen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 800 kontrollierten Fahrgästen höchstens 50 Schwarzfahrer befinden. **15 P**

d) Es werden nun die zwei Personengruppen betrachtet: Fahrgäste ohne Fahrschein (S) und Fahrgäste mit gültigem Fahrschein (F). Dabei gilt nach wie vor die vor Schwarzfahrerquote von p = 8 %. Von den Schwarzfahrern sind 60 % unter 30 Jahren (Ereignis U) und von den Fahrgästen mit gültigem Fahrschein sind 50% unter 30 Jahren.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass
- ein unter 30-Jähriger ein Schwarzfahrer ist,
- ein über 30-Jähriger ein Schwarzfahrer ist,
- ein über 30-Jähriger kein Schwarzfahrer ist. **25 P**

e) Durch die Möglichkeit, einen Fahrschein mit dem Handy zu kaufen, soll der Anteil der Schwarzfahrer weiter gesenkt werden (fehlendes Kleingeld fällt als Grund zum Schwarzfahren weg). Dieses mit hohem Verwaltungsaufwand verbundene Angebot wird realisiert und von vielen Kunden gern angenommen. Es lohnt sich für die Stadtwerke Lübeck aber finanziell nur dann, wenn sich der Anteil der Schwarzfahrer dadurch auf unter 6 % reduziert. Dazu soll eine Untersuchung von 2000 Fahrgästen durchgeführt werden.
Verwenden Sie für alle drei Punkte dieses Aufgabenteils das übliche Signifikanzniveau 5%:

- Ein Mitarbeiter der Lübecker Verkehrsbetriebe möchte zeigen, dass das Angebot sich lohnt. Untersuchen Sie für einen geplanten Hypothesentest, wie viele Personen ohne Fahrschein bei der Kontrolle höchstens entdeckt werden dürfen, damit der Mitarbeiter begründet behaupten kann, dass sich das Angebot lohnt.
- Ein anderer, eher skeptischer Mitarbeiter ist überzeugt, dass das Handy-Angebot nicht einmal zu irgendeiner Senkung der Schwarzfahrerquote geführt hat. Beurteilen Sie, wie er die Daten auswerten würde.
- Tatsächlich werden 139 Schwarzfahrer bei der Kontrolle entdeckt. Eigentlich müssten nun beide Mitarbeiter frustriert auf einen neuen Test mit einer größeren Stichprobe drängen.
  Aber es ist in der Statistik nicht unüblich – wenn auch logisch nicht ganz korrekt, im Nachhinein das Testdesign zu ändern, um doch noch zu schwächeren signifikanten Aussagen zu kommen (dabei wird so getan, als ob man das Ergebnis noch nicht kennen würde).
  Beurteilen Sie, welche Aussagen die beiden Mitarbeiter – entsprechend ihrem Erkenntnisinteresse – noch begründet treffen könnten. **30 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Es wird nur zwischen zwei möglichen Ergebnissen unterschieden werden. Entweder hat ein Fahrgast einen gültigen Fahrschein oder nicht. Die Frage, ob ein Fahrgast einen gültigen Fahrschein hat, muss stochastisch unabhängig von dem Verhalten der (dem Wissen über die) anderen Fahrgäste sein. Unter dieser Voraussetzung ist es sinnvoll *X* ist als binomialverteilt anzunehmen. Eine Situation, in der diese Verteilung nicht gilt, ist z.B. das Auftreten von Fahrgästen in sozialen Gruppen, bei denen alle keinen Fahrschein haben.	10		
b)	$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \left(0{,}92^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92^{49}\right)$ $\approx 1 - 0{,}01547 - 0{,}06725 = 0{,}9173$. Gesucht wird die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt: $0{,}92^n < 0{,}1$. $n \cdot \lg 0{,}92 < \lg 0{,}1 \iff$ (wegen lg 0,92 < 0) $n > \frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}92} \approx 27{,}6$. Bei einer Gruppe von 28 Personen ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Schwarzfahrer dabei ist, gerade noch unter 10%, bei kleineren Gruppen ist die Wahrscheinlichkeit größer.	10	10	
c)	Es gilt: $800 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92 \approx 59 > 9$. Die Laplace-Bedingung ist also erfüllt, und die betrachtete Binomialverteilung kann mit Hilfe der Normalverteilung approximiert werden: . $\sigma = \sqrt{800 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92} = \sqrt{58{,}88} \approx 7{,}673$ (>3) $\quad \mu = np = 64$ Mit Hilfe der Formelsammlung kann die Gaußsche Integralfunktion interpoliert werden: $P(X \leq 50) \approx \Phi\left(\frac{50{,}5 - 64}{\sqrt{58{,}88}}\right) \approx \Phi(-1{,}7593) = 1 - \Phi(1{,}7593) \approx 1 - 0{,}961 = 0{,}039$ Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 800 kontrollierten Fahrgästen nicht mehr als 50 Schwarzfahrer befinden, beträgt weniger als 4%.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

d) <u>1. Weg:</u> Man übersetzt die Informationen in eine Vierfeldertafel:

	unter 30	über 29	
Schwarzfahrer	**<u>4,8 %</u>**	3,2 %	**<u>8 %</u>**
keine Schwarzfahrer	**<u>46 %</u>**	46 %	92 %
	50,8 %	49,2 %	100 %

Dabei sind die fett unterstrichenen Daten direkt aus den gegebenen Informationen abzuleiten. Daraus ergeben sich dann die anderen Werte in den Feldern.

Es sei U das Ereignis „unter 30 zu sein“ (der Gesamtanteil der unter 30 Jährigen) und S das Ereignis “Schwarzfahrer zu sein“ (der Gesamtanteil der Schwarzfahrer). Mit der Vierfeldertafel kann man die drei Fragen sofort beantworten:

$$P(S\,|\,U) = \frac{0{,}048}{0{,}508} \approx 9{,}4\% \;; \qquad P(S\,|\,\overline{U}) = \frac{0{,}032}{0{,}492} \approx 6{,}5\%$$

$$P(S\,|\,\overline{U}) = \frac{0{,}46}{0{,}492} \approx 93{,}5\%$$

<u>2. Weg:</u> Folgende Daten sind bekannt:
$P(S) = 0{,}08$, $P(U\,|\,S) = 60\ \%$, $P(U\,|\,\overline{S}) = 50\ \%$

Mit dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit oder einem Baumdiagramm erhält man:
$$P(U) = P(S)\cdot P(U\,|\,S) + P(\overline{S})\cdot P(U\,|\,\overline{S}) = 0{,}08\cdot 0{,}6 + 0{,}92\cdot 0{,}5 = 0{,}508\,.$$

Damit ergeben sich die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu

- $$P(S\,|\,U) = \frac{P(S)\cdot P(U\,|\,S)}{P(U)} = \frac{0{,}08\cdot 0{,}6}{0{,}508} = \frac{0{,}048}{0{,}508} \approx 9{,}4\%$$
- $$P(S\,|\,\overline{U}) = \frac{P(S)\cdot P(\overline{U}\,|\,S)}{P(\overline{U})} = \frac{P(S)\cdot(1-P(U\,|\,S))}{1-P(U)}$$
  $$= \frac{0{,}08\cdot 0{,}4}{0{,}492} = \frac{0{,}032}{0{,}492} \approx 6{,}5\%$$
  oder auch
  $$P(S\,|\,\overline{U}) = 1 - P(\overline{S}\,|\,\overline{U}) = 1 - \frac{P(\overline{S})\cdot P(\overline{U}\,|\,\overline{S})}{P(\overline{U})} = 1 - \frac{P(\overline{S})\cdot(1-P(U\,|\,\overline{S}))}{1-P(U)}$$
  $$= 1 - \frac{0{,}92\cdot 0{,}5}{0{,}492} = 1 - \frac{0{,}46}{0{,}492} \approx 6{,}5\%$$
- $$P(\overline{S}\,|\,\overline{U}) = 1 - P(S\,|\,\overline{U}) \approx \frac{0{,}46}{0{,}492} \approx 93{,}5\ \%$$

II: 25

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	Der <u>erste Mitarbeiter</u> will begründen, dass *p* unter 0,06 gesunken ist, er wird deshalb versuchen, $H_0 : p \geq 0{,}06$ zu verwerfen durch einen einseitigen Test: *X* sei die Anzahl der Schwarzfahrer unter den 2000 zu kontrollierenden Fahrgästen. Kleine Werte von *X* sprechen gegen die Nullhypothese, deshalb suchen wir den größten Wert von k, für den gilt: $P(X \leq k \mid H_0) \leq 5\,\%$. Wir betrachten die 2000-0,06-Binomialverteilung, mit deren Hilfe wir diese bedingte Wahrscheinlichkeit nach oben abschätzen können: Es gilt $\mu = np = 2000 \cdot 0{,}06 = 120$ $\sigma = \sqrt{112{,}8} \approx 10{,}62$. Weil $\sigma > 3$ (Laplace-Bedingung) können wir die Binomialverteilung durch eine passende Normalverteilung approximieren: $P(X \leq k) = P\left(\frac{X - \mu + 0{,}5}{\sigma} \leq \frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma} \right) \approx \Phi\left(\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma} \right)$ Wir suchen also den größten Wert von $k \in \mathbb{N}$, für den $\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma} \leq -1{,}64$, das ist *k* = 102. Wenn $X \leq 102$ könnte der erste Mitarbeiter von Signifikanz (auf dem 5%-Niveau) sprechen, deshalb die Nullhypothese ablehnen und damit begründet behaupten, dass der Schwarzfahreranteil auf unter 6 % gesunken sei. Der <u>zweite Mitarbeiter</u> will zeigen, dass das Handy nicht einmal zu irgendeiner Senkung der Schwarzfahrerquote geführt hat, er müsste versuchen, $H_0 : p < 0{,}08$ in einen ebenfalls einseitigen Test zu verwerfen: Große Werte von *X* sprechen gegen die Nullhypothese, deshalb suchen wir den kleinsten Wert von *k* für den gilt: $P(X > k \mid H_0) \leq 5\,\%$. Wir betrachten die 2000-0,08-Binomialverteilung, mit deren Hilfe wir diese bedingte Wahrscheinlichkeit nach oben abschätzen können: Es gilt $\mu = np = 2000 \cdot 0{,}08 = 160$ und $\sigma = \sqrt{147{,}2} \approx 12{,}13$. Weil auch hier $\sigma > 3$ (Laplace-Bedingung), können wir wieder die Binomialverteilung durch eine passende Normalverteilung approximieren: $P(X > k) = 1 - P\left(\frac{X - \mu + 0{,}5}{\sigma} \leq \frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma} \right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma} \right)$. Wir suchen den kleinsten Wert von $k \in \mathbb{N}$, für den $1 - \Phi\left(\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma} \right) \leq 5\,\%$, d.h. den kleinsten Wert von *k*, für den $\Phi\left(\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma} \right) \geq 95\,\%$, also $\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma} \geq 1{,}64$, das ist *k* = 180. Falls $X > 180$, könnte der zweite Mitarbeiter von Signifikanz (auf dem 5%-Niveau) sprechen, deshalb die Nullhypothese ablehnen und damit begründet behaupten, dass der Schwarzfahreranteil nicht einmal unter 8 % gesunken sei. Falls $102 < X \leq 180$ – also insbesondere bei den tatsächlich ermittelten 139 Schwarzfahrern – hätte keiner der beiden Kontrahenten ein signifikantes Ergebnis, und das Testergebnis ließe keine aus den Daten begründeten neuen Schlüsse zu.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Beide könnten aber ihre Behauptungen abschwächen: Der erste, indem er behauptet, dass immerhin die Quote der Schwarzfahrer überhaupt gesunken sei und der andere, indem er behauptet, dass die Schwarzfahrerquote zumindest nicht kleiner als 0,06 sei. Es müssen dazu alle Argumentationen und Berechnungen wiederholt werden nur mit vertauschten Rollen von $p = 0{,}06$ und $p = 0{,}08$. *(Praktisch heißt das lediglich, dass noch zweimal in der Tabelle nachgesehen werden muss, und dass zwei Ungleichungen nochmals umgestellt werden müssen).* Man erhält: Falls $X \leq 140$ könnte nun der erste Mitarbeiter von Signifikanz (auf dem 5%-Niveau) sprechen, deshalb die Nullhypothese ablehnen und damit begründet behaupten, dass der Schwarzfahreranteil auf unter 8 % gesunken sei. Falls $X > 137$, könnte der zweite Mitarbeiter von Signifikanz (auf dem 5%-Niveau) sprechen, deshalb die Nullhypothese ablehnen und damit begründet behaupten, dass der Schwarzfahreranteil aber nicht unter 6 % gesunken sei. Das tatsächlich eingetretene Untersuchungsergebnis $X = 139$ bestätigt in diesem Sinne beide Mitarbeiter, und man kann mit guten Gründen annehmen, dass der tatsächliche Anteil an Schwarzfahrern tatsächlich irgendwo zwischen 6 % und 8 % liegt.		15	15
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15