Analysis 1

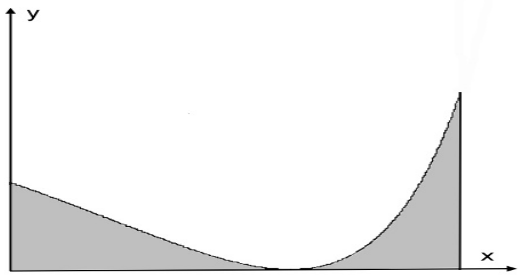
I.1 Inlinerrampe

In einem selbstverwalteten Freizeitpark soll eine besondere Inlinerrampe neu gebaut werden. Eine kleine Gruppe der Inliner möchte die Bauplanung vorbereiten. Sie haben als Modell folgende Idee entwickelt:

Die Seitenansicht dieser Rampe soll im unteren Bereich durch die x-Achse, links durch die y-Achse und im oberen Bereich durch den Kurvenverlauf einer Funktion aus der Funktionenschar

$$f_t(x) = 0{,}4 \cdot (t - e^{0{,}2x})^2 ,$$

bestimmt werden, wobei $t \in [1; 5]$ und $x \in \mathbb{R}_0^+$ sind (siehe auch nebenstehende Abbildung).



Es soll nun geprüft werden, inwieweit mit dieser Kurvenschar die Modellierung einer Rampe möglich ist, die für die sportliche Nutzung geeignet ist.

a) Mit diesem Ziel sind die folgenden Untersuchungen jeweils in Abhängigkeit von t durchzuführen:

- Berechnen Sie die Höhe der Rampe am Startpunkt bei $x = 0$ sowie die Steigung in diesem Punkt.
- Bestimmen Sie den tiefsten Punkt der Rampe und
- die steilste Stelle der Rampe zwischen Startpunkt und dem tiefsten Punkt.
(*Zur Kontrolle*: $\left(5 \cdot \ln\left(0{,}5 \cdot t\right) | 0{,}1 \cdot t^2\right)$) **(20P)**

b) Zeichnen Sie den Graphen von f_3 mit den unter a) ermittelten Punkten in das Koordinatensystem in der Anlage. Für beide Koordinatenachsen gilt der Maßstab 1 LE $\mathrel{\hat{=}} 1\,m$. **(10P)**

c) Die Inliner wollen, dass das maximale Gefälle der Rampe zwischen Anfangs- und Tiefpunkt 40 % nicht überschreiten soll.

- Untersuchen Sie, für welche t diese Grenze eingehalten wird – und ob insbesondere $t = 3$ in diesen Bereich fällt.

Für die folgenden Betrachtungen soll weiterhin $t = 3$ gelten.

- Der Endpunkt der Rampe soll die doppelte Höhe des Startpunktes aufweisen.
  Zeigen Sie, dass der Endpunkt der Rampe die x-Koordinate $x_{End} \approx 8{,}8137$ aufweist.
- Die Inliner wollen auch gewährleistet sehen, dass die Rampe am Endpunkt einen Winkel von höchstens 70° gegen die Waagerechte aufweist.
  Untersuchen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist. **(20P)**

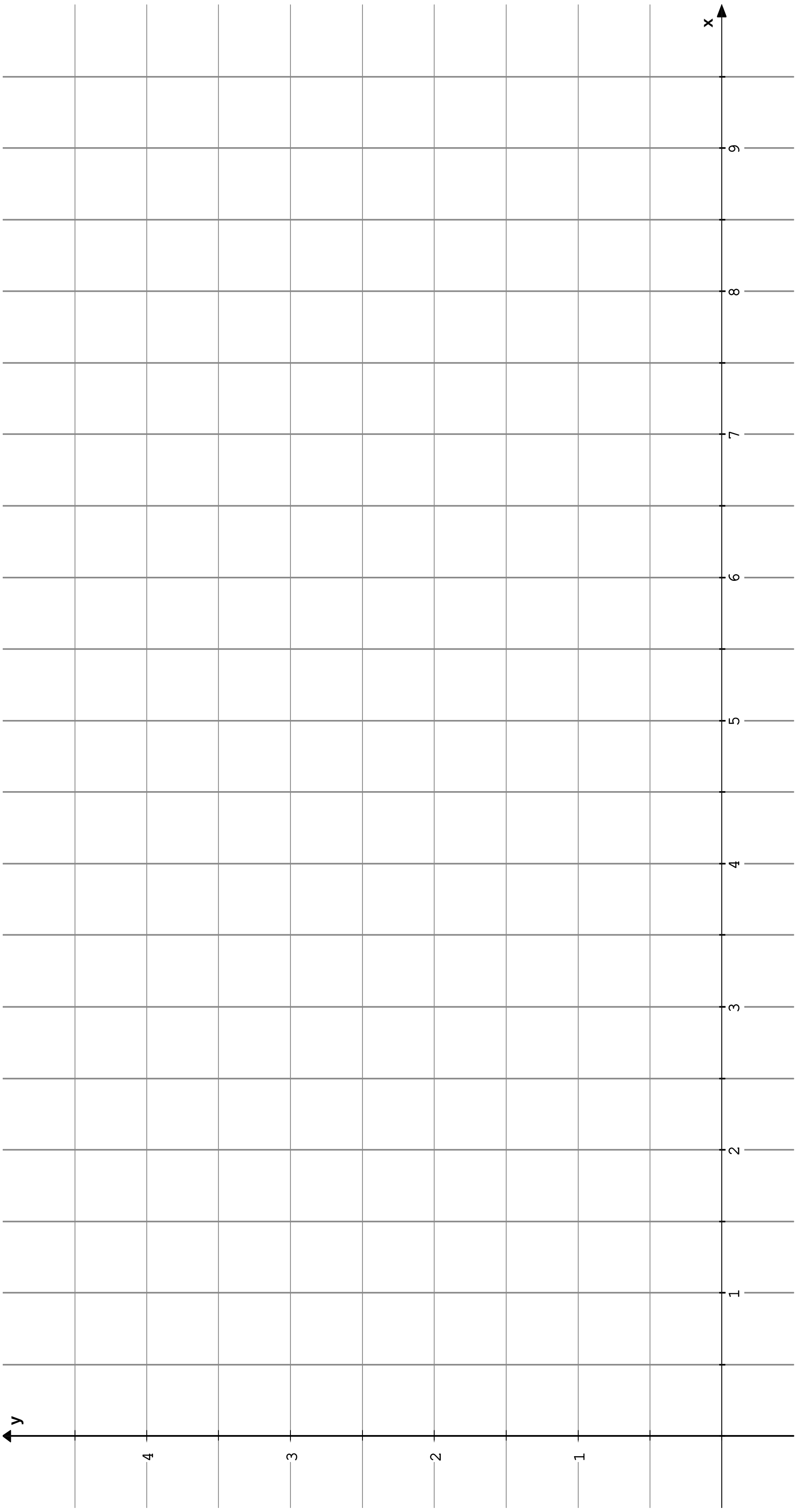
d) Die Inliner möchten einen Rampeneinstieg mit horizontaler Tangente haben. Im bisherigen Konstruktionsvorschlag mit $t = 3$ ist allerdings die Steigung der Rampe am Startpunkt nicht Null. Um einen waagerechten Rampeneinstieg zu erreichen, soll für den Abschnitt mit $x \le x_w$ (x_w ist die Wendestelle von f_3) eine geeignete ganzrationale Funktion 2. Grades h_3 ermittelt werden, deren Graph seinen Scheitelpunkt bei $x = 0$ hat und am Wendepunkt $W(x_w \mid y_w)$ steigungsgleich an die weitere Rampe anschließt.

- Bestimmen Sie die Gleichung von h_3.
  (*Zur Kontrolle*: $h_3(x) = -0{,}0888x^2 + 1{,}2649$)
- Geben Sie an, um welche Höhe dadurch der Startpunkt abgesenkt wird.
- Ergänzen Sie die Skizze von Aufgabe b) um die Parabel von h_3. **(20P)**

e) Für die neu gestaltete Rampe – also für die Rampe mit waagerechtem Einstieg – ist an den beiden Längsseiten jeweils eine Verkleidung vorgesehen.
Ermitteln Sie den Gesamtflächeninhalt dieser beiden Verkleidungen. **(15P)**

f) Die von den Skatern befahrene Oberseite der Rampe soll mit einer Spezialfarbe gestrichen werden. Beurteilen Sie durch ein geeignetes Näherungsverfahren, ob 70 kg Flüssigkeit für die Beschichtung ausreichen, wenn man von einer Rampenbreite von 4 m ausgeht und pro m^2 eine Menge von 1,5 kg Farbe benötigt. **(15P)**

Anlage zur Aufgabe „Inlinerrampe“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Höhe der Rampe im Startpunkt: $f_t(0)=0,4\cdot(t-1)^2=0,4\cdot(t^2-2t+1)$. Steigung der Rampe im Startpunkt: $f_t'(x)=-0,16t\cdot e^{0,2x}+0,16e^{0,4x}$, $f_t'(0)=-0,16t+0,16=-0,16\cdot(t-1)$. Berechnung der tiefsten Stelle der Rampe, also der Tiefpunkte von f_t: Hinreichende Bedingung für ein Minimum: $f_t'(x)=0$ und $f_t''(x)>0$. $-0,16t\cdot e^{0,2x}+0,16e^{0,4x}=0$ $e^{0,2x}=t$ $0,2x=\ln t$ $x=5\cdot\ln t$ 2. Ableitung von f_t: $f_t''(x)=-0,032t\cdot e^{0,2x}+0,064\cdot e^{0,4x}$ Da laut Voraussetzung $t\geq 1$ gilt, ergibt sich: $f_t''(5\cdot\ln t)=-0,032t\cdot e^{\ln t}+0,064\cdot e^{2\cdot\ln t}$ $=-0,032\cdot t^2+0,064\cdot t^2$ $=0,032\cdot t^2>0$. Damit liegt ein Minimum an der Stelle $x=5\cdot\ln t$. $f_t(5\cdot\ln t)=0,4\cdot\left(t-e^{\ln t}\right)^2=0,4\cdot\left(t-t\right)^2=0$. Also ist $T\left(5\cdot\ln t\mid 0\right)$ der tiefste Punkt des Rampenprofils. T ist damit auch der einzige Berührpunkt mit dem Boden. Berechnung der steilsten Stelle der Rampe zwischen Startpunkt und Tiefpunkt: An der gesuchten Stelle gilt: $f_t''(x)=0$. $-0,032t\cdot e^{0,2x}+0,064\cdot e^{0,4x}=0$ $2e^{0,2x}=t$ $0,2x=\ln(0,5t)$ $x=5\cdot\ln(0,5t)$			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Hinreichend für die Extremstelle von f_t' ist $f_t''(x)=0$ und $f_t'''(x)\neq 0$.

Statt der Prüfung über die 3. Ableitung von f_t ist es sinnvoller, durch Testeinsetzungen in die 2. Ableitung oder über den Kurvenverlauf insgesamt zu argumentieren. Man bemerkt, dass bei $x=5\cdot\ln(0{,}5t)$ ein Minimum von f_t' liegt.

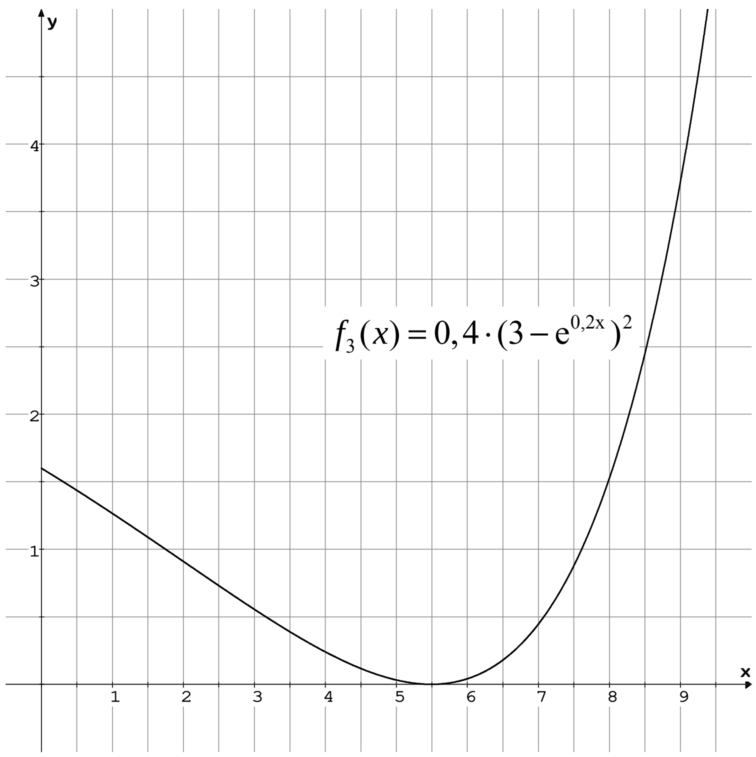
$$\begin{aligned} f_t\left(5\cdot\ln\left(0{,}5\cdot t\right)\right) &= 0{,}4\cdot\left(t-0{,}5\cdot t\right)^2 \\ &= 0{,}4\cdot 0{,}25\cdot t^2 \\ &= 0{,}1\cdot t^2\,. \end{aligned}$$

In $W\left(5\cdot\ln(0{,}5t)\middle|0{,}1t^2\right)$, also im Wendepunkt von f_t, ist die Steigung der Rampe am steilsten.</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Für $t=3$ werden die zugehörigen Punkte ermittelt:

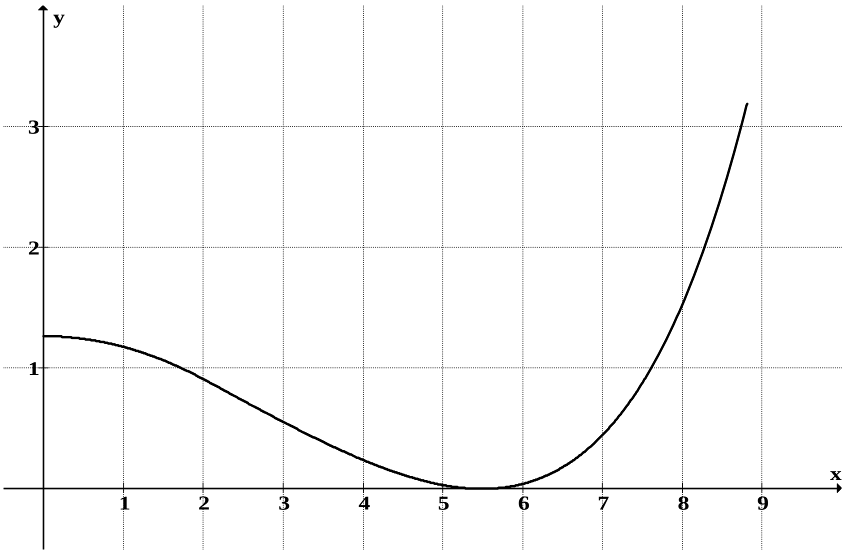
Startpunkt $S\left(0\mid 1{,}6\right)$,

Tiefpunkt $T(5{,}49306\mid 0)$,

Wendepunkt $W\left(2{,}02733\middle|0{,}9\right)$.


</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	• Das maximale Gefälle wird im Wendepunkt $W(5\cdot\ln\left(0,5t\right)\mid 0,1t^2)$ erreicht: $f_t'(5\cdot\ln(0,5t)) = -0,16t\cdot 0,5t + 0,16\cdot 0,25t^2$ $= -0,04t^2$. Bedingung: $\left\|-0,04t^2\right\| \le 0,4$ $t^2 \le 10$. Es gilt also: $1 \le t \le \sqrt{10}$, d.h. die Bedingung ist für $t=3$ erfüllt. • Endpunkt der Rampe für $t=3$: $f_3(0)=1,6$. Es soll also gelten: $3,2 = 0,4\cdot\left(3-e^{0,2x}\right)^2$ $8 = \left(3-e^{0,2x}\right)^2$ $e^{0,2x} = 3\pm 2\sqrt{2}$ $0,2x = \ln\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)$ $x = 5\cdot\ln\left(3\pm 2\sqrt{2}\right) \approx \pm 8,8137$ Lösung: $x_{\text{End}} \approx 8,8137$. • Der Winkel im Endpunkt der Rampe soll kleiner als 70° sein: $f_3'(x) = -0,48\cdot e^{0,2x} + 0,16\cdot e^{0,4x}$ $f_3'(8,8137) = 2,6376...$ Daraus folgt: $\arctan\left(2,6376\right) = 69,236...^\circ < 70^\circ$. Die Bedingung ist also erfüllt.		20	
d)	Bestimmung der Gleichung der Parabel, die aufgrund der Symmetrie die allgemeine Gleichung $h_3(x) = ax^2 + c$ hat: Es gelten: (1) Bedingung $W(2,02733 \mid 0,9)$ $\Rightarrow$ $4,1100a + c = 0,9$ (2) Bedingung $f_3'(2,02733) = -0,36$ $\Rightarrow$ $4,05466a = -0,36$ $\Rightarrow h_3(x) = -0,08879x^2 + 1,26492$. Die Rampe muss dementsprechend um 1,60 m – 1,26 m = 0,34 m abgesenkt werden.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Flächenberechnung:
$A_1 = \int_0^{2,0273} (-0,0888x^2+1,2649)dx = \left[-\frac{0,0888}{3}x^3+1,2649x\right]_0^{2,02733} = 2,3177$.
$A_2 = \int_{2,0733}^{8,8137} 0,4(3-e^{0,2x})^2\,dx = 0,4\left[9x-30e^{0,2x}+2,5e^{0,4x}\right]_{2,02733}^{8,8137} = 4,2104$.
Flächeninhalt beider Verkleidungen:
$A = 2\cdot(A_1+A_2) = 2\cdot(2,3177+4,2104) = 13,0562$
Oder – wenn man später rundet:
$A = 2\cdot(A_1+A_2) = 2\cdot(2,3178+4,2105) = 13,0563$
Der Flächeninhalt der beiden Seitenflächen beträgt damit etwa 13,06 m².</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Information für Lehrer: Die Länge der Kurvenstücke im Intervall [0;8,8137] beträgt 10,61 m unter Verwendung der Linienintegral-Formel
$s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$ (und unter Verwendung numerischer Integration).
Für eine Näherung kann man die Kurve durch Geradenstücke ersetzen.
Beispiel mit drei Intervallen und unter Verwendung gerundeter Funktionswerte:
$S_1: 0 \le x \le 5 \quad \Rightarrow S_1 \approx \sqrt{5^2+1,6^2} \approx 5,3$
$S_2: 5 \le x \le 6 \quad \Rightarrow S_2 \approx 1$
$S_3: 6 \le x \le 8,8137 \quad \Rightarrow S_3 \approx \sqrt{2,81^2+3,2^2} \approx 4,3$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	$S_1 + S_2 + S_3 \approx 10,6$. Damit gilt für die Fläche der Rampenoberseite folgender Näherungswert: $10,6 \cdot 4\ \text{m}^2 = 42,4\ \text{m}^2$. <u>Farbmenge:</u> $42,4 \cdot 1,5\ \text{kg} = 63,6\ \text{kg}$. Bei allen drei Abschnitten ist zwar das Geradenstück kürzer als das entsprechende Kurvenstück, aber die genäherte Farbmenge ist so deutlich unter der Maximalmenge, dass man sagen kann: 70 kg reichen aus. *Volle Punktzahl sollte nur vergeben werden, wenn das Näherungsverfahren für die Länge des Kurvenstücks in Auflösung und Genauigkeit mindestens der Beispiellösung entspricht.*			15
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15

ANALYSIS 2

I.2 Wachstumsverhalten von Douglasien

Douglasien („Oregon pine“) stammen aus den Waldgebieten des küstennahen pazifischen Nordwestens der USA.

Die Douglas-Tanne, wie sie hier genannt wird, besitzt eine hohe Widerstandsfähigkeit gegen Holz zerstörende Pilze. Ihr Holz findet daher sowohl im Außenbereich (Balkone, Gartenmöbel, Spielplatzeinrichtungen etc.) als auch im Innenbereich (Innenausbau, Möbel etc.) zunehmend Verwendung.

Grundsätzlich lässt sich das Wachstumsverhalten so beschreiben, dass nach einer anfänglichen Zunahme der Wachstumsgeschwindigkeit eine Verringerung auftritt.

a) Die Wachstumsgeschwindigkeit w der Höhe von Nadelbäumen in Abhängigkeit von der Zeit t lässt sich modellhaft durch Funktionen des Typs $w_a(t) = a \cdot (t+1) \cdot e^{-kt}$ beschreiben ($k > 0$). Dabei ist t in der Einheit „Jahr“ und $w(t)$ in der Einheit „Meter/Jahr“ angegeben.

In der folgenden Abbildung sind für $a = 1$ drei verschiedene Graphen dieses Typs dargestellt. Berechnen Sie für jede dargestellte Funktion mit Hilfe der Maximalstellen, die Sie der Grafik entnehmen, den zugehörigen Zahlenwert k. **(10P)**

b) Entscheiden Sie mit Hilfe der Lage der Extrempunkte, dass nur Zahlenwerte k mit $0 < k < 1$ für eine sinnvolle Beschreibung des Wachstumsprozesses in Frage kommen. **(10P)**

c) Für die Wachstumsgeschwindigkeit der Höhe von Douglasien soll nun die Funktion $w_{0,04}$ mit $w_{0,04}(t) = 0,04 \cdot (t+1) \cdot e^{-0,03t}$ betrachtet werden.

Bestimmen Sie das Alter mit der höchsten Wachstumsgeschwindigkeit und geben Sie diese an. **(15P)**

d) Die Funktion *h* mit $h(t) = -\frac{4}{3} \cdot e^{-0{,}03t} \cdot \left(t + 34\frac{1}{3}\right) + 45\frac{7}{9}$ beschreibt modellhaft, wie sich die Baumhöhe *h* von Douglasien (in m) in Abhängigkeit von der Zeit *t* (in Jahren) entwickelt.

- Zeigen Sie mit Hilfe der partiellen Integration, dass sich *h*(*t*) aus $w_{0,04}(t)$ herleiten lässt.
- Ermitteln Sie, welche Stammhöhe eine Douglasie nach diesem Modell nicht überschreiten kann.
- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion *h* im Intervall $0 < t < 300$ in das Koordinatensystem in der Anlage 1. Wählen Sie den Maßstab 1 LE $\hat{=}$ 20 Jahre für die Zeitachse *t* und 1 LE $\hat{=}$ 5 m für die Höhenachse *h*(*t*).
- Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen im Kontext. **(20P)**

e) Für das logistische Wachstumsverhalten einer Funktion *f* gilt:
$f'(x) = \lambda \cdot f(x) \cdot (P - f(x))$ mit $\lambda > 0$.
(λ stellt eine Proportionalitätskonstante dar und *P* steht für die obere Wachstumsgrenze.)
Entscheiden Sie begründet, ob die Funktion *h* logistisches Wachstum beschreibt. **(15P)**

Als Kenngröße für das Dickenwachstum spielt der sogenannte Brusthöhendurchmesser BHD, der den Durchmesser des Stammes in einer Höhe von 1,30 m angibt, eine große Rolle.

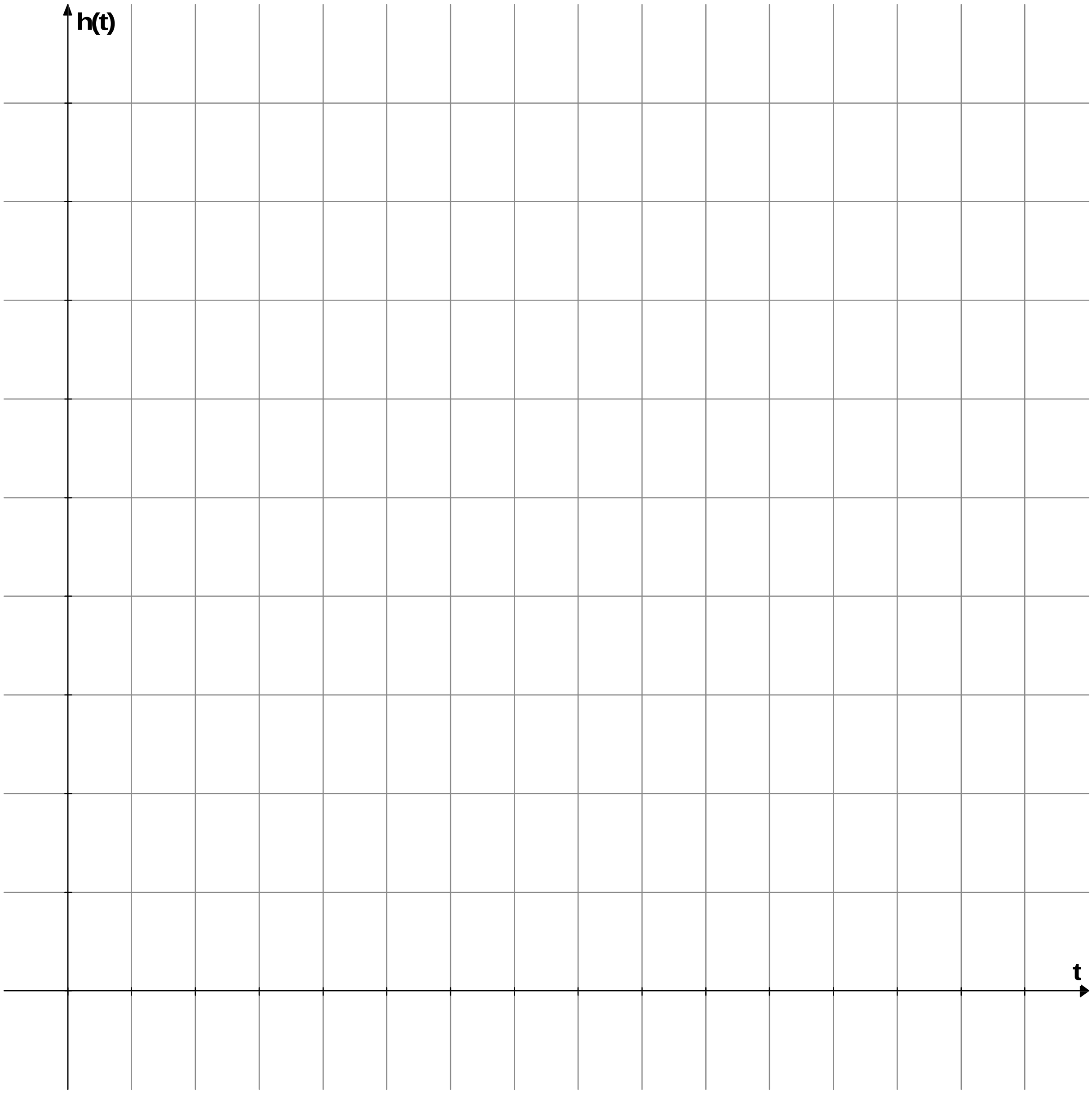
f) Berechnen Sie den BHD für eine Douglasie im Alter von 80 Jahren, wenn der Quotient aus Baumhöhe und BHD den Wert 80 aufweisen soll. **(10P)**

Für die Produktion von besonders hochwertigem Holz ist die Kennzeichnung und besondere Pflege (Schnitte) von sogenannten Z-Bäumen (Zukunftsbäumen) von Bedeutung. Bei diesen Bäumen wird als Ziel ein BHD-Wert von 70 bis 80 cm im Alter von 60 bis 70 Jahren angestrebt.

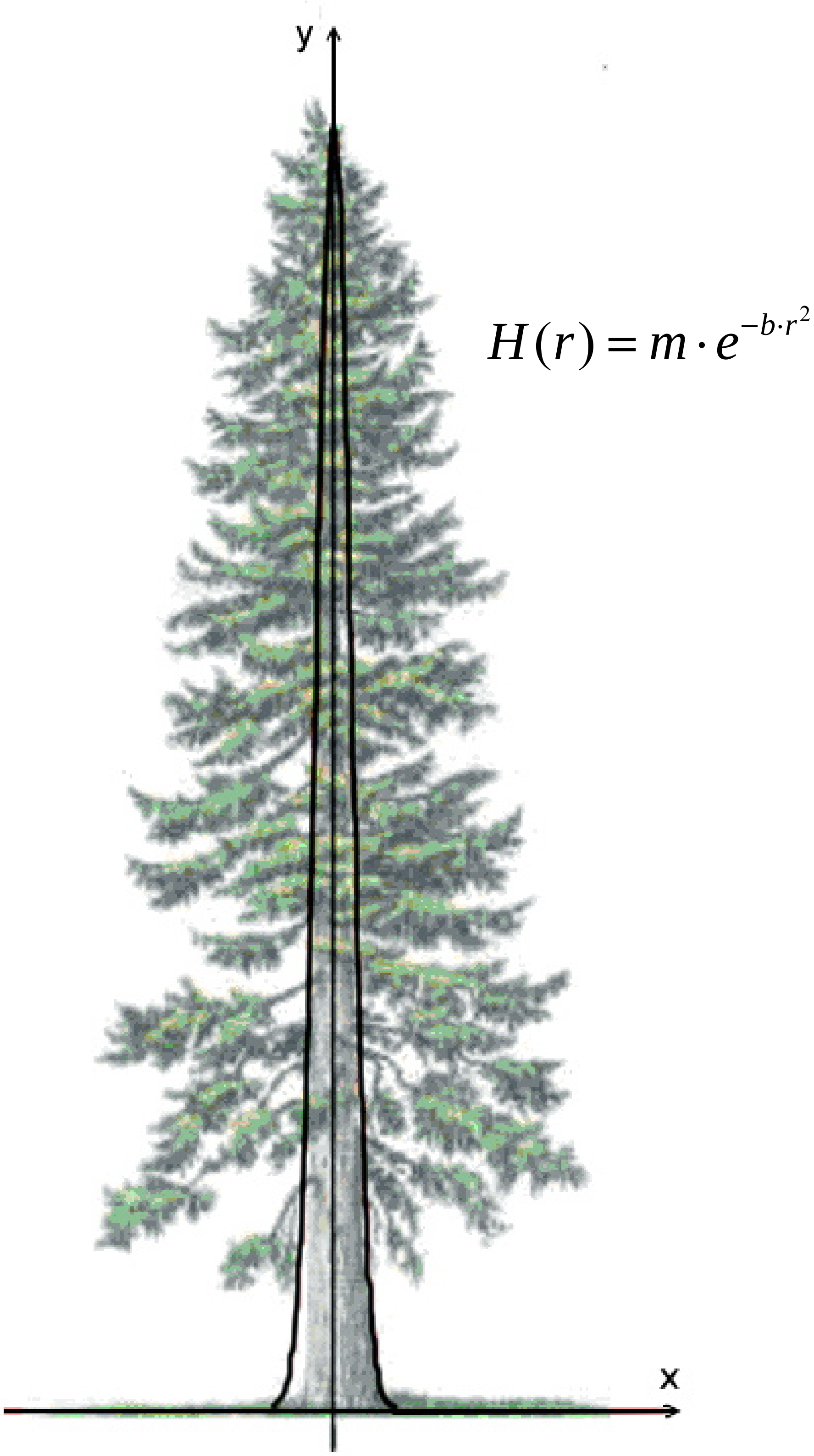
g) Bei einem idealen Baumtyp mit kreisrundem Stamm lässt sich der Stammlängsschnitt modellhaft durch eine Funktion $H(r) = m \cdot e^{-b \cdot r^2}$ beschreiben, wobei *H*(*r*) die Höhe angibt, in der der Stamm den Radius *r* aufweist (siehe Anlage 2).

- Bestimmen Sie die Parameter *m* und *b* für einen Z-Baum, der im Alter von 70 Jahren eine Höhe von 32 m erreicht und einen BHD von 70 cm hat.
(*Zur Kontrolle*: *m* = 32 *und* *b* = 26,15).
- Beschreiben Sie zwei mögliche Verfahren, um das Volumen eines solchen Z-Baumes im Alter von 70 Jahren unter Berücksichtigung einer Höhe von 32 m (abzüglich der Schnitthöhe von 20 cm) und einem Ziel-BHD von 70 cm zu ermitteln.
- Bestimmen Sie mit Hilfe eines der beiden Verfahren das Volumen.
- Vergleichen Sie das ermittelte Volumen mit demjenigen Wert, der sich aus der praxisorientierten Formel von Johnssen berechnen lässt, und begründen Sie die Abweichungen.
Faustformel von Johnssen: $V = 0{,}03186 \cdot d^2 \cdot h + 0{,}43 \cdot h + 0{,}0551 \cdot d^2 - 0{,}4148 \cdot d$
mit V : Stamm-Volumen mit Rinde (in dm^3)
d : BHD-Durchmesser (in cm)
h : Baumhöhe (in m) **(20P)**

Anlage 1 zur Aufgabe „Wachstumsverhalten von Douglasien“



Anlage 2 zur Aufgabe „Wachstumsverhalten von Douglasien“



Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Mit $w_1(t)=(t+1)\cdot e^{-kt}$ folgt: $w_1{}'(t)=\left(1-k\cdot(t+1)\right)\cdot e^{-kt}$.
Da für alle Maxima $w_1'(t)=0$ sein muss, gilt $1-k(t+1)=0 \;\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{t+1}$.
Da die Maxima in den gegebenen Graphen bei $t=-0{,}5$, $t=0$ und $t=4$ liegen, erhält man die zugehörigen Werte k = 2, k = 1 und k = 0,2.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Aus $1-k(t+1)=0$ folgt $t=\frac{1}{k}-1$. Für alle Zahlenwerte mit 0 < k < 1 ist t immer größer als Null. Damit treten Maxima des Höhenzuwachses nur für positive t (Jahreszahlen) auf, was sinnvoll ist.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Höchste Wachstumsgeschwindigkeit bedeutet Maximum der Funktion $w_{0,04}(t)$.
Mit Hilfe der obigen Formel folgt: $w_{0,04}'(t)=0{,}04\cdot\left(1-0{,}03\cdot(t+1)\right)\cdot e^{-0{,}03t}=0$.
Mit $1-0{,}03\cdot(t+1)=0$ folgt $t=32\frac{1}{3}$.
Testeinsetzungen von t = 32 und t =33 bestätigen das Vorhandensein eines Maximums.
$w_{0,04}(32\frac{1}{3})\approx 0{,}505$.
Das heißt, im Alter von $32\frac{1}{3}$ Jahren ist die Wachstumsgeschwindigkeit mit ca. 50 cm pro Jahr am größten.</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Beschreibt $w_{0,04}(t)=0{,}04\cdot(t+1)\cdot e^{-0{,}03t}$ die Wachstumsgeschwindigkeit, so muss
$$h(t)=\int_0^x w(t)dt$$
die Höhe h in Abhängigkeit von t darstellen.
Aus $h(t)=0{,}04\int_0^x (t+1)\cdot e^{-0{,}03t}dt$ erhält man durch partielle Integration mit
$u(t)=t+1$ und $v'(t)=e^{-0{,}03t}$ den Term
$$0{,}04\left(\left[(t+1)\cdot(-\frac{1}{0{,}03})\cdot e^{-0{,}03t}\right]_0^x-\int_0^x(-\frac{1}{0{,}03})\cdot e^{-0{,}03t}dt\right).$$
Daraus folgt:</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

$$0{,}04\left(\left[(t+1)\cdot(-\frac{1}{0{,}03})\cdot e^{-0{,}03t}\right]_0^x-(\frac{1}{0{,}03^2})\cdot\left[e^{-0{,}03t}\right]_0^x\right)=$$

$$0{,}04\left((x+1)\cdot(-\frac{1}{0{,}03})\cdot e^{-0{,}03x}-(-\frac{1}{0{,}03})\quad+(-\frac{1}{0{,}03^2})\cdot e^{-0{,}03x}-(-\frac{1}{0{,}03^2})\right)=$$

$$0{,}04\left((-\frac{1}{0{,}03})\cdot e^{-0{,}03x}\cdot\left(x+1+\frac{1}{0{,}03}\right)+\frac{1}{0{,}03}+\frac{1}{0{,}03^2}\right)=$$

$$0{,}04\left((-\frac{1}{0{,}03})\cdot e^{-0{,}03x}\cdot\left(x+1+\frac{1}{0{,}03}\right)+\frac{1}{0{,}03}+\frac{1}{0{,}03^2}\right)$$

und schließlich erhält man durch Ersatz von x durch t den Term

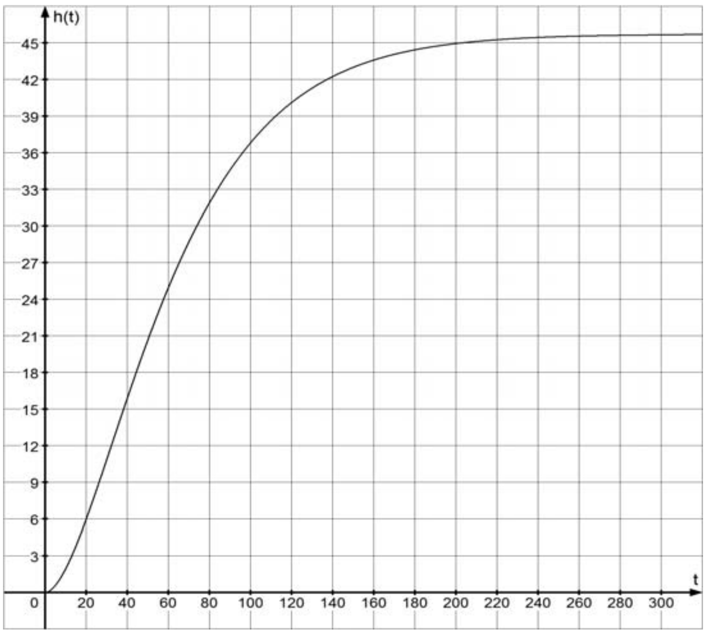
$$h(t)=-\frac{4}{3}e^{-0{,}03t}(t+34\tfrac{1}{3})+45\tfrac{7}{9}\,.$$

Damit ist gezeigt, das h eine Stammfunktion von $w_{0,04}$ mit $w_{0,04}(t)=0{,}04(t+1)\cdot e^{-0{,}03t}$ ist und somit das Höhenwachstum h in Abhängigkeit von t darstellt.

Für die maximale Höhe ist der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty}\left(-\frac{4}{3}e^{-0{,}03t}(t+34\frac{1}{3})+45\frac{7}{9}\right)$ zu bilden. Da für sehr große Werte t der Term $-\frac{4}{3}e^{-0{,}03t}(t+34\frac{1}{3})$ gegen 0 strebt, beträgt der Grenzwert $45\frac{7}{9}$.

Die Bäume können danach eine Höhe von ca. 46 m nicht überschreiten.

Graph von h:



<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Interpretation des Kurvenverlaufs:
Nach anfänglich geringem Wachstum wächst eine Douglasie bis zum Alter von ca. 60 Jahren relativ gleichmäßig. Danach verlangsamt sich das Wachstum und sie erreicht erst im Alter von über 200 Jahren annähernd die Endhöhe von 46 m.</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Für ein logistisches Wachstum muss h(t) die Bedingung
$h'(t) = \lambda \cdot h(t) \cdot (45\frac{7}{9} - h(t))$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllen.
Dies ist nicht der Fall:
(1) $h'(t) = w_{0,04}(t) = 0,04 \cdot (t+1) \cdot e^{-0,03t}$
(2) $\lambda \cdot h(t) \cdot (45\frac{7}{9} - h(t)) = \lambda \cdot \left(-\frac{4}{3}e^{-0,03t} \cdot \left(t - 34\frac{1}{3}\right) + 45\frac{7}{9}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}e^{-0,03t} \cdot \left(t - 34\frac{1}{3}\right)\right)$
Die Multiplikation der letzten beiden Terme ergibt nicht die in (1) vorliegende Form.
Also liegt kein logistisches Wachstum vor.
Eine andere Möglichkeit wäre zu argumentieren, dass für ein logistisches Wachstum die Funktion h die Form $\frac{t}{r + s \cdot e^{kt}}$ mit $(r, s, t \in \mathbb{R})$ haben müsste, was nicht der Fall ist.</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>$h(80) \approx 32 \;\Rightarrow\; \frac{32}{BHD} = 80 \;\Rightarrow\; BHD = 0,4$.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>g)</td><td>Es gilt H(0) = 32: $32 = m \cdot e^{-b\cdot 0} = m$
und H(0,35) = 1,3: $1,3 = m \cdot e^{-b\cdot 0,35^2}$
m = 32 eingesetzt in die 2. Gleichung ergibt:
$$1,3 = 32 \cdot e^{-b\cdot 0,35^2}$$
$$\frac{1,3}{32} = e^{-b\cdot 0,35^2}$$
$$-b \cdot 0,35^2 = \ln\left(\frac{1,3}{32}\right)$$
$$b = -\frac{\ln\left(\frac{1,3}{32}\right)}{0,35^2}$$
$$b = 26,1499...$$
Damit sind die Werte m = 32 und b = 26,15 bestätigt.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Mögliche Beschreibungen:

- Man bildet die Umkehrfunktion zur gegeben Höhenfunktion und berechnet mit Hilfe der Rotations-Volumenformel.
- Man nähert den idealen Baum einem Kegel an, dessen Grundfläche sich dicht über dem Boden befindet und der die um 0,2 m reduzierte Höhe des Baumes besitzt.

<u>Lösung zum ersten Vorschlag</u>:

Von der Funktion $H(r) = 32 \cdot e^{-26{,}15 \cdot r^2}$ wird die Umkehrfunktion

$$r(H) = \sqrt{\frac{\ln 32}{26{,}15} - \frac{\ln H}{26{,}15}} = \sqrt{0{,}1325 - 0{,}03824 \ln H}$$

gebildet und dann das Rotationsvolumen mit Hilfe von

$$\pi \cdot \int_{0{,}2}^{32} (\sqrt{0{,}1325 - 0{,}03824 \ln H})^2 \, dH = \pi \cdot \int_{0{,}2}^{32} \left(0{,}1325 - 0{,}03824 \ln H\right) dH$$

berechnet. Dazu kann die Formel $\int \ln H dH = H \cdot \ln\left|H\right| - H$ aus der Formelsammlung verwendet werden.

Man erhält schließlich für das Volumen ca. 3,7 m^3.

<u>Lösung zum zweiten Vorschlag:</u>

Man verwendet die in f) ermittelten Wert und bildet mit dem Strahlensatz folgende Gleichung:

$$\frac{r}{0{,}35} = \frac{32 - 0{,}2}{30{,}7} \Rightarrow r \approx 0{,}36 .$$

Für das Volumen des Kegels ergeben sich dann 4,3 m³.

Nach der Formel von Johnssen errechnet sich das Volumen zu V = 5 219 dm^3 $\approx$ 5,2 m^3.

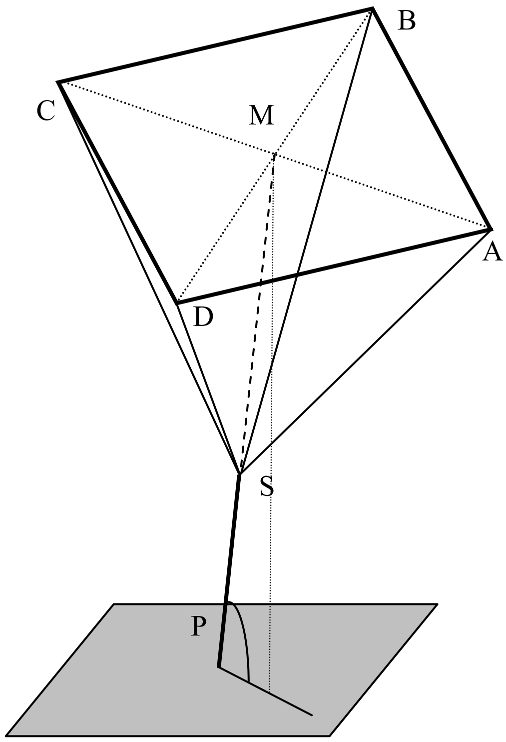
Das Volumen des idealen Kegels ist etwas größer als das berechnete Rotationsvolumen und liegt näher an dem aus der Johnssen-Formel berechneten Wert. Daher ist das Kegelvolumen ein guter Näherungswert. Das aus der praxisorientierten Johnssen-Formel berechnete Volumen ist vermutlich deshalb größer als die beiden anderen Werte, weil man mit Hilfe der modellierten Funktion zu geringe Durchmesser gerade im unteren Stammbereich erhält.
</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

LA/AG 1

II.1 Pyramide mit Kugel

Ein Künstler entwirft am Computer das Modell einer Pyramide, die zur Gestaltung des Vorplatzes der neuen Kunstakademie vorgesehen ist. Die Pyramide hat eine quadratische Grundfläche und ist gerade, d.h. der Fußpunkt M ihrer Raumhöhe liegt im Mittelpunkt der quadratischen Grundfläche (siehe Abbildung).

Dem Betrachter der Pyramide soll das Gefühl vermittelt werden, als bewege sie sich schwerelos im Raum. Zur Erzeugung dieses Eindrucks verläuft durch die Spitze S der Pyramide sowie durch M eine Metallachse, die im Punkt P der x_1-x_2-Ebene fixiert ist. Bei der Planung am Computer ist die Position der Pyramide bestimmt durch die Koordinaten der Eckpunkte ihrer Grundfläche $A(\,5 \mid 2 \mid 3\,)$, $B(\,6 \mid 4 \mid 5\,)$, $C(\,4 \mid 6 \mid 4\,)$ und $D(\,3 \mid 4 \mid 2\,)$.
Die Raumhöhe $h = \overline{MS}$ soll das 1,5-fache der Seitenlänge des Quadrats betragen.
Eine Längeneinheit in dem betrachteten Koordinatensystem entspricht 1 m.



Bodenfläche (x_1-x_2-Ebene)

Nicht maßstäbliche perspektivische Darstellung der Pyramide

a) Weisen Sie nach, dass die Grundfläche tatsächlich ein Quadrat darstellt, und bestätigen Sie die Koordinaten der Pyramidenspitze $S(\,7{,}5 \mid 5{,}5 \mid 0{,}5\,)$. **(20P)**

b) Berechnen Sie, um welchen Winkel die Pyramidenachse gegenüber der Vertikalen geneigt ist. Bestimmen Sie die Länge der Strecke $\overline{MP}$. **(15P)**

c) Die Pyramide ist nicht nur an diesem Punkt P im Boden befestigt. Eine zweite Befestigungsstange geht durch den Mittelpunkt M, steht senkrecht auf $\overline{MP}$ und ist so im Punkt Q der x_1-x_2-Ebene fixiert, dass das Dreieck PQM senkrecht zur x_1-x_2-Ebene steht. Bestimmen Sie die Koordinaten von Q. **(15P)**

Der Designer plant, in die aus Acrylglas bestehende Pyramide eine Kugel aus dem gleichen Material zu integrieren. Zur Effektsteigerung soll die Kugel mit einem Material beschichtet werden, das je nach Richtung des Lichteinfalls wechselnde Farbtöne hervorbringt. Der Designer experimentiert zunächst mit der Größe der Kugel. Sie soll die Grundfläche der Pyramide in der Mitte berühren.

d) Zeigen Sie, dass eine Kugel $\boldsymbol{K}_{1,5}$ mit dem Radius 1,5 LE die Seitenflächen der Pyramide jeweils in einem Kreis schneiden müsste. Ermitteln Sie den Mittelpunkt und den Radius von einem dieser vier Kreise. **(20P)**

Zur Vereinfachung weiterer Rechnungen entscheidet der Künstler, die Grundfläche in die x_1-x_2-Ebene (mit dem Ursprung als Mittelpunkt) zu legen und die Quadratseiten parallel zu den Koordinatenachsen anzuordnen. Die einbeschriebene Kugel soll auf der Grundfläche aufliegen und ihren Mittelpunkt auf der x_3-Achse haben.

e) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide in dieser Lage. **(5P)**

f) Der Designer möchte nun aber, dass die Kugel die Pyramide von innen berührt.
Bestimmen Sie den Radius der Kugel $\boldsymbol{K}_r$ so, dass diese Eigenschaften erfüllt sind.
(*Zur Kontrolle:* $r \approx 1{,}08$ LE) **(15P)**

Bei der Fertigung der Kugel ist der Auftragswerkstatt leider ein Fehler unterlaufen. Die gelieferte Kugel hat einen Radius von 1 LE und berührt die Seitenflächen nicht, wenn sie auf der Grundfläche aufliegt.

Der Designer denkt eine Weile nach und hat eine Idee: „Um so besser, dann kommt zwischen die große Kugel und die Seitenflächen jeweils noch eine kleine Kugel, die den Abstand ausgleicht – und diese vier kleinen Kugeln erhalten eine innere Beleuchtung."

g) Die Firma, die die leuchtenden Kugeln herstellt, kann diese nur ab einem Durchmesser von 0,1 LE bauen.
Entscheiden Sie, ob mit solchen Leuchtkugeln die Idee des Designers realisiert werden kann. **(10P)**

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Nachweis Quadrat-Eigenschaft:

Es sind verschiedene Vorgehensweisen denkbar.

Für die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ sowie $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AD}$ gilt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC} \text{ und } \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC} \text{ und damit } \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC} \text{ und } \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}.$$

Weiterhin gilt $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{DA}\right| = 3$ wegen jeweils paarweise identischer Richtungsvektoren, deren Betrag 3 ist.

$$\text{Wegen } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ gilt noch } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \text{ und } \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}.$$

Bestätigung der Koordinaten von S:

Es sind verschiedene Vorgehensweisen denkbar.

Als Normalenvektor der Grundfläche *ABCD* erhält man z. B. $\vec{n}_{ABCD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Die Kantenlänge ergibt sich zu $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^1 + 2^2 + 2^2} = 3 \Rightarrow \left|\vec{n}_1\right| = 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$ und

somit: $\vec{n}_1 = 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Damit ergibt sich für den Ortsvektor der Pyramidenspitze *S*:

$$\overrightarrow{0S} = \overrightarrow{0A} + \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 5{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix},$$

also *S*(7,5 | 5,5 | 0,5).

</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Winkel zwischen der Pyramidenachse und der Vertikalen:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_{ABCD} \cdot \vec{n}_v}{\left|\vec{n}_{ABCD}\right| \cdot \left|\vec{n}_v\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \alpha \approx 48{,}19°.$$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

Abstand *d* der Pyramidenspitze *S* von *P* (Schnittpunkt der Achse mit der x_1-x_2-Ebene):

Für die Berechnung des Abstandes d der Pyramidenspitze vom Schnittpunkt der Pyramidenachse mit der x_1-x_2-Ebene stellen wir zunächst die Gleichung der Achse auf:

$$f\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OS} + \lambda \cdot \vec{n}_{ABCD} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 5{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Da die x_3-Koordinate 0 sein muss, folgt:

$$\lambda = 0{,}25 \text{ , somit } \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5{,}75 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$d = \left|\overrightarrow{SP}\right| = \left|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OS}\right| = 0{,}75 \,.$$

Nach dem Vortext zu a) ist $\left|\overline{MS}\right| = 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$ und somit

$$\left|\overline{MP}\right| = 4{,}5 + 0{,}75 = 5{,}25 \,.$$

Die Länge der Strecke $\overline{MP}$ beträgt 5,25 m.

</td><td>10</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Für den gesuchten Punkt Q muss gelten: $\overline{MP}$ steht senkrecht auf $\overline{MQ}$. Dabei ist $M(\,4{,}5 \mid 4 \mid 3{,}5\,)$ der Mittelpunkt der Pyramidengrundfläche. Q liegt auf der Geraden durch P und M', wobei M' der Fußpunkt des Lotes von M auf die x_1-x_2-Ebene ist. Mit $M'(\,4{,}5 \mid 4 \mid 0)$ folgt für die Gleichung der Geraden durch P und M':

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5{,}75 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 1{,}75 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Orthogonalität von $\overrightarrow{MP}$ und $\overrightarrow{MQ}$ bedeutet, dass ihr Skalarprodukt 0 ist.

Wir erhalten die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 3{,}5 + 3{,}5\lambda \\ 1{,}75 + 1{,}75\lambda \\ -3{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 1{,}75 \\ -3{,}5 \end{pmatrix} = 0$$

$$3{,}5^2 + 3{,}5^2\lambda + 1{,}75^2 + 1{,}75^2\lambda + 3{,}5^2 = 0$$

$$27{,}5625 + 15{,}3125\lambda = 0 \ \Rightarrow \lambda = -1{,}8 \,.$$

Damit erhalten wir für den gesuchten Punkt Q die Koordinaten $(\,1{,}7 \mid 2{,}6 \mid 0\,)$.

</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>
Der Mittelpunkt M_K liegt auf einer Geraden, die durch den Mittelpunkt der Pyramidengrundfläche $M(4{,}5 \mid 4 \mid 3{,}5)$ und $S(7{,}5 \mid 5{,}5 \mid 0{,}5)$ verläuft, und hat zu M den Abstand seines Radius':

$g_K : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 4 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}$, und da $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 1{,}5^2 + 3^2} = 4{,}5$, wird $\lambda = \frac{1}{3}$.

$\overrightarrow{OM_K} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 4 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 4{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$, d. h. $M_{K'}(5{,}5 \mid 4{,}5 \mid 2{,}5)$.

Der Abstand der Kugel lässt sich u. a. mit Hilfe der Ebene E_{ADS} bestimmen.

Parameterform: $E_{ADS} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 3{,}5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$ oder in

Koordinatenform E_{ADS} : $x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 39$.

Gesucht wird der Schnittpunkt einer Geraden in Richtung eines Normalen-vektors $\vec{n}_{ADS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ der Ebene E_{ADS} durch den Mittelpunkt M_K der Kugel mit der Ebene ADS.

$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 4{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ Gleichsetzen mit E_{ADS} oder Einsetzen in die Koordinatenform führt zu dem Schnittpunkt und gleichzeitigem Schnittkreis-mittelpunkt $S_{Kreis}(5{,}4 \mid 4 \mid 1{,}7)$.

Der gesuchte Abstand beträgt $\left| \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 4{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5{,}4 \\ 4 \\ 1{,}7 \end{pmatrix} \right| = 0{,}9486832980 < 1{,}5$.

Der Radius des Kreises berechnet sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras

$r_{Kreis} = \sqrt{1{,}5^2 - 0{,}948683298^2} \approx 1{,}16$.
</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>
Die Pyramide mit der Grundfläche in der x_1-x_2-Ebene hat entsprechend den Vorgaben aus a) die folgenden Punkte:

$A_0(1{,}5 \mid 1{,}5 \mid 0)$, $B_0(1{,}5 \mid -1{,}5 \mid 0)$, $C_0(-1{,}5 \mid -1{,}5 \mid 0)$, $D_0(-1{,}5 \mid 1{,}5 \mid 0)$ und $S_0(0 \mid 0 \mid 4{,}5)$.
</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

Lösungsskizze (Zuordnung, Bewertung: I | II | III)

f) Der Mittelpunkt der Kugel K_r mit dem Radius r lautet: $M_r(0 \mid 0 \mid r)$. Der Abstand von M_r zur Ebene durch $A_0B_0S_0$ muss gleich r sein.

Mit Hilfe eines Normalenvektors zur Ebene $A_0B_0S_0$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, seiner Länge $\sqrt{10}$

und des Vektors $\overrightarrow{OA_0} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$, erhält man mit der Abstandsformel

$$\left| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (-4,5 + r) \right| = r\,.$$

Da $r - 4,5 < 0$ ist, gilt:

$4,5 - r > 0$ und somit $4,5 - r = \sqrt{10} \cdot r$ und $r = \dfrac{4,5}{1 + \sqrt{10}} \approx 1,08$.

Lösung auch mit der Hesse´schen Normalenform möglich, es geht aber auch elementargeometrisch:

Die Dreiecke *MNA* und *MEA* sind kongruent, Übereinstimmung:

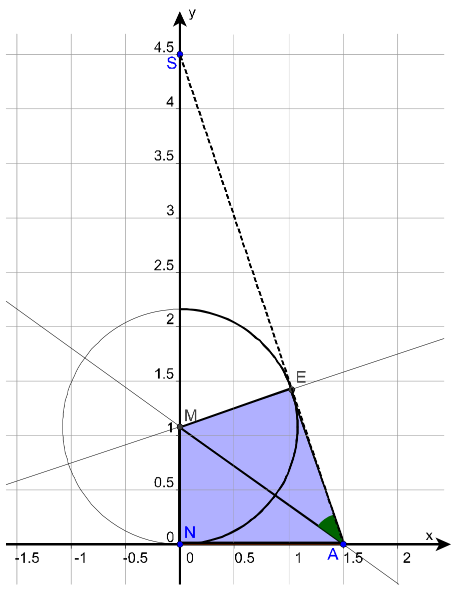
(i) Seite *MA*
(ii) rechter Winkel gegenüber bei *N* bzw. *E*,
(iii) Seitenlänge *MN* bzw. *ME* *(=Radius)*.

Also stimmen die Winkel bei *A* überein und haben jeweils das halbe Maß des Winkels bei *A* im Dreieck *ASN*.

Dieser Winkel heiße α und es gilt

$\tan\alpha = \dfrac{4,5}{1,5} = 3$, also $\alpha \approx 71,57°$.

und damit $\dfrac{\alpha}{2} \approx 35,78°, \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx 0,72$.



Mit dem Dreieck *ANM* wird jetzt der Radius r berechnet:

Es gilt $0,72 = \dfrac{r}{1,5}$ und damit $r \approx 1,08$.

I	II	III
	5	10

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>g)</td><td>Zu untersuchen ist, ob der Abstand d des Kugelmittelpunktes (0 | 0 | 1) von einer Seitenfläche größer als 1,1 m ist. Eine Gleichung der Ebene $A_0B_0S_0$ lautet:

$3x_1 + x_3 = 4{,}5$.

Setzt man die Koordinaten des Kugelmittelpunktes in Hesse´sche Normalenform ein, so erhält man für den Abstand:

$d = \left| \frac{3 \cdot 0 + 1 - 4{,}5}{\sqrt{10}} \right| = 1{,}1068$.

Damit beträgt der Abstand zwischen Kugeloberfläche und Seitenfläche mehr als 0,1 LE, und die Idee des Designers lässt sich realisieren.

Lösung auch mit der Formel für Abstand Punkt - Ebene möglich.

In die Abstandsformel in f) (s.o.) ersetzt man r durch 1 und erhält analog

$\frac{3{,}5}{\sqrt{10}} \approx 1{,}1068$.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

LA/AG 2

II.2 Seeschildkröten

Grüne Seeschildkröten sind weltweit vom Aussterben bedroht. Die Gelege wurden von der ansässigen Bevölkerung oft ausgenommen, gejagt wurden sie wegen ihres Fleisches und der Panzer (Schildpatt wurde früher z.B. für Kämme und Brillenfassungen verwendet). Durch industriellen Fischfang mit riesigen Schleppnetzen und die Verschmutzung der Meere sind die Bestände dramatisch zurückgegangen. Durch den Massentourismus sind zudem weite Strände baulich erschlossen worden, an denen die Schildkröten ihre Eier abzulegen pflegten. Gerade aber auch durch die Tourismusindustrie werden jetzt zunehmend Anstrengungen unternommen, Projekte zu fördern, um die Restbestände zu schützen.

Schwierig ist die Bestandsaufnahme und die Beobachtung der Populationen. Die weiblichen Schildkröten kommen nachts zur Eiablage an den Strand, graben Nester in den Sand und scharren sie nach der Eiablage zu. Die Eier reifen im Sand heran, und nach etwa zwei Monaten schlüpfen die kleinen Schildkröten. Sie rennen dann zeitgleich eines Nachts im wahrsten Sinne des Wortes um ihr Leben in Richtung Meer, da Raubvögel und Krebse sie bereits am Strand erwarten. Wenn sie die Geschlechtsreife erreicht haben, im Durchschnitt nach 25 Jahren, kehren die weiblichen Schildkröten an diesen Strand zur Eiablage zurück. In der Zwischenzeit legen sie im Meer Hunderte von Meilen zurück.

Die Anzahl der Gelege variiert, nicht jedes Jahr pflanzen sich Schildkröten fort. Gehen Sie davon aus, dass eine auf Hawaii „heimische“ Population zu Beobachtungsbeginn – nach der Eiablage – aus

- 60 000 Eiern (*E*),
- 24 000 Jungschildkröten (*J*)
- 300 geschlechtsreifen weiblichen Schildkröten (*W*) besteht.

Die jährliche Entwicklung dieser Population wird durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 0{,}05 & 0{,}89 & 0 \\ 0 & 0{,}0005 & 0{,}95 \end{pmatrix} \text{ beschrieben.}$$

a) Stellen Sie die Entwicklung mit einem Übergangsgraphen dar und beschreiben Sie, welche Annahmen diesem Modell zugrunde liegen. Gehen Sie dabei auf alle von Null verschiedenen Elemente in dieser Matrix ein. **(20P)**

b) Betrachtet man nur die Anzahlen der geschlechtsreifen Schildkrötenweibchen, so erhält man die folgende Wertetabelle:

Anzahl *t* der Jahre seit Beobachtungsbeginn	0	1	5	10	20	40
Anzahl *w*(*t*) der geschlechtsreifen Weibchen	300	297	288	280	270	254

Untersuchen Sie, ob diese Entwicklung näherungsweise durch eine Funktion *w* mit $w(t) = a \cdot e^{kt}$ beschrieben werden kann. **(15P)**

Hinweis: Benutzen Sie für das Aufstellen der Funktion die Wertepaare (0/300) und (20/270).

c) Bestätigen Sie, dass es unter den durch die Matrix M beschriebenen Umweltbedingungen keinen Bestand geben kann, der sich reproduziert. **(10P)**

d) Ein Hobbybiologe überlegt, ob man u.U. durch Bewachung und Schutz der frisch geschlüpften Schildkröten Populationen stabilisieren kann.

- Bestimmen Sie das entsprechende Matrixelement so, dass es für die neue Matrix M_2 Fixvektoren gibt, und geben Sie einen Fixvektor an.

  Die Frau des Hobbybiologen gibt zu bedenken, dass dies wiederum einen Eingriff in das Ökosystem und den Nahrungskreislauf bedeutet, dessen Folgen für die übrige Fauna nicht abzusehen wären. Vielmehr müsse der Umweltschutz so verbessert werden, dass die Überlebensrate der Jungschildkröten und der geschlechtsreifen Weibchen steigt.

- Gehen Sie im Modell davon aus, dass sich unter verbesserten Umweltbedingungen die Überlebensrate der Jungschildkröten und der geschlechtsreifen Weibchen mit demselben Faktor r erhöht. Bestimmen Sie r so, dass eine Stabilisierung des Bestandes eintritt.
  (Zur Kontrolle: Man erhält als Zwischenergebnisse $r \approx 1{,}0033$ und $r \approx 1{,}1788$)
  Bestimmen Sie die neue Populationsmatrix M_3 und einen zugehörigen Fixvektor. **(20P)**

Zurück zu der anfangs durch M beschriebenen Entwicklung des Bestandes.
Durch das obige Modell wird nicht der gesamte Bestand an Schildkröten erfasst. Schildkröten können über 100 Jahre alt werden, fortpflanzungsfähig sind sie jedoch nur ca. 20 Jahre. Für Touristen sind große, alte Schildkröten in freier Natur ein seltener, sensationeller Anblick.
Es werden nun neben Eiern (E) und Jungschildkröten (J) fortpflanzungsfähige männliche und weibliche Schildkröten (G) und alte, nicht mehr fortpflanzungsfähige Schildkröten beiderlei Geschlechts (A) betrachtet.

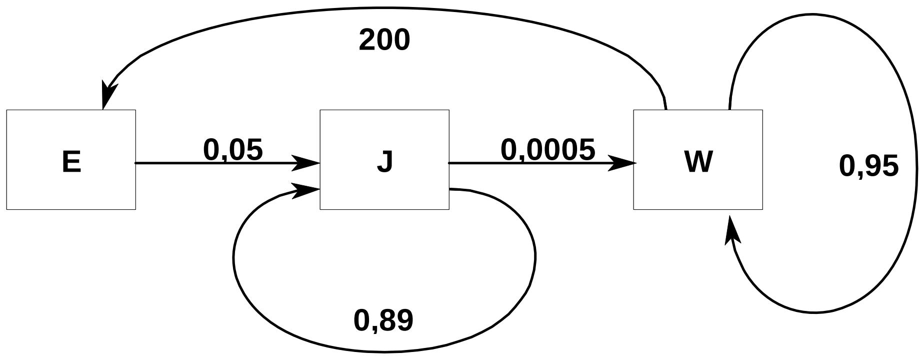
e) Begründen Sie, welche Elemente der Populationsmatrix $P = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ n & p & t & u \end{pmatrix}$

gleich Null sind und welche von Null verschieden sein müssen, um die Entwicklung dieser Population beschreiben zu können. **(15P)**

f) Leiten Sie auf der Grundlage von M eine 4x4 –Matrix M_4 her, in der nun auch die Entwicklung der fortpflanzungsfähigen männlichen Schildkröten und der nicht mehr fortpflanzungsfähigen alten – männlichen und weiblichen – Schildkröten erfasst sind.
Gehen Sie bei der Modellierung davon aus, dass
- es gleich viele männliche wie weibliche Schildkröten in dieser Population gibt,
- die Überlebensraten für beide Geschlechter gleich sind.

- Begründen Sie, ob – und wenn ja, wie – sich die von Null verschiedenen Matrixelemente von M beim Übergang auf M_4 verändern.
- Begründen Sie, welche mathematisch sinnvollen Überlebensraten für den Bestand an alten Schildkröten in Frage kommen. **(20P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<u>Übergangsgraph:</u>  Folgende Annahmen liegen dem Modell in jedem Zeittakt (ein Jahr) zu Grunde: Jede geschlechtsreife weibliche Schildkröte legt 200 Eier. Nur noch 5 % der ursprünglich aus den Eiern geschlüpften kleinen Schildkröten sind am Leben. 89 % der Jungschildkröten verbleiben innerhalb ihrer Altersklasse. 0,5 Promille der Jungschildkröten wachsen zu geschlechtsreifen weiblichen Schildkröten heran. Die Überlebensrate der geschlechtsreifen weiblichen Schildkröten beträgt 95 %.	15	5	
b)	Es gilt: $w(0) = a \cdot e^0 = 300$ und damit $a = 300$. Aus $w(20) = 300 \cdot e^{20k} = 270$ folgt: $e^{20k} = \frac{270}{300} \quad \Leftrightarrow \quad k = 0{,}05 \ln 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad k \approx -0{,}0053$ Die Funktionsgleichung lautet somit: $w(t) = 300 \cdot e^{0{,}05 \ln 0.9 \cdot t}$ bzw. $w(t) \approx 300 \cdot e^{-0{,}0053 \cdot t}$ Prüfung: $w(1) \approx 298$, $w(5) \approx 292$, $w(10) \approx 284$, $w(40) = 243$. Die mit der Funktionsgleichung ermittelten Anzahlen geschlechtsreifer Weibchen stimmen also näherungsweise mit den Werten in der Tabelle überein. Die größte prozentuale Abweichung ist kleiner als 5 %.		15	
c)	Das Gleichungssystem, das sich aus dem Ansatz $M \cdot \begin{pmatrix} E \\ J \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ J \\ W \end{pmatrix}$ ergibt, hat nur die Lösung $E = J = W = 0$. Also gibt es keinen Bestand, der sich reproduziert.	10		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	• Gesucht ist *x*, so dass zu $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ x & 0{,}89 & 0 \\ 0 & 0{,}0005 & 0{,}95 \end{pmatrix}$ ein Fixvektor $\vec{p}$ existiert. Aus dem Ansatz $M_2 \cdot \begin{pmatrix} E \\ J \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ J \\ W \end{pmatrix}$ erhält man *x* = 0.055 und damit $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 0.055 & 0{,}89 & 0 \\ 0 & 0{,}0005 & 0{,}95 \end{pmatrix}$. Ein Fixvektor ist $\begin{pmatrix} 60000 \\ 30000 \\ 300 \end{pmatrix}$. • Gesucht ist *r*, so dass zu $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 0{,}05 & 0{,}89r & 0 \\ 0 & 0{,}0005r & 0{,}95r \end{pmatrix}$ ein Fixvektor $\vec{p}$ existiert. Der Ansatz $M_3 \cdot \begin{pmatrix} E \\ J \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ J \\ W \end{pmatrix}$ führt auf die quadratische Gleichung $-0{,}08455r^2 + 0{,}1845r = 0{,}1$ $\Rightarrow\ r \approx 1{,}0033 \vee r \approx 1{,}1788$ Die zweite Lösung ist im Sachkontext unsinnig, da $0{,}89 \cdot 1{,}1788 > 1$. Die erste Lösung ergibt die Matrix $M_3 \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 0{,}05 & 0{,}8929 & 0 \\ 0 & 0{,}0005 & 0{,}9529 \end{pmatrix}$. $\vec{p} \approx \begin{pmatrix} 60000 \\ 28000 \\ 300 \end{pmatrix}$.	5	5	10
e)	Da sich nur geschlechtsreife Schildkröten fortpflanzen, gilt: $a = b = d = 0$, $c \neq 0$. Jungschildkröten entwickeln sich aus den Eiern oder verbleiben in der „Altersstufe“ *(J)*. Hieraus folgt: $g = h = 0$, $e \neq 0$, $f \neq 0$. Geschlechtsreife Schildkröten entwickeln sich aus den Jungschildkröten oder verbleiben in der „Altersstufe“ *(G)*. Hieraus folgt: $j = m = 0$, $k \neq 0$, $l \neq 0$. Aus analogen Überlegungen zu den alten Schildkröten folgt: $n = p = 0$, $t \neq 0$, $u \neq 0$.		10	5

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>
Zu beachten ist, dass man die Anzahl der Eier halbieren muss, wenn im Bestand Schildkröten beiderlei Geschlechts erfasst wurden. Die übrigen von Null verschiedenen Matrixelemente verändern sich durch die Berücksichtigung der männlichen Schildkröten nicht.

Eine mögliche Lösung ist

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}89 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0005 & 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}02 & 0{,}96 \end{pmatrix}.$$
Das Matrixelement 0,95 besagt, dass 95 % der geschlechtsreifen Schildkröten in dieser Klasse verbleiben. Die übrigen 5 % sind aus dieser Klasse herausgewachsen, sind also gealtert, oder haben das Jahr nicht überlebt. Mithin muss dies beim Vergrößern des Bestandes A berücksichtigt werden.

Bei der Festsetzung der Überlebenswahrscheinlichkeit der alten Schildkröten muss berücksichtigt werden, dass jede solche Schildkröte bereits ein Alter von mindestens 45 Jahren erreicht hat und einige noch weit mehr als 55 Jahre Lebenserwartung haben müssen. Ob nun die jährlich Überlebenswahrscheinlichkeit unter oder über der „Verbleiberate“ von G von 0,95 festgesetzt wird, hängt davon ab, ob man den „Alten“ höhere Sterbewahrscheinlichkeiten z.B. aus „Altersschwäche“ zuschreibt oder nicht.

Ähnliche Überlegungen werden von den Schülerinnen und Schülern erwartet.
</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>45</td><td>25</td></tr>
</table>

STOCHASTIK 1

III.1 Ernährungsstudie

Bei einer bundesweit durchgeführten, repräsentativen Studie im Rahmen der Vorsorgeuntersuchungen wurden die Ernährungsgewohnheiten sowie die Art und Häufigkeit der körperlichen Bewegung von erwachsenen Frauen und Männern im Alter zwischen 35 und 45 Jahren untersucht und mit ihren bei den Vorsorgeuntersuchungen ermittelten Cholesterin-Werten in Beziehung gesetzt.

Zunächst zu den Ernährungsgewohnheiten:

Bei den Männern dieser Altersgruppe gaben 5,5 % der Befragten an, sich vegetarisch zu ernähren.

a) Bestätigen Sie, dass man das Merkmal „Vegetarier" in einer zufällig gezogenen Stichprobe als binomialverteilt annehmen kann; geben Sie Situationen an, bei denen diese Annahme nicht gilt. **(10P)**

Gehen Sie im Folgenden zunächst davon aus, dass das Merkmal „Vegetarier" bei der betrachteten Gruppe von Männern binomialverteilt ist mit $p = 5{,}5\%$.

b)
- In einem Betrieb gehören 125 Männer zu dieser Altersgruppe zwischen 35 und 45 Jahren. Berechnen Sie, wie viele „vegetarische" Männer in dieser Stichprobe zu erwarten sind.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 60 Männern, die in einem Bio-Laden einkauften, genau 10 Männer Vegetarier waren.
  - Interpretieren Sie dieses Ergebnis.
  - Entscheiden Sie, ob man das Merkmal „Vegetarier" auch bei Bio-Laden-Kunden immer noch als binomialverteilt betrachten kann. **(15P)**

c) In einem anderen Betrieb ergab sich, dass sich kein Mann dieser Altersgruppe vegetarisch ernährt hat. Das erscheint erstaunlich.
- Bestimmen Sie, wie viele Männer dieser Altersgruppe höchstens in dem Betrieb sein dürften, damit die Wahrscheinlichkeit, dass kein Mann Vegetarier ist, immerhin noch größer als 5 % ist. **(10P)**

d) Wenn man Werte für eine binomialverteilte Größe mit kleinem p (und hinreichend großem Stichprobenumfang) berechnen möchte, so kann man die so genannte Poissonverteilung zur Näherung verwenden: $P(X = k) \approx \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \cdot e^{-n \cdot p}$.

Gehen wir noch einmal zurück zu dem Betrieb mit den 125 Männern aus Aufgabenteil b).
- Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der Poisson-Näherung gegenüber der Binomialverteilung für das Ereignis, dass unter diesen 125 Männern weniger als drei Vegetarier sind. **(10P)**

Seit der letzten Gesundheitsreform werden im Rahmen der Vorsorgeuntersuchungen von über 35-Jährigen regelmäßig die Cholesterin-Werte (hier die LDL-Werte) im Blut bestimmt; hierfür liegen also statistisch gesicherte Daten vor.

Für die betrachtete Altersgruppe ergibt sich ein LDL-Mittelwert von 165 mg/dl mit einer Standardabweichung von 41 mg/dl.

Grundsätzlich gilt: Je höher der Wert ist, desto höher ist das medizinische Risiko, vor allem für Herzerkrankungen. Die grundlegenden Richtlinien sehen vor, selbst bei Personen ohne spezifische Risikofaktoren (wie Rauchen etc.) bei LDL-Werten oberhalb von 170 mg/dl eine *Änderung des Lebensstils* anzuraten.
Bei LDL-Werten oberhalb von 200 mg/dl wird zusätzlich dringend eine *medikamentöse Therapie* empfohlen.

Im Folgenden ist davon auszugehen, dass die LDL-Werte näherungsweise normalverteilt sind.

e)
- Berechnen Sie unter allen erwachsenen Männern in der erwähnten Altersgruppe den Anteil derer, die ihren „Lebensstil ändern“ sollten.
- Ermitteln Sie, auf wie viele Männer mit dieser Empfehlung einer kommt, dem zusätzlich eine medikamentöse Therapie empfohlen wird.
- Bestimmen Sie die Mindestanzahl von zufällig ausgewählten erwachsenen Männern, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens ein Mann mit der „dringenden Therapieempfehlung“ darunter ist. **(25P)**

f) Der bundesweit vertretene „Verein für Bewegung und gesunde Ernährung (VBE)“ möchte neue Mitglieder mit folgender Behauptung werben:
“Unsere männlichen Mitglieder mittleren Alters haben dank unserer hervorragenden Beratung und Betreuung nach nur einem Jahr Mitgliedschaft einen mittleren LDL-Wert von nur 140 mg/dl!“
Auf Nachfrage teilt der Verein mit, dass die Standardabweichung des LDL-Wertes bei den männlichen Mitgliedern bei 40 mg/dl liegt. Mit kritischen Fragen konfrontiert, sagt die Pressesprecherin des Vereins: „Gut, gehen Sie hin, wählen Sie zehn männliche Mitglieder beliebig aus und bestimmen Sie deren Cholesterin-Wert. Wir ziehen die Behauptung zurück, wenn Sie unter diesen zehn Männern mehr als drei mit einem Wert von über 165 mg/dl finden.“

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Verein seine Behauptung **zu Unrecht** zurückziehen muss. **(15P)**

In der Studie zu Ernährungsgewohnheiten wurde auch nach dem Bekanntheitsgrad von Gütesiegeln für Lebensmittel gefragt. Zum Beispiel kennen rund 67 % der Deutschen das Bioland-Siegel.

g) Gehen wir folgender fiktiver Situation nach:
Um den Bekanntheitsgrad zu steigern, beauftragt der Bioland-Verband eine Werbeagentur mit einer Kampagne. Im Vertragstext heißt es: „Ein Erfolgszuschlag zum Honorar für die Agentur wird fällig, wenn nach der Kampagne statistisch signifikant begründet werden kann, dass der Bekanntheitsgrad des Bioland-Siegels höher als 75 % ist“.
Die Werbeagentur stellt nach der Kampagne bei einer Zufallsbefragung von 128 Personen fest, dass das Biolandsiegel bei 103 Personen bekannt ist, und fordert daraufhin das Erfolgshonorar ein. Der Biolandverband verweigert die Zahlung mit dem Hinweis, dass der Anteil von 75 % nicht signifikant überschritten werde.

- Entscheiden Sie auf der Basis geeigneter Rechnungen, ob die Zahlungsverweigerung berechtigt ist. **(15P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Wenn die einzelnen Mitglieder der Stichprobe untereinander keine Verbindung haben – das ist letztlich der Inhalt von „zufällig gezogen" – und im Zugbereich der Stichprobe der Anteil der „Vegetarier" gleich ist, kann das Ziehen der Stichprobe als Bernoulli-Kette angesehen werden. Sollte die Stichprobe z.B. aus einem Gebiet gezogen werde, in dem der Anteil nicht konstant ist, oder sollten z.B. Mitglieder gewisser Berufe oder Glaubenshaltungen bevorzugt gezogen werden, ist die Annahme der Binomialverteilung schwer zu halten.	10		
b)	• $E = 125 \cdot 0{,}055 = 6{,}875$. Es sind also knapp 7 Vegetarier zu erwarten. • Hier kommt die Formel für die Binomialverteilungen zur Anwendung: $bin(60,10,0.055) = \binom{60}{10} \cdot 0{,}055^{10} \cdot 0{,}945^{50} \approx 0{,}11\%$. Die Wahrscheinlichkeit für **diese** Zahl von Vegetariern liegt also bei etwa 0,1%. Andererseits ist das Ereignis selbst nicht ungewöhnlich. Bio-Läden ziehen verstärkt sich besonders bewusst ernährende und vegetarisch lebende Männer an, so dass 10 von 60 bei dieser Sondergruppe nicht überraschen sollten. Die Gruppe der Männer, die im Bio-Laden einkaufen, hat sicher ebenfalls einen (feststellbaren) Anteil der Vegetarier, der vermutlich deutlich über 5,5% liegt. „Einkauf im Bio-Laden" ist dann auch eine Bernoulli-Kette, wenn man argumentieren kann, dass sich die einzelnen Männer hinreichend wenig kennen und sich gegenseitig nicht beeinflussen.	5	10	
c)	Ansatz über die Gegenwahrscheinlichkeit: $\left(1 - p_{Veg.}\right)^n \geq 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \quad n \leq \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}945} \approx 52{,}96$. Da n ganzzahlig sein soll, dürften dann höchstens 52 Männer in diesem Betrieb sein.		10	
d)	Bestimmt werden sollen $P_{bin}(X \leq 2)$ und $P_{poi}(X \leq 2)$. Es ist jeweils eine Summe von drei Termen zu bilden. Es ergeben sich $P_{bin}(X \leq 2) \approx 0{,}02932$ und $P_{poi}(X \leq 2) \approx 0{,}03256$. Das bedeutet, dass der Wert aus der Poisson-Näherung um etwa 11% über dem exakten Wert liegt.		10	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

- Laut Voraussetzung kann (und soll) die Normalverteilung als Näherung verwendet werden.
Also: $anteil\left(Lebensstil\right)=1-\Phi\left(\frac{170-165}{41}\right)\approx 0{,}4514\approx 45\%$.
- Hier ist der Term $\frac{anteil\left(Therapie\right)}{anteil\left(Lebensstil\right)}$ auszuwerten, also.
$\frac{1-\Phi\left(\frac{200-165}{41}\right)}{1-\Phi\left(\frac{170-165}{41}\right)}\approx\frac{0{,}1966}{0{,}4514}\approx 44\%$
Das bedeutet grob, dass auf fünf Männer mit der Empfehlung, den Lebensstil zu ändern, immerhin (gut) zwei kommen, denen darüber hinaus eine Therapie nahe gelegt werden muss!
- Lösung mit der Gegenwahrscheinlichkeit :
$1-\left(1-p_T\right)^n\geq 0{,}9$
$\Leftrightarrow\left(1-p_T\right)^n\leq 0{,}1$
$\Leftrightarrow\left(\Phi\left(\frac{200-165}{41}\right)\right)^n\leq 0.1$
$\Leftrightarrow 0{,}8034^n\quad\leq 0{,}1$
$\Leftrightarrow n\cdot\lg 0{,}8034\leq\lg 0{,}1$
$\Leftrightarrow n\geq 10{,}5187$.
Also: Die Mindestanzahl liegt bei elf Männern

</td><td>5</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Zunächst muss die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, mit der – unter der Voraussetzung der Behauptungen des VBE – ein Mitglied einen LDL-Wert von über 165 mg/dl hat. Diese bestimmt sich durch $p=1-\Phi\left(\frac{165-140}{40}\right)\approx 0{,}2660$.

Nun ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass unter den zehn Männern mehr als drei Männer „einen hohen LDL-Wert“ aufweisen:
$p_{Beh}=1-bin(10,0,p)-bin(10,1,p)-bin(10,2,p)-bin(10,3,p)\approx 0{,}2626$.
Dies ist die gesuchte Irrtumswahrscheinlichkeit.</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

g) *Die Offenheit der Fragestellung lässt mehrere Vorgehensweisen zu; zu konstruieren ist aber in jedem Fall ein geeigneter Signifikanztest.*

Einseitiger Signifikanztest

Zu testende Hypothesen:

H_0: $p \leq 0{,}75$

H_1: $p > 0{,}75$

$n = 128$.

Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Personen, denen das Bioland-siegel bekannt ist.

Unter der Annahme, dass $p = 0.75$ ist, ergeben sich Erwartungswert und Standardabweichung zu $E = 96$ und $\sigma \approx 4{,}8990$; das Ergebnis der Befragung liegt also etwa 1,5 σ über dem Erwartungswert.

Bei einem Signifikanzniveau von 5% beträgt die kritische Grenze

$$E + 1{,}64\,\sigma \approx 104$$

bzw.:

$$P(X > 104 \mid H_0) \leq P(X > 104 \mid p = 0{,}75)$$

$$= 1 - P(X \leq 104 \mid p = 0{,}75) = 1 - P\left(\frac{X - E + 0{,}5}{\sigma} \leq \frac{8.5}{4{,}899}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi(1{,}7351) \approx 4{,}1\% < 5\%$$

Dagegen gilt:

$$P(X > 103 \mid p = 0{,}75)$$

$$= 1 - P(X \leq 103 \mid p = 0{,}75) = 1 - P\left(\frac{X - E + 0{,}5}{\sigma} \leq \frac{7.5}{4{,}899}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi(1{,}5310) \approx 6{,}3\% > 5\%$$

Es müssten also mehr als 104 Personen das Bioland-Siegel kennen.
Die Nullhypothese ist auf dem 5 %-Signifikanzniveau nicht zu verwerfen. Bioland hätte in diesem Fall Recht, die Zahlung des Erfolgshonorars zu verweigern.

Dies gilt umso mehr, wenn man als Signifikanzniveau 1 % wählt.

Wählt man dagegen 10% als ungewöhnlich hohes Signifikanzniveau, so ergibt sich als kritische Grenze

$$E + 1{,}28\,\sigma \approx 102{,}3.$$

Die Frage ist daher mathematisch nicht eindeutig zu entscheiden, sondern wird nur juristisch zu klären sein.

		I	II	III
g)	(Bewertung)		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15

STOCHASTIK 2

III.2 EURO-Münzen

Der Euro ist die Währung in 15 europäischen Ländern. Jedes Land prägt seine eigenen Münzen, aber alle Münzen sind in allen Euro-Ländern gültig.

Deswegen „bewegen" sich die Münzen im Lauf der Zeit über die Landesgrenzen; überall findet man inzwischen ein Gemisch an Münzen aus den verschiedenen Euro-Ländern.

Diese „Bewegung" lässt sich mit folgendem Ansatz modellieren:

Wenn man nach dem Anteil der Münzen aus einem **Ausland F** an allen im **Inland** kursierenden Münzen fragt und diese Größe a_F nennt, dann ist diese Größe zeitabhängig, und die zugehörige Gleichung lautet

$$(*) \qquad a_F(t) = a_{0,F} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{b}}\right),$$

wobei $a_{0,F}$ den Anteil der Münzen des jeweiligen Landes an der gesamten in Europa geprägten Münzenmenge und t die Zeit (in Jahren) seit Einführung des Euro in Jahren in dem jeweiligen Land bezeichnet. Der Parameter b ist spezifisch für das jeweilige Inland.

Im Folgenden wird die Situation in Deutschland betrachtet. Der Parameter b ist aus den bisherigen Beobachtungen in Deutschland zu $b = 10$ bestimmt worden.
In der Tabelle 1 in der Anlage finden sich die Daten aus den 15 Euro-Ländern für die 1-Euro-Münzen und 2-Euro-Münzen zusammengenommen (für die sogenannten Bimetall-Münzen). Es werden auch <u>nur diese</u> Münzen betrachtet.

a) Beschreiben Sie, warum bei Deutschland in der letzten Spalte kein Wert auftreten kann. Berechnen Sie dennoch den Anteil der deutschen Münzen, die nach diesem Modell in Deutschland kursieren. **(10P)**
(*Zur Kontrolle*: $a_D = 67{,}142\%$)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
A – Wenn Sie drei Münzen aus einem großen Münzhaufen in Deutschland herausnehmen, befindet sich keine italienische darunter.
B – Unter zehn Münzen in Deutschland befinden sich genau sieben deutsche Münzen.
C – Unter fünf Münzen in Deutschland befinden sich genau eine französische und genau eine italienische Münze. **(15P)**

In einer Schulkantine eines Hamburger Gymnasiums wurden in zwei Wochen die Bimetall-Münzen gezählt und den verschiedenen Ausgabeländern zugeordnet. Insgesamt wurden 1000 Münzen gezählt.

c) Begründen Sie, dass gilt:
Das Sortieren der Münzen nach „kommt aus dem Land L“ und „kommt nicht aus dem Land L“ kann als Bernoulli-Kette angesehen werden. **(5P)**

Die tatsächliche Häufigkeitsverteilung der Münzen nach den Ländern findet sich in der Tabelle 2 in der Anlage.

d) Berechnen Sie, welche Häufigkeitsverteilung zu erwarten wäre, wenn sich die Münzen gemäß Tabelle 1 über die gesamte Euro-Zone verteilt hätten.
Tragen Sie diese Werte in Tabelle 2 ein. **(5P)**

e) Betrachten Sie jetzt nur die Münzen aus Frankreich, Italien, den Niederlanden, Österreich und Deutschland.
Bestimmen Sie von diesen diejenigen Länder, bei denen die tatsächliche Anzahl um mehr als drei Standardabweichungen von der erwarteten entfernt liegt.
Begründen Sie, warum die entsprechende Frage z.B. für Luxemburg wenig sinnvoll ist. **(15P)**

f) Bestimmen Sie die minimale Anzahl von Bimetall-Münzen, die die Kantine einnehmen müsste, damit mit einer Sicherheit von 97,7% mindestens eine Münze aus Malta auftaucht, wenn man vom Vorkommen maltesischer Münzen gemäß dem Wert für a_{Malta} aus Tabelle 1 ausgeht. **(10P)**

g) Jetzt geht es um das vorgestellte Modell, das durch Gleichung (*) beschrieben wird.
- Untersuchen Sie die Auswirkungen des Parameters *b* auf die Funktionswerte $a_F(t)$.
  Gehen Sie dabei insbesondere auf den Wertebereich von a_F sowie auf die Auswirkungen ein, wenn *b* groß ist gegenüber dem deutschen *b* (z.B. $b = 25$) oder wenn der Wert klein ist (z.B. $b = 3$).
- Interpretieren Sie die Bedeutung von *b* im Sachkontext.
- Stellen Sie sich vor, die entsprechende Untersuchung zur Münzverteilung würde auch in Luxemburg unternommen.
  Beurteilen Sie, ob sich für Luxemburg in etwa der gleiche Wert für *b* wie in Deutschland ergeben würde – oder ob der Wert wesentlich abweichen müsste.
- In Luxemburg liegt der Anteil belgischer Münzen bei 11 %. Begründen Sie, wieso hiermit das Modell gesprengt wird. **(30P)**

Jedes Land darf pro Jahr eine Ausgabe an 2-Euro-Sondermünzen prägen.
Deutschland hat in den letzten Jahren jeweils 30 Millionen Münzen mit Motiven „Mecklenburg-Vorpommern“, „Schleswig-Holstein“ und „Römische Verträge“ geprägt sowie 30 Millionen mit dem Hamburger Michel. (Nehmen Sie vereinfachend an, dass all diese Münzen bereits bei der Einführung des EURO in Deutschland geprägt worden wären.)

h) Bestimmen Sie die zu erwartende Anzahl von Michel-Sondermünzen in der oben beschriebenen Kantineneinnahme.
Tatsächlich wurden 12 Michel-Münzen gefunden. Beurteilen Sie die Signifikanz dieses Resultats.
Beschreiben Sie einen möglichen Grund für diese Abweichung. **(10P)**

Anlage 1 zur Aufgabe „EURO-Münzen“

Tabelle 1:

Land	Anzahl der hergestellten Bimetall-Münzen in Millionen	Anteil $a_{0,F}$ in Prozent	Einführungs-datum des Euro	a_F (30.6.2008) in Prozent nach Gleichung (*)
Belgien	616	5,098	1.1.2002	2,437
Deutschland	3680	30,454	1.1.2002	*Siehe a)*
Finnland	199,9	1,654	1.1.2002	0,791
Frankreich	1517	12,554	1.1.2002	6,000
Griechenland	363,7	3,010	1.1.2002	1,439
Irland	268,7	2,224	1.1.2002	1,063
Italien	2016,9	16,691	1.1.2002	7,978
Luxemburg	84,6	0,700	1.1.2002	0,335
Malta	24	0,199	1.1.2008	0,010
Niederlande	437,4	3,620	1.1.2002	1,730
Österreich	546,3	4,521	1.1.2002	2,161
Portugal	255,7	2,116	1.1.2002	1,011
Slowenien	51	0,422	1.1.2007	0,059
Spanien	1978,6	16,374	1.1.2002	7,826
Zypern	43,9	0,363	1.1.2008	0,018

Anlage 2 zur Aufgabe „EURO-Münzen“

Tabelle 2:

Land	**Anzahl der Münzen in der Kantinen-Einnahme**	**Erwartungswert (siehe Aufgabenteil d))**
Belgien	19	
Deutschland	733	
Finnland	4	
Frankreich	56	
Griechenland	7	
Irland	6	
Italien	60	
Luxemburg	4	
Malta	0	
Niederlande	28	
Österreich	43	
Portugal	4	
Slowenien	0	
Spanien	36	
Zypern	0	
Gesamt	**1000**	

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Da diese Betrachtung von Deutschland aus unternommen wird, Deutschland von sich selbst nicht Ausland ist, kann die Gleichung (*), die ja die Diffusion aus den Ausländern nach Deutschland beschreibt, nicht verwendet werden.
Der Anteil der deutschen Münzen ist die Differenz von 100 % und der Summe der Anteile der ausländischen Münzen. Er ergibt sich zu $a_D = 67{,}142\%$.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>A: Die Wahrscheinlichkeit für A ergibt sich durch
$p(A) = (1-0{,}07978)^3 \approx 0{,}7792$.
B: B ist ein Fall für die Binomialverteilung:
$p(B) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}67142^7 \cdot 0{,}32858^3 \approx 0{,}2619$.
C: Die Wahrscheinlichkeit für C lässt sich mit folgender Überlegung berechnen: Man zieht die 5 Münzen hintereinander und betrachtet den ganzen Vorgang in (gedanklich) in einem fünfstufigen Baumdiagramm, in dem nur die drei Ereignisse „italienische Münze“, „französische Münze“ und „andere Münze“ vorkommen. Jeder Erfolgspfad hat dann die Wahrscheinlichkeit:
$0{,}06000 \cdot 0{,}07978 \cdot (1-0{,}07978-0{,}0600)^3$.
Nun berechnen wir die Anzahl dieser Erfolgspfade:
Die italienische Münze kann auf einer der fünf „Stufen“ auftreten, die französische dann noch an vier. So ergibt sich:
$p(C) = 5 \cdot 4 \cdot (1-0{,}07978-0{,}0600)^3 \cdot 0{,}07978 \cdot 0{,}06000 \approx 0{,}0609$.
<u>Alternativ:</u> Es gibt $\binom{5}{3}$ Möglichkeiten, welche von den 5 Münzen deutsch sind, danach noch 2 Möglichkeiten, die italienische und die französische auf die beiden verbleibenden zu verteilen. Jede der $\binom{5}{3} \cdot 2 = 20$ Möglichkeiten hat die Wahrscheinlichkeit $(1-0{,}07978-0{,}0600)^3 \cdot 0{,}07978 \cdot 0{,}06000$.</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Da das Herkunftsland zweier beim Sortieren hintereinander befindlicher Münzen voneinander unabhängig ist und da sich der Anteil der Münzen des entsprechenden Landes in der Gesamtmenge praktisch überhaupt nicht ändert, kann der Sortiervorgang als Bernoulli-Kette beschrieben werden.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	Der jeweilige Erwartungswert bestimmt sich durch $E_i = 1000 \cdot p_i$:			

Land	Anzahl der Münzen in der Kantinen-Einnahme	Erwartungswerte
Belgien	19	24,37
Deutschland	733	671,42
Finnland	4	7,91
Frankreich	56	60,00
Griechenland	7	14,39
Irland	6	10,63
Italien	60	79,78
Luxemburg	4	3,35
Malta	0	0,10
Niederlande	28	17,30
Österreich	43	21,61
Portugal	4	10,11
Slowenien	0	0,59
Spanien	36	78,26
Zypern	0	0,18
Gesamt	**1000**	**1000**

Bewertung I: 5

e) Die Abweichung in Standardabweichungen ($\sigma = \sqrt{E \cdot (1-p)}$) berechnet sich mit dem Erwartungswert E und dem tatsächlichen Wert T durch

$$abw = \frac{T - E}{\sqrt{E \cdot (1-p)}} .$$

Dies ergibt folgende Tabelle:

Land	Anteil nach Gleichung (*) in Prozent	Erwartungswert bei $n = 1000$	Sigma	Tatsächliche Münzzahl	Abweichung in Sigma
F	6,000	60,003	7,510	56	–0,53
I	7,978	79,776	8,568	60	–2,31
NL	1,730	17,301	4,123	28	2,59
A	2,161	21,608	4,598	43	4,65
D	67,142	671,440	14,853	733	4,15

Frankreich, Italien und die Niederlande liegen mit ihren Abweichungen innerhalb, Deutschland und Österreich außerhalb des 3-σ-Bereiches.

Letztlich liegt nur Frankreich nahe am Erwartungswert.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Bemerkung: Die italienischen Münzen sind auf „hohem Signifikanzniveau“ zu selten, die niederländischen auf ähnlichem Signifikanzniveau auffällig häufig und die österreichischen extrem häufig. Ebenso liegt der Anteil der deutschen Münzen weit über dem erwarteten Anteil. Man könnte diese Feststellungen im Rahmen einer statistischen Theorie als signifikante Ablehnungen der Nullhypothese „Die Gleichung (*) beschreibt die Realität“ versuchen zu begründen. Dahinter liegt dann aber als Annahme eine Annäherung der realen Binomialverteilung durch eine Normalverteilung. Diese Argumentation wird von den Prüflingen nicht erwartet. Bei Luxemburg ist $E_{LUX} \approx 3{,}346$ und $\sigma_{LUX} \approx 1{,}826$; die Normalverteilungsnäherung ist hier aber nicht sinnvoll (Laplace-Bedingung nicht erfüllt).		15	
f)	Die Aufgabenstellung lässt sich durch folgenden Ansatz über die Gegenwahrscheinlichkeit lösen: $1-(1-p_M)^n \geq 0{,}977 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln 0{,}023}{\ln 0{,}9999}$ Dies ergibt mit dem gerundet angegeben $p_M \approx 1\cdot 10^{-4}$ einen Wert von $n \geq 37721$. Bedenkt man die Rundung bei p_M, so ist die Antwort „ab etwa 38000 Münzen“ sinnvoll.		10	
g)	• Der Parameter *b* tritt im Nenner des Exponenten der *e*-Funktion auf. Bei gleichem *t* bedeutet eine Vergrößerung von *b* also eine Verkleinerung des Betrags des Exponenten; da der Exponent negativ ist, heißt dies, dass der Term $e^{-\frac{t}{b}}$ näher an 1 rückt und damit der Term $1-e^{-\frac{t}{b}}$ näher an Null. Der gesamte Funktionswert wird also – bei konstantem *t* – kleiner. Entsprechend wird der Funktionswert bei kleiner werdendem *b* größer, kann aber nie $a_{0,F}$ überschreiten. • Der Parameter *b* hat die Dimension einer Zeit und gibt die Zeit an, in der der Anteil der ausländischen Münzen eines Landes im Inland auf $\left(1-\frac{1}{e}\right) \approx 63\%$ von $a_{0,F}$ herangekommen ist. Je kleiner *b* ist, desto schneller steigt der Anteil der betrachteten ausländischen Münzen im Inland (bis zum Gesamt-Euroland-Mittelwert $a_{0,F}$), je größer *b* ist, desto langsamer verläuft die „Einwanderung“. • In Luxemburg, als einem kleinen Land mit vier angrenzenden, wesentlich größeren Euroländern, kann man davon ausgehen, dass die ausländischen Münzen wesentlich schneller ins Inland (also nach Luxemburg) kommen und daher eine Durchmischung wesentlich schneller stattfindet: b_{LUX} ist also vermutlich deutlich kleiner.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

- Das durch die Gleichung (*) beschriebene mathematische Verteilungsmodell geht davon aus, dass der Anteil ausländischer Münzen in einem betrachteten Land gegen den Anteil konvergiert, den die Münzen des Auslandes im gesamten Euro-Raum aufweisen: Eine Vergrößerung von $a_F(t)$ über $a_{0,F}$ hinaus ist mit der Gleichung (*) nicht möglich. Damit könnten auch in Luxemburg nicht mehr als 5 % belgische Münzen auftreten.

Tatsächlich gibt es aber in Luxemburg einen doppelt so hohen Anteil belgischer Münzen – die Grenzen des Modells sind hier überschritten.

Den Widerspruch zum Modell liefert auch formell die Umformung der Gleichung $11 = 5{,}098 \cdot \left(1 - e^{-\frac{6}{b}}\right)$. Dies widerspricht den stets positiven Werten der Exponentialfunktion.

Hinweis:
Daraus folgt, dass das Modell mit seiner strikten Trennung von Inland und Ausland (hier) nicht anzuwenden ist – es sei denn, man möchte sagen, dass Belgien für Luxemburg monetär (zumindest teilweise) Inland ist. Das Modell berücksichtigt nicht, dass kleine Euro-Länder von den Münzen ihrer größeren Nachbarn „überschwemmt" werden können.</td><td></td><td>20</td><td>10</td></tr>
<tr><td>h)</td><td>Unter den 3680 Millionen deutschen Bimetallmünzen sind 30 Millionen Michel-Münzen. Das ergäbe einen Erwartungswert von $E = 733 \cdot \frac{30}{3680} \approx 5{,}9755 \approx 6$ Michel-Münzen unter den 733 deutschen Münzen aus der Kantine. Der tatsächliche Wert von 12 Münzen liegt ungefähr $2{,}475\,\sigma \approx 2{,}5\,\sigma$ darüber.

Wegen $\sigma \approx 2{,}4$ ist die Laplace-Bedingung nicht erfüllt, eine einfache Anwendung von σ-Regeln ist also nicht geboten. Von „signifikanter Abweichung nach oben" in einem quantifizierbaren Sinn lässt sich also ohne genauere Rechnung nicht sprechen.

Ein möglicher Grund für eine Abweichung nach oben wäre aber, dass die Michel-Münzen noch nicht weit von ihrer Ausgabestelle, der Landesbank, „gewandert" sind wegen des ja tatsächlich späteren Zeitpunktes ihrer Einführung.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>