

## Analysis 1

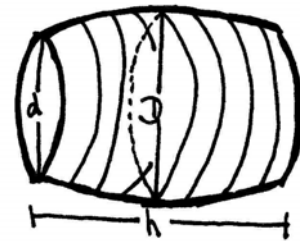
### I.1 Das Gröninger Fass

Das „Gröninger Fass“ (siehe Abbildung) ist ein Riesenweinfass, welches heute im Schloss von Halberstadt zu besichtigen ist. Anfangs betrug das Volumen des „Gröninger Fasses“ ca. 145.000 Liter; durch Eintrocknen des Holzes hat sich sein Fassungsvermögen im Laufe der Jahre verringert. Im Folgenden soll mithilfe *verschiedener Methoden* ein möglichst guter Näherungswert für den Fassinhalt  $V$  bestimmt werden.



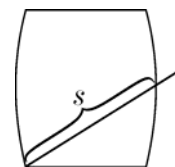
Aktuelle Messungen haben die folgenden Fass-Innenmaße ergeben:

- Innendurchmesser des Grund- und Deckkreises:  $d \approx 4,48$  m
- Innendurchmesser in der Fassmitte:  $D \approx 5,06$  m
- Fasslänge:  $h \approx 7,56$  m



- a) Als obere Schranke für das Fassvolumen kann das ursprüngliche Fassungsvermögen von 145 000 Litern angegeben werden. Berechnen Sie einen Schätzwert für eine *untere* Schranke des Fassvolumens  $V$  des „Gröninger Fasses“, indem Sie das Fass durch einen geeigneten Zylinder annähern. **(10P)**

Früher war es üblich, dass Volumen eines Fasses näherungsweise mit der so genannten *Visiermethode* zu bestimmen: Dazu wurde ein Stab schräg in das Spundloch (Öffnung in der Mitte der gekrümmten Mantellinie des Fasses) bis an den Rand des Bodens gesteckt und die Länge  $s$  des Stabteils innerhalb des Fasses ermittelt (siehe Abbildung). Das Volumen des Fasses wurde dann mit der Formel  $V \approx 0,6 \cdot s^3$  berechnet.



- b) Bestätigen Sie allgemein, dass sich das Volumen eines Fasses näherungsweise mithilfe der angegebenen Formel berechnen lässt: Ersetzen Sie dafür das Fass gedanklich durch einen Zylinder, dessen Durchmesser so groß wie der Durchmesser  $d$  von Grund- und Deckkreis des Fasses ist und dessen Höhe  $h$  doppelt so groß wie  $d$  ist. **(15P)**
- c) Berechnen Sie mithilfe der Visiermethode näherungsweise das Volumen  $V$  des „Gröninger Fasses“ in seiner tatsächlichen Form.  
*Hinweis: Im Gegensatz zu den Berechnungen in Teilaufgabe b) soll hier mit der Höhe  $h$  und einem sinnvollen Durchmesser gerechnet werden, der sich aus  $d$  und  $D$  begründet ergibt.* **(10P)**

Den folgenden Methoden zur Bestimmung des Fassvolumens liegt die Idee zugrunde, ein *liegendes* Fass als Rotationskörper zu betrachten. Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation des Graphen einer Funktion  $g$  im Intervall  $[a, b]$  um die  $x$ -Achse. Das Volumen des Rotationskörpers kann mithilfe der

Formel  $V_{\text{Rotation}} = \pi \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx$  berechnet werden.

- d) Betrachten Sie das „Gröninger Fass“ als Rotationskörper mit einer erzeugenden Funktion  $g$  mit der Gleichung  $g(x) = k \cdot \cos(l \cdot x)$ . Das Koordinatensystem sei dabei so gewählt, dass die Fassmitte im Koordinatenursprung liegt.
- Zeigen Sie, dass die Funktion  $H$  mit der Gleichung  $H(x) = \frac{k^2}{2l} \cdot (\cos(l \cdot x) \cdot \sin(l \cdot x) + l \cdot x)$  eine Stammfunktion von  $g^2$  ist.
  - Bestimmen Sie die Zahlenwerte für  $k$  und  $l$  auf 4 Nachkommastellen genau, so dass der Rand des Fasses durch die Funktion  $g$  beschrieben wird.  
(Ersatzlösung zum Weiterrechnen:  $g_{\text{Ersatz}}(x) = 2,52 \cdot \cos(0,1281 \cdot x)$ )
  - Bestimmen Sie – als Näherung für den Inhalt  $V$  des „Gröninger Fasses“ – das Volumen des Körpers, der bei Rotation des Graphen von  $g$  um die  $x$ -Achse entsteht. **(30P)**

Der Astronom und Mathematiker JOHANNES KEPLER (1571-1630) beschäftigte sich ebenfalls mit Methoden zur Berechnung von Fassinhalten. Bei seinen Überlegungen verwendete er die nach ihm benannte *Keplersche Regel* zur näherungsweise Berechnung von Integralen.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left( f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

(Die Funktion  $f$  wird also näherungsweise durch eine Konstante ersetzt, die ein gewichtetes Mittel aus den Funktionswerten am Rand und in der Mitte ist.)

Ein *beliebiges liegendes* Fass – mit kleinstem Durchmesser  $d$  (an den Rändern) und größtem Durchmesser  $D$  (in der Mitte des Fasses) – werde wiederum als Rotationskörper betrachtet. Das Koordinatensystem sei dabei abermals so gewählt, dass die Fassmitte im Koordinatenursprung liegt. Unter Verwendung der Keplerschen Regel kann man dann zeigen, dass das (Rotations-)Volumen des Fasses mithilfe der folgenden Formel näherungsweise berechnet werden kann:

$$V_{\text{Fass}} \approx \frac{\pi \cdot h}{12} \cdot (d^2 + 2D^2).$$

- e) Berechnen Sie unter Verwendung der angegebenen Formel  $V_{\text{Fass}}$  eine Abschätzung für das Volumen  $V$  des „Gröninger Fasses“. **(5P)**
- f) Weisen Sie – unter Verwendung der Keplerschen Näherung – die Gültigkeit der Näherungsformel  $V_{\text{Fass}}$  nach, wobei Sie das Fass als Rotationskörper einer erzeugenden Funktion  $w$  auffassen. (Hinweis: Die Funktion  $w$  muss nicht explizit bestimmt werden.) **(15P)**

**Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik**

---

Das „Gröninger Fass“ wurde im Jahre 2008 als das älteste erhaltene Riesenweinfass der Welt in das „Guinness-Buch der Rekorde“ eingetragen. Für den Eintrag hat ein Physiker folgenden Bereich für das Fassvolumen bestimmt:  $138,5 \text{ m}^3 \leq V \leq 141,5 \text{ m}^3$ .

- g) • Vergleichen Sie die in a), c), d) und e) gewählten Methoden zur Bestimmung des Fassinhaltes im Hinblick auf die folgenden drei Aspekte:
- Aufwand für die durchzuführenden Messungen,
  - Rechenaufwand,
  - Genauigkeit.
- Beurteilen Sie abschließend, welche der Methoden am besten zur Volumenbestimmung des „Gröninger Fasses“ geeignet ist. **(15P)**

**Erwartungshorizont**

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Legt man einen Zylinder mit einem Grundflächenradius von 2,24 m und einer Höhe von 7,56 m in das Weinfass, so erhält man eine untere Schranke für das Fassvolumen:</p> $V_{\text{Zylinder}_2} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot (2,24)^2 \cdot 7,56 \approx 120.000$ <p>Das Fassvolumen liegt somit zwischen 120.000 Liter und 145.000 Liter.</p>	10		
b)	<p>Das Fass wird durch einen Zylinder ersetzt, dessen Höhe <math>h</math> doppelt so groß wie der Durchmesser <math>d</math> der Grundfläche ist: <math>h = 2 \cdot d</math>. Für das Volumen dieses Zylinders gilt <math>V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot 2d = \frac{\pi}{2} \cdot d^3</math>.</p> <p>Für die Länge <math>s</math> vom Spundloch in die tiefste Bodenecke gilt unter Anwendung des Satzes von Pythagoras: <math>s^2 = 2 \cdot d^2</math>, also <math>d = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot s</math>. Damit erhält man für das Zylindervolumen (als Näherung für das Fassvolumen):</p> $V_{\text{Zylinder}} = \frac{\pi}{4 \cdot \sqrt{2}} \cdot s^3 \approx 0,6 \cdot s^3.$		15	
c)	<p>Es liegt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten <math>\frac{h}{2}</math> und <math>\frac{D}{2} + \frac{d}{2}</math> vor. Die Länge <math>s</math> des Stabteils innerhalb des Fasses kann mithilfe des Satzes von Pythagoras bestimmt werden. Demnach gilt:</p> $s^2 = (4,77)^2 + (7,56 : 2)^2, \text{ also } s = \sqrt{(4,77)^2 + (3,78)^2} \approx 6,086$ <p>Für das Fassvolumen ergibt sich damit <math>V_{\text{Visierformel}} = 0,6 \cdot s^3 \approx 135,3 \quad [m^3]</math></p> <p>Bestimmt man das Fassvolumen mittels der Visiermethode, so erhält man ein Volumen von ca. 135.300 Liter.</p>	10		

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Zu zeigen ist: <math>H'(x) = g^2(x) = k^2 \cdot \cos^2(l \cdot x)</math>. Mithilfe der Produkt- und der Kettenregel folgt:  <math display="block">H'(x) = \frac{k^2}{2l} \cdot (-l \cdot \sin(l \cdot x) \cdot \sin(l \cdot x) + l \cdot \cos(l \cdot x) \cdot \cos(l \cdot x) + l)</math> <math display="block">= \frac{k^2}{2l} \cdot l \cdot (-\sin^2(l \cdot x) + \cos^2(l \cdot x) + 1)</math> <p>Mit dem „Pythagoras der Trigonometrie“ (<math>\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1</math> und der daraus folgenden Gleichung <math>-\sin^2(x) = -1 + \cos^2(x)</math>) folgt:  <math display="block">H'(x) = \frac{k^2}{2l} \cdot l \cdot (-1 + 2\cos^2(l \cdot x) + 1) = k^2 \cdot \cos^2(l \cdot x)</math> <p>Also ist <math>H</math> eine Stammfunktion von <math>g^2</math>.</p> </p></li> <li>Da die Fassmitte im Koordinatenursprung liegt, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:  <math display="block">g(0) = 2,53 \quad \text{I.}</math> <math display="block">g(3,78) = 2,24 \quad \text{II.}</math> <math display="block">g(-3,78) = 2,24 \quad \text{III.}</math> <p>Aus Bedingung I folgt unmittelbar <math>k = 2,53</math>.  Aus II. folgt dann <math>2,53 \cdot \cos(l \cdot 3,78) = 2,24</math> und daraus folgt  <math display="block">l = \cos^{-1}(2,24 : 2,53) : 3,78 \approx 0,1279</math> <p>Bedingung III ist aufgrund der Achsensymmetrie des Graphen von <math>g</math> ebenfalls erfüllt. Die Funktionsgleichung lautet also: <math>g(x) = 2,53 \cdot \cos(0,1279 \cdot x)</math>.</p> </p></li> <li>Das Fass wird als Rotationskörper betrachtet, welcher durch Rotation des Graphen von <math>g</math> im Intervall <math>[-3,78 ; 3,78]</math> um die <math>x</math>-Achse entsteht. Das Volumen des Rotationskörpers berechnet sich demnach durch:  <math display="block">V_{\text{Rotation}} = \pi \cdot \int_{-3,78}^{3,78} (g(x))^2 dx</math> <p>Aufgrund der Achsensymmetrie des Graphen von <math>g</math> gilt:  <math display="block">V_{\text{Rotation}} = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{3,78} 2,53^2 \cdot \cos^2(0,1279 \cdot x) dx</math> <p>Mithilfe der obigen Betrachtungen lässt sich eine Stammfunktion <math>G</math> von <math>g^2</math> angeben:  <math display="block">G(x) = 2,53^2 \cdot 0,5 \cdot (\cos(0,1279 \cdot x) \cdot \sin(0,1279 \cdot x) + 0,1279 \cdot x) : 0,1279</math> <p>Somit ergibt sich für das Volumen:  <math display="block">V_{\text{Rotation}} = 2 \cdot \pi \cdot (G(3,78) - G(0)) \approx 140,721</math> <p>Betrachtet man das „Gröninger Fass“ als Rotationskörper mit erzeugender Funktion <math>g</math>, so erhält man als Näherungswert für das Fassvolumen 140.700 Liter.  Die Ersatzfunktion liefert den Wert: <math>V_{\text{RotationErsatz}} \approx 139,578 \text{ [m}^3\text{]}</math>.</p> </p></p></p></li> </ul>			
			30	

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	<p>Mithilfe der Formel ergibt sich als Näherungswert für das Fassvolumen:</p> $V \approx \pi \cdot \frac{7,56}{12} \cdot ((4,48)^2 + 2 \cdot (5,06)^2) \approx 141,073$ <p>Das Fass hat nach diesem Ansatz ein Volumen von ca. 141.073 Litern.</p>	5		
f)	<p>Das Fass wird als Rotationskörper betrachtet, welcher durch Rotation des Graphen einer Funktion <math>w</math> im Intervall <math>[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}]</math> um die <math>x</math>-Achse entsteht.</p> <p>Das Volumen des Fasses berechnet sich dann durch das Volumen eines Rotationskörpers: <math>V_{\text{Rotation}} = \pi \cdot \int_{-h/2}^{h/2} (w(x))^2 dx</math>.</p> <p>Zur Berechnung des Integrals wird die Keplersche Näherung herangezogen.</p> $V_{\text{Rotation}} = \frac{h}{6} \cdot \left( w^2\left(-\frac{h}{2}\right) + 4 \cdot w^2(0) + w^2\left(\frac{h}{2}\right) \right)$ <p><i>Anmerkung:</i> Zu beachten ist, dass die Keplersche Regel (üblicherweise Keplersche Fassregel genannt) einen Näherungswert für ein Integral liefert und nicht – wie man fälschlicherweise aus dem Namen der Regel schließen könnte – für das Volumen eines Fasses.</p> <p>Bei Verwendung der Keplerschen Näherung zur näherungsweise Berechnung eines Integrals werden nur die Funktionswerte der Integrandenfunktion (hier <math>w^2</math>) an den Intervallrändern (hier <math>-\frac{h}{2}</math> und <math>\frac{h}{2}</math>) und in der Mitte des Intervalls (hier 0) benötigt. Diese Funktionswerte können angegeben werden: Damit die Funktion <math>w</math> den Rand des Fasses beschreibt muss gelten:</p> $w(0) = \frac{D}{2} \text{ und } w\left(-\frac{h}{2}\right) = w\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{d}{2}.$ <p>Also: <math>w^2(0) = \frac{D^2}{4}</math> und <math>w^2\left(-\frac{h}{2}\right) = w^2\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{d^2}{4}</math>.</p> <p><i>Anmerkung:</i> Eine Bestimmung des Funktionsterms von <math>w</math> ist daher nicht erforderlich.</p> <p>Mithilfe der Keplerschen Näherung folgt nun für das Volumen des Rotationskörpers:</p> $V_{\text{Rotation}} \approx \pi \cdot \frac{h}{6} \cdot \left( \frac{d^2}{4} + 4 \cdot \frac{D^2}{4} + \frac{d^2}{4} \right) = \pi \cdot \frac{h}{12} \cdot (d^2 + 2D^2)$			15

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

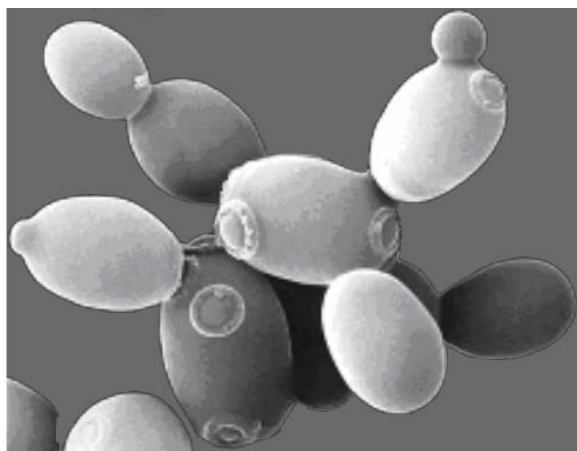
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
g)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Vergleich in Hinblick auf Messaufwand: Bei der Visiermethode c) benötigt man nur eine Messung, die auch relativ leicht durchzuführen ist. Für die Abschätzung in a) benötigt man dagegen die Höhe <math>h</math> und den Durchmesser <math>d</math>. Die Messungen werden dadurch erschwert, dass man die Fassinnenmaße benötigt. Für die Methoden d) und e) wird zusätzlich noch der Durchmesser <math>D</math> (innen) benötigt.</li> <li>Vergleich in Hinblick auf Rechenaufwand: Der Rechenaufwand bei Methode a), c) und e) ist gering, da man die Messwerte jeweils nur in eine Formel einsetzen muss. Für Methode d) ist dagegen zunächst eine Funktion, die den Umriss des Fasses beschreibt anzugeben und danach das entsprechende Integral zu berechnen.</li> <li>Vergleich in Hinblick auf Genauigkeit: Die Methoden liefern folgende Näherungswerte: a) <math>120 \text{ m}^3</math>, c) <math>135,3 \text{ m}^3</math>, d) <math>140,7 \text{ m}^3</math>, e) <math>141,1 \text{ m}^3</math>. Vergleicht man diese mit der Volumenangabe des Physikers (<math>140 \pm 1,5 \text{ m}^3</math>), so erkennt man, dass der Wert aus a) eine nur sehr grobe Abschätzung liefert. Der Wert aus c) liegt auch nicht im angegebenen Intervall. Die Werte aus d) und e) liegen dagegen im angegebenen Intervall.</li> <li>Abschließende Beurteilung: Die Methoden in a) und c) liefern zu schlechte Werte. Die Visiermethode ist grundsätzlich zu hinterfragen, da die Visierlänge <math>s</math> für unterschiedlich geformte Fässer mit verschiedenen Fassinhalten gleich sein kann. Methode d) und e) benötigen den gleichen Messaufwand und liefern – bezogen auf das „Gröninger Fass“ – ähnliche Werte. Bei Methode e) liegt eine Verfeinerung mithilfe weiterer Messwerte nahe. Auf diese Weise könnte eine Funktion (z. B. eine ganzrationale Funktion) bestimmt werden, die den Rand des Fasses genauer beschreibt und somit zu genaueren Werten führt. Der Rechenaufwand ist bei Methode e) jedoch größer.</li> </ul> <p><i>Anmerkung: Auch andere schlüssige und sinnvolle Vergleiche und Beurteilungen können als korrekt gewertet werden.</i></p>			
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

## Analysis 2

### I.2 Hefewachstum

Die Zellen eines Hefestammes wachsen in einem Kulturmedium ohne störende Einflüsse um 22 % pro Stunde.

- a) Gehen Sie vom Anfangswert  $a = 100$  mg zum Zeitpunkt  $t = 0$  (Stunden) aus. Geben Sie eine Funktion an, die das Wachstum beschreibt, und berechnen Sie die Zeitdauer, bis sich die Anfangsmenge verzehnfacht hat. **(10P)**



Lebensmittelchemiker erforschen, wie Alkohol die Entwicklung von Hefe hemmt. Zur Untersuchung dieses Einflusses setzen sie einer Hefekultur vom Anfang der Untersuchung an kontinuierlich Alkohol zu, d. h. ab dem Zeitpunkt  $t = 0$  (Stunden).

Die Hefe wird mit ansteigendem Alkoholgehalt im Nährmedium zunehmend vergiftet.

Zur Beschreibung der Masse  $m$  der Kultur in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  wird eine Differentialgleichung mit den positiven Konstanten  $w$  – Wachstumsfaktor,  $h$  – Hemmungsfaktor und  $a$  – Anfangswert vorgeschlagen:

$$m'(t) = (w - h \cdot t) \cdot m(t) \quad ; \quad m(0) = a \quad \text{Differentialgleichung 1}$$

- b) Bestätigen Sie, dass  $m(t) = a \cdot e^{wt - \frac{1}{2}ht^2}$  die Differentialgleichung 1 löst, die das Hefewachstum beschreibt. **(5P)**
- c) Begründen Sie die Wahl dieser Differentialgleichung 1 im Zusammenhang des oben dargestellten Sachkontextes. **(15P)**
- d) In einer Versuchsreihe ist der Anfangswert  $a = 100$  mg, der Wachstumsfaktor  $w = 0,3$  und der Hemmungsfaktor  $h = 0,03$ . Bestimmen Sie unter diesen Voraussetzungen den Extrempunkt im Verlauf der Hefeentwicklung und zeichnen Sie den Graphen von  $m$  im Intervall  $[0; 30]$  in das gegebene Koordinatensystem in der Anlage. **(20P)**

*Hinweis: Mit dem dort bereits dargestellten Graphen wird sich Aufgabe f) beschäftigen.*

- e) Ermitteln Sie bei festen Werten für  $a$  ( $= 100$  mg) und  $w$  ( $= 0,3$ ) den Extrempunkt der Hefemasse-Funktion  $m$  in Abhängigkeit von  $h$ . Zeigen Sie, dass die Extrempunkte auf dem Graphen von  $e(t) = 100 \cdot e^{0,15t}$  liegen und skizzieren Sie diesen Graphen in das vorgegebene Koordinatensystem in der Anlage. Beschreiben Sie ausgehend von der Skizze die Wirkung des Hemmungsfaktors  $h$  auf die maximale Masse der Hefekultur. **(20P)**



**Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik**

---

Hefezellen in einem Weinfass vergären unter Luftabschluss Zucker zu Alkohol. Der Alkohol wird also nicht zugesetzt, sondern von der Hefe selbst erzeugt. Mit zunehmendem Wachstum der Hefe steigt auch die Alkoholproduktion, was zu einer zunehmenden Selbstvergiftung führt. Die folgende Differentialgleichung soll diese Selbstvergiftung berücksichtigen,  $s$  bezeichnet dabei die Masse der Hefekultur (mit Selbstvergiftung). Die Zeit  $t$  wird in Stunden gemessen.

$$s'(t) = (w - h \cdot e^{wt}) \cdot s(t) \quad ; \quad s(0) = a \quad \text{Differentialgleichung 2}$$

- f) Setzen Sie voraus, dass die Lösungen der Differentialgleichung 2 von der Form  $s(t) = d \cdot e^{wt - \frac{h}{w} \cdot e^{wt}}$  sind, und bestimmen Sie  $d$  in Abhängigkeit von  $a$ ,  $w$  und  $h$ .

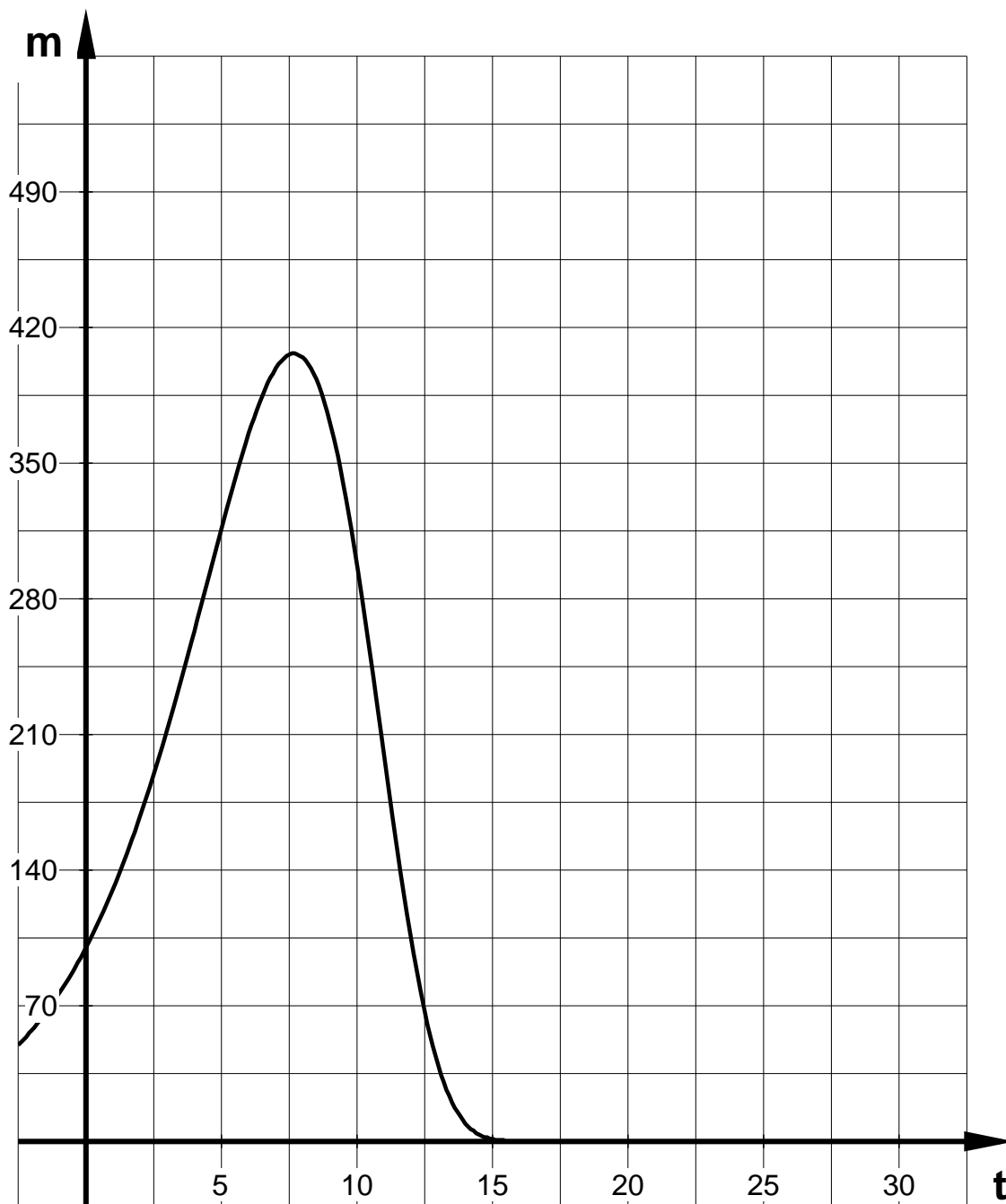
Im Koordinatensystem in der Anlage ist der Graph für  $a = 100$  mg,  $w = 0,3$ ,  $h = 0,03$  und  $d = 110,5$  vorgegeben.

Interpretieren Sie im Vergleich die Verläufe der Hefeentwicklungen bei den beiden verschiedenen Modellannahmen aus den Teilaufgaben d) und f). **(15P)**

- g) Es ist klar, dass die Maxima der Masse von Hefekulturen bei der zweiten Modellierung entscheidend durch den Wachstumsfaktor  $w$  und die Hemmungskonstante  $h$  bestimmt sind. Zeigen Sie:

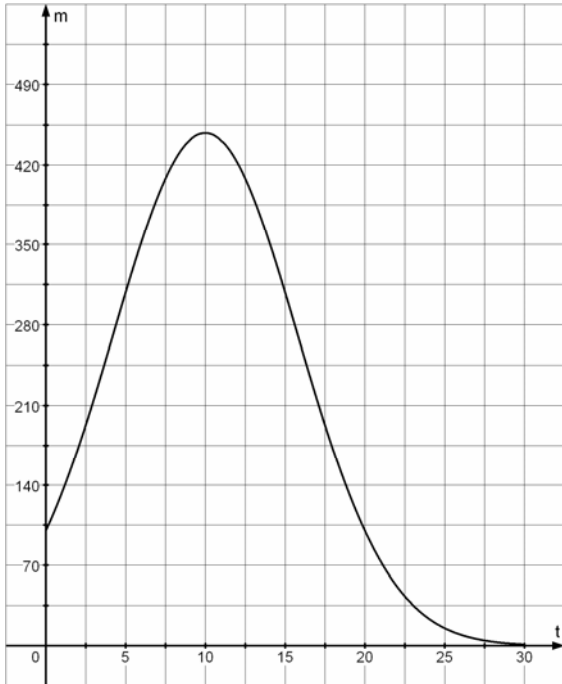
Das Maximum der Hefemasse  $s$  hängt nur vom Startwert  $a$  und dem Quotienten  $c = \frac{w}{h} > 0$  ab und beträgt immer  $a \cdot c \cdot e^{\frac{1}{c} - 1}$ . **(15P)**

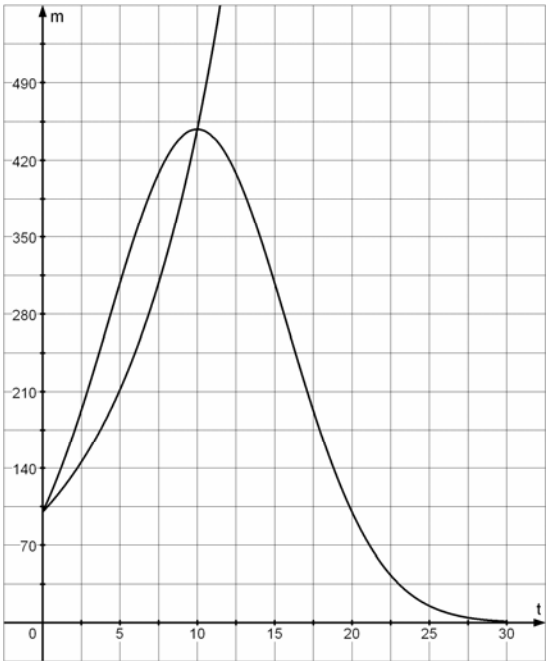
**Anlage zur Aufgabe „Hefewachstum“**



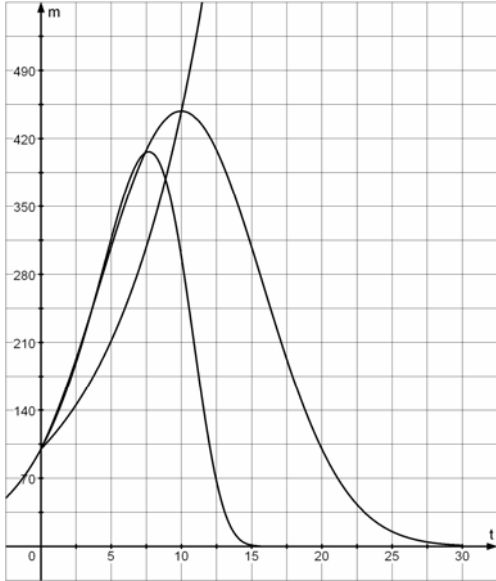
## Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Die Zellen wachsen in gleichen Zeiten um den gleichen Faktor. Das Wachstum wird daher durch eine Exponentialfunktion gut modelliert.</p> $h(t) = 100 \cdot 1,22^t = 100 \cdot e^{\ln(1,22) \cdot t} \approx 100 \cdot e^{0,1989 \cdot t}$ <p>Jede dieser Darstellungen ist als richtig zu bewerten.</p> <p>Zu lösen ist z. B. die Gleichung</p> $100 \cdot 1,22^t = 1000$ $1,22^t = 10$ $t \cdot \ln 1,22 = \ln 10$ $t = \frac{\ln 10}{\ln 1,22} \approx 11,6$ <p>Nach ca. 11,6 h hat sich die Anfangsmenge verzehnfacht.</p>	10		
b)	<p>Es ist zu prüfen, ob die Differentialgleichung 1 mit dem Anfangswert <math>a</math> durch die Massenfunktion <math>m(t) = a \cdot e^{w \cdot t - \frac{1}{2} h \cdot t^2}</math> erfüllt wird:</p> $m'(t) = a \cdot e^{w \cdot t - \frac{1}{2} h \cdot t^2} \cdot (w - h \cdot t) = (w - h \cdot t) \cdot m(t) \quad \text{und} \quad m(0) = a \cdot e^0 = a$	5		
c)	<p>Exponentielles Wachstum ohne Hemmung wird durch Differentialgleichungen der Form <math>f'(x) = c \cdot f(x)</math> – hier <math>m'(t) = w \cdot m(t)</math> – beschrieben.</p> <p>Der Alkohol wird gleichmäßig – proportional zur Zeit <math>t</math> – zugesetzt und die Hefe wird gemäß dem Alkoholgehalt zunehmend vergiftet, d. h. der Alkohol bewirkt „negatives“ Wachstum, wobei der Betrag dieses Faktors proportional mit der Zeit steigt.</p> <p>Die beiden Vorgänge überlagern sich. Man könnte auch sagen, dass der Wachstumsfaktor <math>w</math> pro Zeiteinheit um <math>h \cdot t</math> fällt.</p> <p>Damit ergibt sich die Modellierung mit der Differentialgleichung 1.</p>		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	<p>Die 1. Ableitung ist durch die Differentialgleichung gegeben, spezielle Werte für die Konstanten werden eingesetzt:</p> $m'(t) = (0,3 - 0,03t) \cdot 100 \cdot e^{0,3t - \frac{1}{2} \cdot 0,03 \cdot t^2}$ <p>Zur Berechnung von Extrempunkten der Kulturentwicklung werden Nullstellen dieser 1. Ableitung gesucht. Da die Exponentialfunktion solche nicht besitzt, gilt:</p> $m'(t) = 0 \Leftrightarrow 0,3 - 0,03t = 0 \Leftrightarrow t = 10$ <p>Nur 10 ist eine mögliche innere Extremstelle. Zur weiteren Klärung wird die zweite Ableitung berechnet:</p> $m''(t) = 100 \cdot \left( -0,03 \cdot e^{0,3t - \frac{1}{2} \cdot 0,03 \cdot t^2} + (0,3 - 0,03 \cdot t)^2 \cdot e^{0,3t - \frac{1}{2} \cdot 0,03 \cdot t^2} \right)$ $= 100 \cdot e^{0,3t - \frac{1}{2} \cdot 0,03 \cdot t^2} \cdot (-0,03 + (0,3 - 0,03 \cdot t)^2)$ $m''(10) = 100 \cdot e^{0,3 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 0,03 \cdot 10^2} \cdot (-0,03) < 0$ <p>Mit <math>m'(10) = 0 \wedge m''(10) &lt; 0</math> folgt, dass <math>t = 10</math> eine Maximalstelle ist.</p> <p>Das Maximum beträgt <math>m(10) = 100 \cdot e^{0,3 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 0,03 \cdot 10^2} = 100 \cdot e^{3 - 1,5} \approx 448</math>.</p> <p>Die Kultur erreicht also nach 10 Stunden ihre maximale Masse von ca. 448 mg.</p> <p><i>Hinweis: Ob sich an der Stelle <math>t = 10</math> tatsächlich ein Extremum befindet und welcher Art es ggf. ist, kann auch auf anderen Wegen geklärt und begründet werden.</i></p> 	5	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	<p>Der allgemeine Ansatz zur Berechnung des Extrempunktes der Hefemasse geht von der notwendigen Bedingung für lokale Extrema – Nullstelle der 1. Ableitung – aus:</p> <p>Aus <math>m'(t) = (0,3 - h \cdot t) \cdot m(t) = 0 \Leftrightarrow 0,3 - h \cdot t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{0,3}{h}</math> ergibt sich für das</p> <p>Extremum <math>m\left(\frac{0,3}{h}\right) = 100 \cdot e^{0,3 \cdot \frac{0,3}{h} - \frac{1}{2} h \left(\frac{0,3}{h}\right)^2} = 100 \cdot e^{\frac{0,045}{h}}</math>.</p> <p><i>Ein erneuter Nachweis der Maximaleigenschaft ist überflüssig. Die Rechnung wäre praktisch identisch mit der in Teil d).</i></p> <p><i>Anmerkung: Wenn in d) keine entsprechende Argumentation vorgenommen wurde, muss sie an dieser Stelle erfolgen.</i></p> <p>Die Hochpunkte sind also <math>\left(\frac{0,3}{h} \mid 100 \cdot e^{\frac{0,045}{h}}\right)</math>.</p> <p>Die Ortskurve der Hochpunkte erhält man z. B. durch die folgende Rechnung:</p> <p><math>t = \frac{0,3}{h} \Leftrightarrow h = \frac{0,3}{t}</math>, eingesetzt <math>100 \cdot e^{\frac{0,045}{\frac{0,3}{t}}} = 100 \cdot e^{0,15 \cdot t}</math>, also <math>e(t) = 100 \cdot e^{0,15 \cdot t}</math>.</p>  <p>Die Ortskurve ist mit der Variablen <math>t = \frac{0,3}{h}</math> gezeichnet.</p> <p><math>t</math> ist umgekehrt proportional zu <math>h</math>. Die Funktionsgleichung und die Grafik zeigen das exponentielle Wachstum der maximalen Masse in Abhängigkeit von <math>t</math>.</p> <p>Die maximale Masse der Hefekultur nimmt also bei fallendem Hemmungsfaktor und sonst unveränderten Konstanten exponentiell zu.</p>			
			15	5

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	<p>Es ist die folgende Gleichung für <math>d</math> zu lösen:</p> $s(0) = a = d \cdot e^{0 - \frac{h}{w} \cdot 0} = d \cdot e^{-\frac{h}{w}} \Rightarrow d = a \cdot e^{\frac{h}{w}}$  <p>Bei gleichen Parametern zeigt sich ein deutlich geringerer Maximalwert und eine viel frühere und steilere Abnahme der Masse. Beide Effekte erklären sich durch die stark zunehmende Selbstvergiftung der Hefe.</p>		15	
g)	<p>Die (einzige) Nullstelle der 1. Ableitung der Masse-Funktion <math>s</math> (mit Selbstvergiftung) ergibt sich aus: <math>s'(t) = (w - h \cdot e^{wt}) \cdot s(t) = 0 \Rightarrow w - h \cdot e^{wt} = 0 \Leftrightarrow \frac{w}{h} = e^{wt}</math></p> <p>Setzt man <math>c = \frac{w}{h}</math> gilt also: <math>c = e^{wt} \Leftrightarrow \ln(c) = w \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{\ln(c)}{w}</math>.</p> <p>Damit folgt für das Extremum:</p> $s\left(\frac{\ln(c)}{w}\right) = a \cdot e^{\frac{1}{c}} \cdot e^{\ln(c) - \frac{1}{c} \cdot \ln(c)} = a \cdot e^{\frac{1}{c}} \cdot e^{\ln(c) - 1} = a \cdot e^{\frac{1}{c}} \cdot c \cdot e^{-1} = a \cdot c \cdot e^{\frac{1}{c} - 1}$ <p>Allein aus dem Sachzusammenhang folgt, dass es sich um eine Maximalstelle handeln muss. Auch aus dem Funktionsterm ist diese Tatsache klar, da der Exponent genau einen Extrempunkt hat und die <math>e</math>-Funktion streng monoton wächst. Die maximale Masse der Hefekultur ist bestimmt durch den Startwert <math>a</math> und den Quotienten <math>\frac{\text{Wachstumsfaktor } w}{\text{Hemmungsfaktor } h}</math>.</p> <p><i>Hinweis: Die Tatsache „Maximum“ muss nicht untersucht werden.</i></p>			15
Insgesamt 100 BWE		20	60	20

## II.1 Wassertank

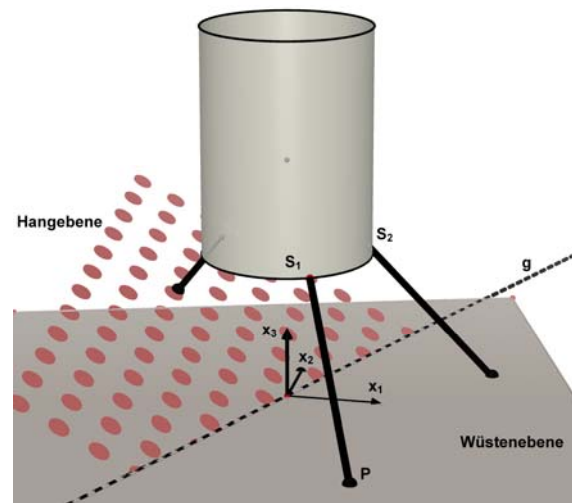
An einem Berghang in einer Wüste steht ein Wassertank auf drei geradlinigen Stützen. Der Tank besteht aus einem 10 m hohen Zylinder.

Die Stützen sind in dem zum Teil felsigen Boden der Wüste verankert.

(Die Abbildung ist nicht maßstabsgetreu.)

Der Hang liegt in der Ebene  $H$ , die von den Punkten  $H_1(-1|2|1)$ ,  $H_2(1|-6|-2)$  und  $H_3(10|5|-4)$  aufgespannt wird. Eine Einheit entspricht 1 Meter.

Die waagerechte Wüstenebene  $E$  sei die  $x_1$ - $x_2$ -Ebene.



- a)
- Bestätigen Sie, dass für die Koordinatengleichung der Ebene  $H$  gilt:  $49x_1 - 23x_2 + 94x_3 = -1$ .
  - Berechnen Sie den Neigungswinkel  $\beta$ , den die Hangebene bezüglich der Wüstenebene hat.
  - Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Schnittgeraden  $g$  der Ebenen  $E$  und  $H$ . **(25P)**

Die Stützen des Tanks sind in den Punkten  $S_1(1|-2|4)$ ,  $S_2(2|1|4)$  und  $S_3(-2|1|4)$  am Zylinder befestigt. Diese Ansatzpunkte liegen auf dem Rand der kreisförmigen Grundfläche des Tanks mit dem Mittelpunkt  $M(0|0|4)$ . Die gedachten Verlängerungen der Stützen treffen sich im Inneren des Zylinders im Punkt  $T(0|0|6,5)$ .

- b)
- Bestätigen Sie, dass die Grundfläche des Tanks den Radius  $\sqrt{5}$  m hat.
  - Zwei der drei Stützen sind in der Wüstenebene im Erdreich verankert, die dritte im Hang. Bestimmen Sie für die Stütze, die in  $S_1$  am Tank ansetzt, die Länge  $l$  zwischen  $S_1$  und dem Durchstoßpunkt  $P$  der Stütze in der Ebene  $E$  (siehe Abbildung).
  - Untersuchen Sie, ob es senkrecht unterhalb des Mittelpunktes  $M$  der Grundfläche einen Punkt gibt, der auf beiden Ebenen  $E$  und  $H$  liegt. **(20P)**
- c) Der 10 m hohe Zylinder des Wassertanks soll durch eine Kugel gleichen Volumens ersetzt werden. Die Kugel wird auf die alten Stützen gesetzt, deren Lage nicht verändert wird. Die Ingenieure wollen wissen, wie sich der Abstand des Tanks zur Wüstenebene verändert. Ermitteln Sie, wie nahe die Kugel der Wüstenebene  $E$  kommt. **(15P)**

**Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik**

---

Der Wassertank soll auf kürzestem Wege von der Stadt El Paso ( $31,50^\circ\text{N}$  und  $106,30^\circ\text{W}$ ) über eine Straße erreichbar sein.

- d) Ermitteln Sie die Länge der Straße  $s$  auf der Erdoberfläche zwischen der Stadt El Paso und dem Wassertank ( $27,40^\circ\text{N}$  und  $105,50^\circ\text{W}$ ).

Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass die Erde eine ideale Kugel mit dem Radius  $6370$  km ist.

(Die Zwischenergebnisse sind auf vier Nachkommastellen gerundet zu nutzen.) **(20P)**

Die Straßenbauarbeiten müssen zum Teil in unwegsamem Gelände durchgeführt werden. Ingenieure und Arbeiter sind hier auf die GPS-Navigation angewiesen.

Die Navigation mit Hilfe des GPS verläuft im flachen Gelände problemlos. Jedoch im Gebirge oder in engen Straßenschluchten der Großstädte kann das GPS-Gerät die Verbindung zu einigen Satelliten verlieren, da hier die Satelliten erst ab einem gewissen Höhenwinkel  $\gamma$  (siehe die *nicht* maßstabsgerechte Abbildung im Anhang) für den GPS-Empfänger „sichtbar“ sind.

24 Navigationsatelliten bewegen sich in einem Abstand  $h = 20000$  km zur Erdoberfläche.

Im Folgenden nehmen wir an, dass diese Satelliten nahezu gleichmäßig auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius  $r$  um den Erdmittelpunkt  $M$  verteilt sind. Der Erdradius beträgt  $R = 6370$  km.

Für den Inhalt  $A_{\text{Teil}}$  des Oberflächenanteils eines Kugelsegments (einer Kugelkalotte) gilt:

$$A_{\text{Teil}} = 2\pi r^2 \cdot \left(1 - \cos \frac{\beta}{2}\right).$$

Der Winkel  $\beta$  ist der Öffnungswinkel, der vom Mittelpunkt gemessen wird.

(Siehe die nicht maßstabsgerechte Abbildung im Anhang.)

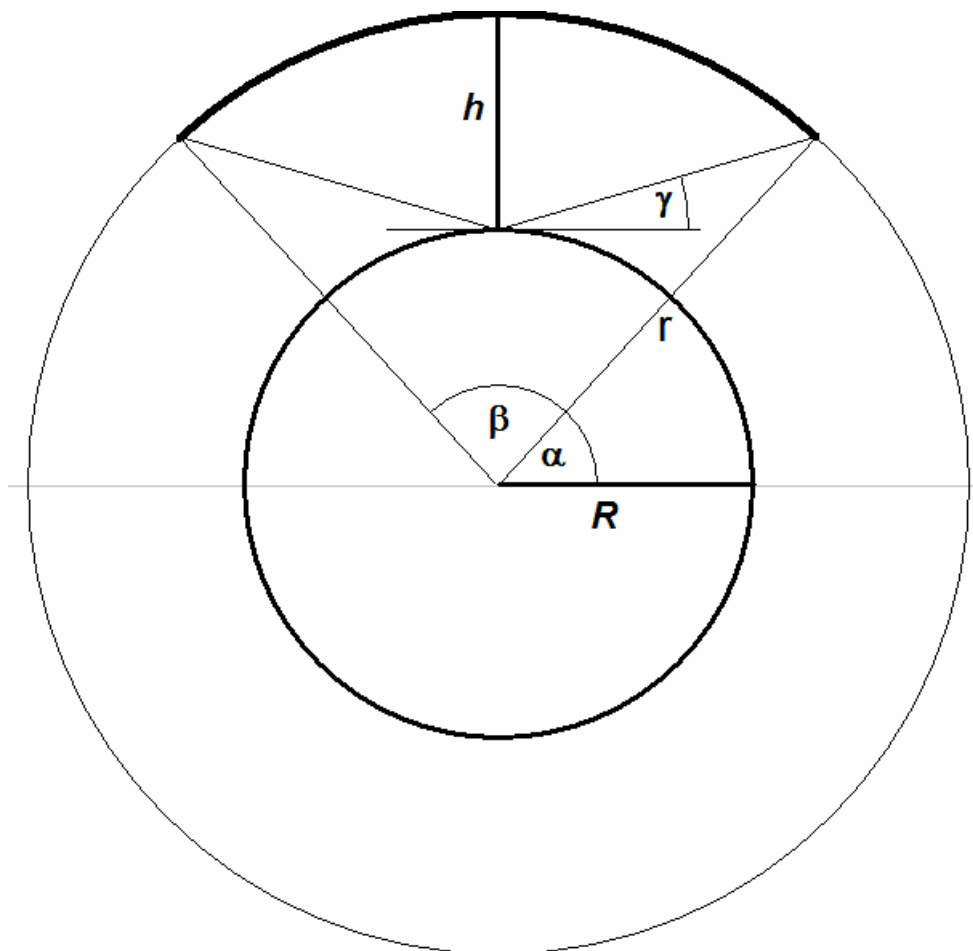
In unserer Situation ist es sinnvoller, den Winkel  $\alpha$  zu betrachten,

- e) • Weisen Sie nach, dass auch gilt:  $A_{\text{Teil}} = 2\pi r^2 \cdot (1 - \sin \alpha)$
- Weisen Sie dann nach, dass  $\tan \gamma = \frac{r \cdot \sin \alpha - R}{r \cdot \cos \alpha}$  gilt.
- Nehmen Sie an, die Ingenieure arbeiten in einem Gebiet, in dem in alle Richtungen Hänge nahezu gleichmäßig den Satellitenempfang verschatten (z. B. im Inneren eines Kraters). Für eine sichere Navigation mit GPS ist jedoch die zuverlässige Verbindung mit mindestens vier Satelliten nötig.  
Ermitteln Sie den Grenzwinkel  $\gamma$ , für den gerade noch 4 Satelliten von ihrem GPS-Gerät empfangen werden können. **(20P)**



## Anlage zur Aufgabe „Wassertank“

Bereich, in dem die Satelliten sichtbar sind, ist **fett** gezeichnet



*Hinweis: Die Skizze ist nicht maßstäblich.*



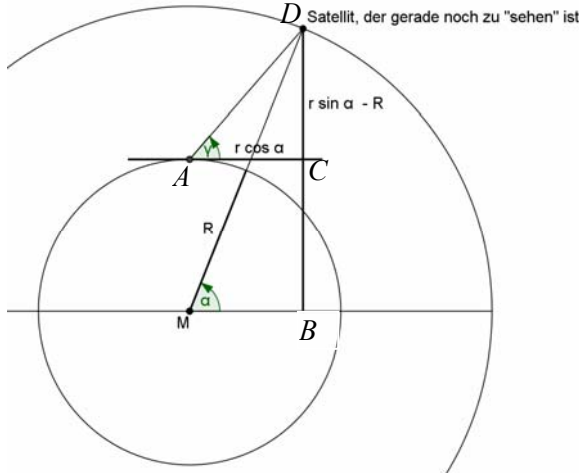
Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
b)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Um zu zeigen, dass die Punkte <math>S_1</math>, <math>S_2</math> und <math>S_3</math> auf einem Kreis mit dem Radius <math>\sqrt{5}</math> in der Ebene <math>x_3 = 4</math> liegen, genügt es zu zeigen, dass die Punkte <math>(1 -2)</math>, <math>(2 1)</math> und <math>(-2 1)</math> zu <math>(0 0)</math> den gleichen Abstand haben:  <math display="block">\sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \quad \text{und} \quad \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad \text{sowie} \quad \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}.</math></li> <li>Der Durchstoßpunkt <math>P</math> wird mit Hilfe folgender Gleichung berechnet:  <math display="block">\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P(2,6 -5,2 0)</math></li> </ul> <p>Daraus ergibt sich für die Länge <math>l</math> der Stütze</p> $l =  \overline{S_1 P}  = \left  \begin{pmatrix} 1,6 \\ -3,2 \\ -4 \end{pmatrix} \right  = \frac{12}{5} \sqrt{5} \approx 5,4 \text{ m}$ <p>Die Stütze hat zwischen <math>S_1</math> und <math>P</math> eine Länge von ca. 5,4 m.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Zur Überprüfung, ob es senkrecht unterhalb des Mittelpunktes <math>M</math> der Grundfläche einen Punkt gibt, der auf beiden Ebenen <math>E</math> und <math>H</math> liegt, stellt man zunächst fest, dass dies – wegen der Lage auf <math>E</math> – nur der Nullpunkt <math>(0 0 0)</math> sein könnte. Dieser ist offensichtlich nicht in der Ebene <math>H</math> enthalten, wie man aus der gegebenen Ebenengleichung sofort erkennen kann.</li> </ul> <p><u>2. Lösung unter Rückgriff auf a), dritter Spiegelpunkt:</u></p> <p>Der gesuchte Punkt müsste auf der Geraden <math>g</math> liegen und von der Form <math>\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}</math> sein. Die Gleichung <math>\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{49} \\ \frac{1}{23} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}</math> hat aber keine Lösung.</p>	5	10	5

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	<p>Berechnung des Kugelradius:</p> $V_{\text{Kugel}} = V_{\text{Zylinder}}$ $\frac{4}{3} \pi r_K^3 = h \pi r_Z^2$ $r_K = \sqrt[3]{\frac{h}{2}} \approx 3,3472 \approx 3 \text{ (m)}$ <p>Zur Berechnung der Verringerung des Abstandes: Nach Anwendung des Satzes des Pythagoras errechnet man für die Verringerung des Abstandes</p> $\sqrt[3]{\frac{75}{2}} - \sqrt{\sqrt[3]{\frac{75}{2}}^2 - \sqrt{5}^2} \approx 0,8565 \approx 1 \quad [m]$ <p>Der im Aufgabenkontext betrachtete Abstand verringert sich um etwa 1 m. Somit hat die Kugeloberfläche zur Wüstenebene einen Abstand von ca. 3 m.</p>		15	
d)	<p>Umrechnung in kartesische Koordinaten: (wobei <math>r = 1</math> gesetzt)</p> <p><i>Wassertank:</i></p> $x_1 = \cos(-105,50^\circ) \cdot \cos(27,40^\circ) \approx -0,2373$ $x_2 = \sin(-105,50^\circ) \cdot \cos(27,40^\circ) \approx -0,8555$ $x_3 = \sin(27,40^\circ) \approx 0,4602$ <p><i>El Paso:</i></p> $x_1 = \cos(-106,30^\circ) \cdot \cos(31,50^\circ) \approx -0,2393$ $x_2 = \sin(-106,30^\circ) \cdot \cos(31,50^\circ) \approx -0,8184$ $x_3 = \sin(31,50^\circ) \approx 0,5225$ <p>Berechnung des Winkels <math>\gamma</math>:</p> $\gamma = \arccos \begin{pmatrix} -0,2373 \\ -0,8555 \\ 0,4602 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,2393 \\ -0,8184 \\ 0,5225 \end{pmatrix} \approx 4,1472^\circ$ <p>Berechnung der Bogenlänge und damit für die gesuchte Entfernung <math>s</math> zwischen Wassertank und El Paso ergibt:</p> $s \approx \frac{4,1472^\circ}{180^\circ} \cdot \pi \cdot 6370 \text{ km} \approx 460 \text{ km}$ <p>Der Wassertank ist also ca. 460 km von El Paso entfernt.</p> <p><i>Bemerkung:</i> Durch unterschiedliches Runden können abweichende Ergebnisse auftreten. Rechnet man mit deutlich höherer Genauigkeit erhält man 462,355 km.</p>		20	

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Es gilt <math>\beta = 180^\circ - 2\alpha</math>, also <math>\frac{\beta}{2} = 90^\circ - \alpha</math>.</li> <li>Somit gilt:  <math display="block">A_{\text{Teil}} = 2\pi r^2 \cdot \left(1 - \cos\frac{\beta}{2}\right) = 2\pi r^2 \cdot (1 - \cos(90^\circ - \alpha)) = 2\pi r^2 \cdot (1 - \sin\alpha)</math> </li> <li><math>\tan\gamma = \frac{r \cdot \sin\alpha - R}{r \cdot \cos\alpha}</math> lässt sich mithilfe einer Skizze zeigen, wobei die Winkel <math>\sphericalangle DBM</math> und <math>\sphericalangle DCA</math> rechte Winkel sind.                      Im Dreieck <math>\triangle MBD</math> gilt: <math>\sin\alpha = \frac{ BD }{r} \Leftrightarrow  BD  = r \cdot \sin\alpha</math>                      Da <math>R =  MA  =  BC </math> gilt, folgt auch: <math> DC  =  BD  -  BC  = r \cdot \sin\alpha - R</math>                      Im Dreieck <math>\triangle MBD</math> gilt auch: <math>\cos\alpha = \frac{ MB }{r} \Leftrightarrow  MB  = r \cdot \cos\alpha</math>                      Es gilt: <math> MB  =  AC </math>. Damit gilt auch: <math> AC  = r \cdot \cos\alpha</math>                      Im <math>\triangle ACD</math> gilt dann: <math>\tan\gamma = \frac{ DC }{ AC } = \frac{r \cdot \sin\alpha - R}{r \cdot \cos\alpha}</math>, was zu beweisen war.                 </li> </ul>  <p>Zur exakten Navigation mit dem GPS-Gerät braucht man die Verbindung zu mindestens vier Satelliten.</p> <p>Da es insgesamt 24 Satelliten <i>gleichmäßig</i> verteilt auf die gesamte Kugeloberfläche <math>4\pi r^2</math> gibt, befinden sich 4 Satelliten auf einem Sechstel dieser Kugeloberfläche, also: <math>\frac{1}{6} \cdot 4\pi r^2 = 2\pi r^2 \cdot (1 - \sin\alpha) \Leftrightarrow 4 = 12 \cdot (1 - \sin\alpha)</math></p> <p>Es ergibt sich: <math>\alpha = 41,810315\dots^\circ</math> Daraus folgt nach Einsetzen in <math>\tan\gamma = \frac{r \cdot \sin\alpha - R}{r \cdot \cos\alpha}</math> für den „Grenz-Winkel“: <math>\gamma \approx 30^\circ</math></p>			
Insgesamt 100 BWE		25	55	20

## II.2 Erforschung von Schädlingspopulationen

Eine wissenschaftliche Arbeitsgruppe – bestehend aus Mathematikerinnen und Biologen – hat den Auftrag, das Wachstum von Populationen einer bestimmten Schädlingsart zu erforschen. Ein besonderer Schwerpunkt der Arbeit sind Langzeituntersuchungen. Die Mathematikerinnen haben von den Biologen erfahren, dass sich der Schädling recht gut in Entwicklungsklassen unterteilen lässt. Diese Unterteilung wird in einem mathematischen Modell aufgegriffen. Dabei unterteilt man die Gesamtpopulation in *Junge*, *Reife* und *Ausgewachsene*. Deren jeweilige Anzahlen  $j_n$ ,  $r_n$  bzw.  $a_n$  werden zu

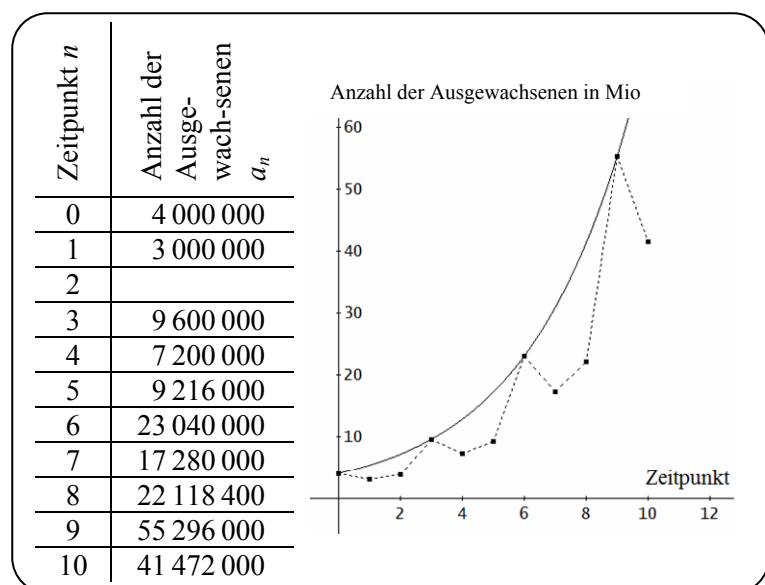
einem Zeitpunkt  $n$  in einem Populationsvektor  $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} j_n \\ r_n \\ a_n \end{pmatrix}$  notiert. Durch die allgemeine Modellgleichung  $\vec{v}_{n+1} = L \cdot \vec{v}_n$  wird der Übergang vom Zeitpunkt  $n$  zum Zeitpunkt  $n + 1$  beschrieben.

$L$  ist dabei eine Übergangsmatrix. Ein Zeitschritt hat die Länge von einem Monat. Vereinfachend werden im Folgenden ausschließlich weibliche Individuen betrachtet.

In einem ersten Versuch der Modellierung wird die Übergangsmatrix  $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \end{pmatrix}$  verwendet.

- a) Erstellen Sie einen Übergangsgraphen entsprechend dem oben genannten Modell und den Werten aus der Matrix  $K$ . (5P)
- b) Berechnet man ausgehend von einem Startvektor  $\vec{v}_0$  bestehend aus 8 Millionen *Jungen*, 5 Millionen *Reifen* und 4 Millionen *Ausgewachsenen* unter Verwendung der Matrix  $K$  die Entwicklung der Population für einige Zeitschritte, so ergibt sich für die Teilpopulation der *Ausgewachsenen* die folgende unvollständige Wertetabelle, die auch grafisch in dem Koordinatensystem dargestellt ist:

- Berechnen Sie den fehlenden Wert  $a_2$  mithilfe der Übergangsmatrix  $K$ .
- Trotz der Schwankungen in der Entwicklung liegen die jeweiligen *lokalen Hochpunkte* auf dem Graphen einer Exponentialfunktion mit der Gleichung  $g(n) = c \cdot e^{b \cdot n}$ . Ermitteln Sie mithilfe der Wertetabelle die beiden Parameter  $c$  und  $b$ .



(25P)

Die Biologen wenden ein, dass die bisherigen Modellrechnungen zu weit von den realen Gegebenheiten entfernt seien. In einem zweiten Modellierungsversuch wird deshalb unter anderem berücksichtigt, dass ein Teil der *Reifen* den Entwicklungsschritt in die nächste Klasse nicht vollzieht. Jetzt wird die folgende Übergangsmatrix  $M$  zugrunde gelegt:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0,5 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

- c) Geben Sie vor dem Hintergrund des Sachkontextes die Bedeutung der Matrixeinträge  $m_{12} = 2$  und  $m_{33} = 0,1$  an. **(10P)**
- d) Um die Qualität des veränderten Modells zu überprüfen, soll unter Verwendung der Matrix  $M$  aus den beobachteten Daten zum Zeitpunkt  $n = 0$  ( $j_0 = 8 \cdot 10^6$ ,  $r_0 = 5 \cdot 10^6$ ,  $a_0 = 4 \cdot 10^6$ ) zum Populationsvektor des unmittelbar vorangegangenen Zeitpunkts zurückgerechnet werden.
- Bestimmen Sie unter Zugrundelegung des genannten Modells den Populationsvektor zum vorangegangenen Zeitpunkt  $n = -1$ .
  - Die Biologen stellten zum Zeitpunkt  $n = -1$  einen *tatsächlichen* Bestand von ca. 8,35 Millionen *Jungen* sowie 4,02 Millionen *Reifen* und 32,20 Millionen *Ausgewachsenen* fest. Berechnen Sie für Ihre drei oben *mathematisch ermittelten* Daten die jeweilige prozentuale Abweichung vom *tatsächlichen* Wert. Geben Sie auf dieser Grundlage an, welche Qualität das Modell Ihrer Meinung nach hat. **(20P)**

Falls sich eine Populationszusammensetzung im Verlaufe der Zeit nicht mehr ändert, hat sie einen *stationären Zustand*  $\vec{s}$  erreicht.

- e) Aus biologischer Sicht kann es sinnvoll sein, eine Schädlingspopulation nicht auszurotten, sondern so zu kontrollieren, dass sich ein vom Nullvektor verschiedener stationärer Zustand einstellt. Durch den Einsatz von Chemikalien ist es möglich, die Übergangsrate der *Jungen* zu den *Reifen* zu senken. Die Biologen in der Arbeitsgruppe wünschen sich dazu von den Mathematikerinnen einen Vorschlag.
- Die veränderte Matrix wird  $\overline{M}$  genannt; sie unterscheidet sich von der Matrix  $M$  lediglich in der erwähnten Übergangsrate.
- Ermitteln Sie den Wert, den diese Übergangsrate annehmen muss, damit es zur Matrix  $\overline{M}$  im Rahmen des oben genannten Modells einen stationären Zustand gibt. **(20P)**

Eine andere Möglichkeit, einen stationären Zustand zu erhalten, besteht in der Senkung des Anteils derjenigen *Reifen*, die nach Ablauf eines Zeitschritts in dieser Entwicklungsklasse verbleiben. Durch die Behandlung der Schädlinge mit einem bestimmten Hormon lässt sich dieser Anteil von 20 % auf 0 % senken. Die so entstehende Übergangsmatrix hat dann die folgende Gestalt:

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $\widehat{M}$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 0,1$  sowie  $\lambda_3 = -1$  mit den drei dazugehörigen

möglichen Eigenvektoren  $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sowie  $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 22 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

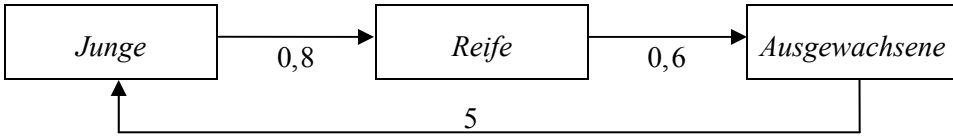
*Hinweis: Ist  $\lambda$  ein Eigenwert einer Matrix  $A$  und  $\vec{w}$  der dazugehörige Eigenvektor, so gilt  $A \cdot \vec{w} = \lambda \cdot \vec{w}$ .*

Im Rahmen einer Untersuchung, ob mithilfe der Matrix  $\widehat{M}$  die Realität angemessen beschrieben werden kann, wird im Folgenden das Modellverhalten für verschiedene Startvektoren betrachtet.

- f) • Begründen Sie, warum der Eigenvektor  $\vec{w}_1$  einen stationären Zustand darstellt.
- Betrachten Sie einen Startvektor  $\vec{b}_0$ , der sich durch  $\vec{b}_0 = 2 \cdot \vec{w}_1 + 2000 \cdot \vec{w}_2$  als Linearkombination der Eigenvektoren  $\vec{w}_1$  und  $\vec{w}_2$  darstellen lässt.  
Begründen Sie, etwa unter Zuhilfenahme des Zusammenhangs  $\vec{b}_n = \widehat{M}^n \cdot \vec{b}_0$ , warum die so beschriebene Populationsentwicklung sich mit wachsendem Wert für  $n$  immer mehr einem bestimmten Vektor annähert und ermitteln Sie diesen.
  - Beurteilen Sie, wie sich die Modellpopulation entwickelt, wenn man einen Startvektor verwendet, der sich als Linearkombination von  $\vec{w}_1$  und  $\vec{w}_3$  darstellen lässt ( $\vec{w}_2$  wird hier zur Darstellung nicht benötigt).
- (20P)**



**Erwartungshorizont**

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	 <pre> graph LR     A[Junge] -- 0,8 --&gt; B[Reife]     B -- 0,6 --&gt; C[Ausgewachsene]     C -- 5 --&gt; A             </pre>	5		
b)	<p>• <math>\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 &amp; 5 \\ 0,8 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0,6 &amp; 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot 10^6 \\ 5 \cdot 10^6 \\ 4 \cdot 10^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^7 \\ 6,4 \cdot 10^6 \\ 3 \cdot 10^6 \end{pmatrix}</math></p> <p><math>\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 &amp; 5 \\ 0,8 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0,6 &amp; 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^7 \\ 6,4 \cdot 10^6 \\ 3 \cdot 10^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \cdot 10^7 \\ 1,6 \cdot 10^7 \\ 3,84 \cdot 10^6 \end{pmatrix}</math> also <math>a_2 = 3,84 \cdot 10^6</math>.</p> <p>• Zeitpunkte von lokalen Hochpunkten sind etwa 0 und 3. Also ist anzusetzen:</p> <p>(I) <math>g(0) = c \cdot e^{b \cdot 0} = 4 \cdot 10^6</math></p> <p>(II) <math>g(3) = c \cdot e^{b \cdot 3} = 9,6 \cdot 10^6</math></p> <p>Aus (I) folgt <math>c = 4 \cdot 10^6</math>. Eingesetzt in (II) ergibt sich:</p> $4 \cdot 10^6 \cdot e^{b \cdot 3} = 9,6 \cdot 10^6 \Leftrightarrow e^{b \cdot 3} = 2,4 \Leftrightarrow 3b = \ln 2,4 \Leftrightarrow b = \underline{\underline{\frac{1}{3} \ln 2,4}}$ <p>Man erhält somit <math>g(n) = 4 \cdot 10^6 \cdot e^{\frac{1}{3} \ln(2,4) \cdot n}</math></p> <p><i>Der Exponent von e kann auch gerundet angegeben werden.</i></p>	5	20	
c)	<p><math>m_{12}</math> gibt an, wie viele <i>Junge</i> durch jede <i>Reife</i> pro Zeitschritt entstehen.</p> <p><math>m_{33}</math> gibt an, welcher Anteil der <i>Ausgewachsenen</i> nach einem Zeitschritt in dieser Entwicklungsphase verbleibt.</p>	10		

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	<p>• Es ist das lineare Gleichungssystem <math>M \cdot \vec{v}_{-1} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 10^6 \\ 5 \cdot 10^6 \\ 4 \cdot 10^6 \end{pmatrix}</math> zu lösen.</p> <p>Die erweiterte Koeffizientenmatrix hat folgende Gestalt:</p> $\left( \begin{array}{ccc c} 0 & 2 & 0 & 8 \cdot 10^6 \\ 0,5 & 0,2 & 0 & 5 \cdot 10^6 \\ 0 & 0,2 & 0,1 & 4 \cdot 10^6 \end{array} \right)$ <p>Addiert man in einem Gauß-Schritt das <math>(-10)</math>-fache der zweiten Zeile zur ersten, so erhält man:</p> $\left( \begin{array}{ccc c} -5 & 0 & 0 & -4,2 \cdot 10^7 \\ 0,5 & 0,2 & 0 & 5 \cdot 10^6 \\ 0 & 0,2 & 0,1 & 4 \cdot 10^6 \end{array} \right)$ <p>Schrittweise ergibt sich:</p> $-5j_{-1} = -4,2 \cdot 10^7 \Leftrightarrow j_{-1} = \underline{\underline{8,4 \cdot 10^6}}$ $0,5 \cdot 8,4 \cdot 10^6 + 0,2 \cdot r_{-1} = 5 \cdot 10^6 \Leftrightarrow r_{-1} = \underline{\underline{4 \cdot 10^6}}$ $0,2 \cdot 4 \cdot 10^6 + 0,1 \cdot a_{-1} = 4 \cdot 10^6 \Leftrightarrow a_{-1} = \underline{\underline{3,2 \cdot 10^7}}$ <p>woraus man <math>\vec{v}_{-1} = \begin{pmatrix} 8,4 \cdot 10^6 \\ 4 \cdot 10^6 \\ 3,2 \cdot 10^7 \end{pmatrix}</math> erhält.</p> <p>• <i>Junge</i>: <math>\left  \frac{8,35 - 8,4}{8,35} \cdot 100\% \right  \approx 0,6\%</math></p> <p><i>Reife</i>: <math>\left  \frac{4,02 - 4}{4,02} \cdot 100\% \right  \approx 0,5\%</math></p> <p><i>Ausgewachsene</i>: <math>\left  \frac{32,20 - 32}{32,20} \cdot 100\% \right  \approx 0,6\%</math></p> <p>Die prozentualen Abweichungen sind sehr gering, die Qualität des Modells ist an dieser Stelle demnach eher hoch.</p> <p><i>Anmerkung: Es kommt bei der Qualitätseinschätzung darauf an, die bestehenden Abweichungen als generelle Begleiterscheinung von Modellierung zu erkennen. Eine Antwort, die aus der Existenz der Abweichungen schließt, das Modell sei von geringer Qualität, ist demnach als falsch zu bewerten.</i></p>			
		5	15	

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	<p>Sei <math>k</math> die Übergangsrate der <i>Jungen</i> zu den <i>Reifen</i>. Dann gilt</p> $\overline{M} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ k & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \text{ und man setzt an } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ k & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ <p>Die Matrixgleichung zerfällt in drei Einzelgleichungen:</p> <p>I. <math>2y = x</math>  II. <math>k \cdot x + 0,2y = y</math>  III. <math>0,2y + 0,1z = z</math></p> <p>Die Gleichungen I und II sind wesentlich zur Bestimmung von <math>k</math>.  Setzt man I in II ein, ergibt sich:</p> $k \cdot 2y + 0,2y = y \Leftrightarrow k \cdot 2y = 0,8y \Leftrightarrow k \cdot y = 0,4y$ <p>Fallunterscheidung:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ <math>y \neq 0</math>: Es folgt direkt <math>k = 0,4</math>.</li> <li>○ <math>y = 0</math>: Aus <math>y = 0</math> folgt wegen I auch <math>x = 0</math> und wegen III folgt <math>z = 0</math>. Dies ist nach Aufgabenstellung nicht zulässig, da vom Nullvektor <i>verschiedene</i> stationäre Vektoren gesucht werden.</li> </ul> <p>Die anzustrebende Übergangsrate der <i>Jungen</i> zu den <i>Reifen</i> hat also den Wert 0,4.</p> <p><i>Alternativer Lösungsweg:</i></p> <p>Sei <math>k</math> die Übergangsrate der <i>Jungen</i> zu den <i>Reifen</i>. Dann gilt:</p> $\overline{M} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ k & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \text{ und es ist anzusetzen } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ k & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \vec{s} = \vec{s}$ <p>Dieser Ansatz führt zu folgender erweiterter Koeffizientenmatrix:</p> $\left( \begin{array}{ccc c} 0-1 & 2 & 0 & 0 \\ k & 0,2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1-1 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ k & -0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & -0,9 & 0 \end{array} \right)$ <p>Mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens erhält man:</p> $\left( \begin{array}{ccc c} -0,9 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & -0,8 & k & 0 \\ 0 & 0 & -1+2,5k & 0 \end{array} \right)$ <p>Genau dann gibt es vom Nullvektor verschiedene Lösungen (die allesamt stationäre Zustände darstellen) wenn <math>-1 + 2,5k = 0</math>. Diese Gleichung ist für <math>k = 0,4</math> erfüllt. Die anzustrebende Übergangsrate der <i>Jungen</i> zu den <i>Reifen</i> hat also den Wert 0,4.</p>			
			15	5

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Der Eigenvektor <math>\vec{w}_1</math> gehört zum Eigenwert <math>\lambda_1 = 1</math>. Mithin gilt <math>A \cdot \vec{w}_1 = 1 \cdot \vec{w}_1 = \vec{w}_1</math>. Die Multiplikation mit <math>A</math> ändert also <math>\vec{w}_1</math> nicht, damit bildet <math>\vec{w}_1</math> definitionsgemäß einen stationären Zustand.  <i>Anmerkung: Auch andere Argumentationen, etwa ein direktes Nachrechnen, sind möglich.</i></li> <li>Es gilt  <math display="block">\begin{aligned} \vec{b}_n &amp;= \widehat{M}^n \cdot \vec{b}_0 \\ &amp;= \widehat{M}^n (2 \cdot \vec{w}_1 + 2000 \cdot \vec{w}_2) \\ &amp;= 2 \cdot \widehat{M}^n \vec{w}_1 + 2000 \cdot \widehat{M}^n \cdot \vec{w}_2 \\ &amp;= 2 \cdot 1^n \vec{w}_1 + 2000 \cdot 0,1^n \cdot \vec{w}_2 \quad (\text{weil } 1 \text{ und } 0,1 \text{ die EW zu } \vec{w}_1 \text{ bzw. } \vec{w}_2 \text{ sind}) \\ &amp;= 2 \cdot \vec{w}_1 + 2000 \cdot 0,1^n \cdot \vec{w}_2 \end{aligned}</math> <p>Da <math>0,1^n</math> für wachsendes <math>n</math> gegen Null strebt, ist der zweite Summand langfristig zu vernachlässigen. Die Entwicklung strebt also insgesamt gegen den ersten Summanden. Damit nähern sich die Populationsvektoren mit wachsendem Wert für <math>n</math> immer stärker dem Vektor <math>2\vec{w}_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 18 \\ 4 \end{pmatrix}</math> an.</p> <i>Anmerkung: Auch eine weniger formale Argumentation soll – wenn sie vollständig dargelegt wird – als korrekt bewertet werden.</i> </li> <li>Sei also <math>\vec{b}_0 = \mu_1 \cdot \vec{w}_1 + \mu_3 \cdot \vec{w}_3</math>, wobei nach Aufgabenstellung beide Koeffizienten von Null verschieden sind. Mit einer Umformung analog zur oben durchgeführten gilt  <math display="block">\begin{aligned} \vec{b}_n &amp;= \mu_1 \cdot \lambda_1^n \cdot \vec{w}_1 + \mu_3 \cdot \lambda_3^n \cdot \vec{w}_3 \\ &amp;= \mu_1 \cdot 1^n \cdot \vec{w}_1 + \mu_3 \cdot (-1)^n \cdot \vec{w}_3 \\ &amp;= \mu_1 \cdot \vec{w}_1 + \mu_3 \cdot (-1)^n \cdot \vec{w}_3 \end{aligned}</math> <p>Der erste Summand ist unabhängig vom Wert von <math>n</math> konstant (s.o.). Der zweite Summand stellt einen bis auf das Vorzeichen konstanten Vektor dar; das Vorzeichen wechselt mit jedem Zeitschritt. Die Entwicklung der Populationsvektoren <math>\vec{b}_n</math> bildet also einen Zyklus mit der Periodenlänge 2, wobei die beiden Zustände der Periode durch <math>\mu_1 \cdot \vec{w}_1 + \mu_3 \cdot \vec{w}_3</math> bzw. <math>\mu_1 \cdot \vec{w}_1 - \mu_3 \cdot \vec{w}_3</math> gegeben sind.</p> </li> </ul>			
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

## STOCHASTIK 1

### III.1 Ultraschalldiagnose

Bei Verdacht auf Brustkrebs oder bei einer Vorsorgeuntersuchung bediente man sich seit vielen Jahren der Röntgen-Mammografie als Hilfsmittel zur Diagnose.

In den letzten Jahren hat sich außerdem die Technik der Ultraschall-Diagnostik (*Sonografie*) mit Riesenschritten entwickelt. Daher verfügt man heute mit der Ultraschalluntersuchung der Brust (*Mamma-Sonografie*) über ein neues zusätzliches diagnostisches Verfahren.



Schädliche Wirkungen auf das Körpergewebe sind mit den in der Medizin verwendeten Ultraschall-Diagnosegeräten nicht zu erwarten. Im Unterschied zu Röntgenstrahlen haben Ultraschallwellen nach dem heutigen Stand der Wissenschaft vermutlich keine Wirkung auf die Feinstruktur der Materie. Sie können daher weder Erbgutveränderungen noch Krebs auslösen.

Eine Fachzeitschrift berichtete über die Qualität der Mamma-Sonografie:

*Insgesamt war die Sonografie in 2000 Fällen angewandt und die Diagnose mit dem Ergebnis der mikroskopischen feingeweblichen Untersuchung verglichen worden. Die feingewebliche Analyse hatte 102 mal Krebs ergeben, was zu 85 % aus dem Ultraschallbild ablesbar war. Vor allem aber: Die Deckungsgleichheit der beiden Untersuchungsmethoden für den Fall, dass kein Krebs diagnostiziert wurde, lag mit 83 % fast ebenso hoch.*

Es wird hier davon ausgegangen, dass eine feingewebliche Untersuchung fehlerfrei ist.

Benutzen Sie folgende Kürzel für die angegebenen Ereignisse:

DK : Ultraschalldiagnose Krebs

$\overline{DK}$  : Ultraschalldiagnose nicht Krebs

K: Krebs

$\overline{K}$  : nicht Krebs

- a) Geben Sie die im Zeitungsartikel erwähnten Prozentsätze 85 % und 83 % als (Näherungswerte für) bedingte Wahrscheinlichkeiten an. **(5P)**

Eine Langzeitstatistik besagt, dass jede zwanzigste Frau über 35 Jahren von einem Brustkrebstumor befallen ist.

Für eine wissenschaftliche Untersuchung über die Ultraschall-Methode werden über 35-jährige Frauen gesucht. Dazu sollen bei der Planung zunächst folgende Fragen geklärt werden.

- b) Berechnen Sie die Mindestanzahl von zufällig auszuwählenden Frauen über 35 Jahren, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens eine Frau dabei ist, die von einem *Brustkrebstumor befallen* ist. **(10P)**

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

- c) Über eine Zeitungsanzeige versuchen die Wissenschaftler, Frauen über 35 Jahren zu finden, die sich bereit erklären, an einer Ultraschalluntersuchung der Brust teilzunehmen.
- Berechnen Sie – ausgehend von den Prozentsätzen in der Fachzeitschrift – die ungefähre Mindestanzahl von Frauen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens eine Frau dabei ist, bei der die *Ultraschalluntersuchung Krebs anzeigt*.
  - Begründen Sie unter Bezugnahme auf die reale Situation, warum sich für die Gruppe von Freiwilligen, die sich bei der Zeitung gemeldet haben, möglicherweise ein vom soeben bestimmten Wert deutlich abweichendes Ergebnis zeigen könnte.
  - Begründen Sie die Unterschiede der Ergebnisse aus Aufgabe b) und dem ersten Punkt dieses Aufgabenteils. **(20P)**
- d) Zwei aus *allen* Frauen zufällig ausgewählte Personen, Frau A (42 Jahre) und Frau B (48 Jahre), gehen routinemäßig zur regelmäßigen Reihen-Vorsorgeuntersuchung. Aufgrund der Sonografie diagnostiziert der Arzt bei Frau A Brustkrebs, bei Frau B hingegen findet er keine Anzeichen.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Frau A wirklich Krebs hat.
  - Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Frau B trotzdem an Brustkrebs erkrankt ist.
  - Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse für Frau A und Frau B hinsichtlich der diagnostischen Aussagefähigkeit.
- Hinweis: Es können die Begriffe „a-priori“ und „a-posteriori“ benutzt werden. **(30P)**
- e) In der medizinischen Diagnostik werden bestimmte Fachbegriffe verwendet:  $P(DK|K)$  wird *Sensitivität (sens)*,  $P(\overline{DK}|\overline{K})$  wird *Spezifität (spez)* und die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Erkrankung überhaupt  $P(K)$  wird *Prävalenz (prae)* genannt.
- Es liegt die Frage nahe, wie groß die Wahrscheinlichkeit für eine Krebserkrankung ist, wenn der Test eine Krebserkrankung anzeigt. Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich in Abhängigkeit der drei genannten Fachbegriffe darstellen:  $P(K|DK) = f(\text{spez}, \text{sens}, \text{prae})$ . Um einen zweidimensionalen Graphen zu erstellen, verwenden Sie für die Prävalenz den konstanten Wert 5 % und für die Sensitivität den konstanten Wert 85 % aus der Fachzeitschrift.
- Bestätigen Sie die folgende Abhängigkeit:  $P(K|DK) = \frac{0,0425}{0,9925 - 0,95 \cdot \text{spez}}$
  - Stellen Sie den Graphen für die Funktion  $P(K|DK) = f(\text{spez})$  im Intervall  $[0; 0,95]$  in einem Koordinatensystem dar und interpretieren Sie den Graphen im Sachzusammenhang. **(15P)**
- f) Wenn sich die Erkrankung im Anfangsstadium befindet, bietet ein pharmazeutisches Unternehmen ein Medikament an, das angeblich bei mindestens 80 % der damit behandelten Personen erfolgreich ist. Diese Behauptung soll durch einen klinischen Test mit einem Stichprobenumfang von 100 Patientinnen auf dem Signifikanzniveau von 5 % belegt werden.
- Beschreiben und begründen Sie eine Methode, wie man vorgehen könnte. **(20P)**

### Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	$p(DK   K) = 85 \%$ Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Diagnose „Krebs“ lautet, wenn man Krebs hat.  $p(\overline{DK}   \overline{K}) = 83 \%$ Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Diagnose „Nicht Krebs“ lautet, wenn man keinen Krebs hat.	5		
b)	Für die Wahrscheinlichkeit $(1 - p)$ für „keinen Tumor“ soll gelten: $(1 - p)^n \leq 1\%$ Also: $(1 - 0,05)^n \leq 0,01 \Rightarrow 0,95^n \leq 0,01 \Rightarrow n \geq \log_{0,95} 0,01$ Es gilt $\log_{0,95} 0,01 = \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,95)} \approx 89,78$ , also müssen mindestens 90 Frauen untersucht werden. <i>Anmerkung:</i> Leicht abweichende Ergebnisse könnten auftreten, falls der Prüfling die Daten aus der Fachzeitschrift nutzt ( $\frac{102}{2000} = 5,1\%$ ), was auch als richtig bewertet werden sollte.	10		

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

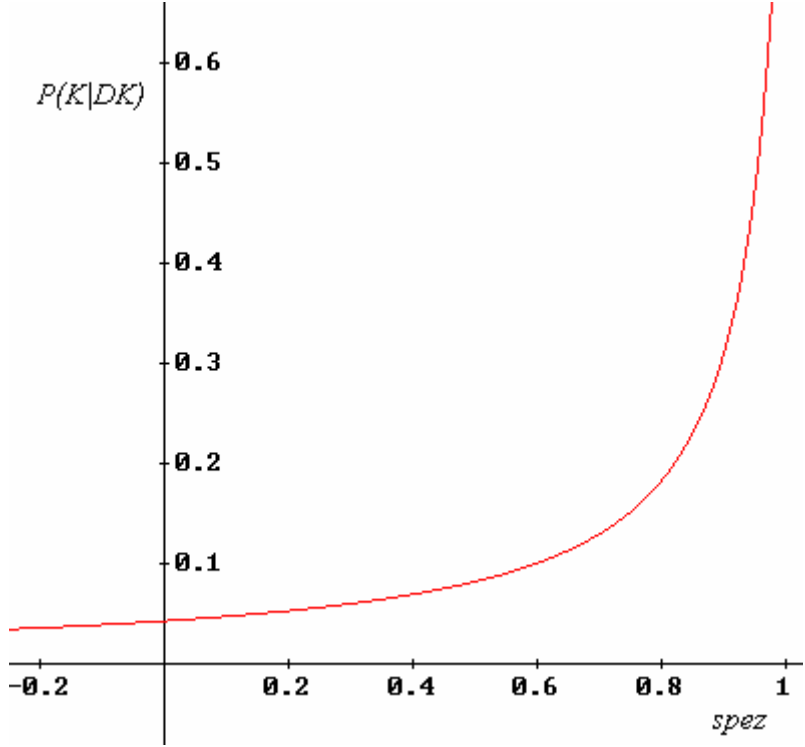
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Allgemein gilt: <math>p(DK) = p(DK   K) \cdot p(K) + p(DK   \bar{K}) \cdot p(\bar{K})</math> Setzt man die Zahlenwerte ein, erhält man: <math display="block">p(DK) = 0,85 \cdot 0,05 + 0,17 \cdot 0,95 = 0,204</math> Es ist anzusetzen: <math display="block">(1 - 0,204)^n \leq 0,01 \Rightarrow 0,796^n \leq 0,01 \Rightarrow n \geq \log_{0,796} 0,01</math> Da gilt <math>\log_{0,796} 0,01 = \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,796)} \approx 20,2</math>, müssen mindestens 21 Frauen untersucht werden. <i>Anmerkung: Leicht abweichende Ergebnisse können auftreten, falls der Prüfling die Daten aus der Fachzeitschrift nutzt (<math>\frac{102}{2000} = 5,1\%</math>), was auch als richtig bewertet werden sollte.</i></li> <li>Die a-priori-Wahrscheinlichkeit, Krebs zu haben, kann für eine Frau bei dieser Frauengruppe höher sein als in der Gesamtgruppe der über 35 jährigen Frauen, weil sich auf eine Anzeige möglicherweise vorwiegend Frauen mit einem Anfangsverdacht melden. <i>Anmerkung: Auch andere Argumentationen, die sich auf eine von der Grundgesamtheit abweichende a-priori-Wahrscheinlichkeit beziehen, sind zu akzeptieren.</i></li> <li>Die Wahrscheinlichkeit für <i>Diagnose Krebs</i> (20,4 %) ist aufgrund möglicher Fehldiagnosen höher als die Wahrscheinlichkeit für <i>Krebs</i> (5 %). Deshalb reicht hier im Verhältnis zu b) ein kleinerer Stichprobenumfang. <i>Anmerkung: Leicht abweichende Angaben können wieder auftreten, falls der Prüfling die Daten aus der Fachzeitschrift nutzt (<math>\frac{102}{2000} = 5,1\%</math>).</i></li> </ul>	10	10	



Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	<p>Hierbei handelt es sich um eine klassische Bayes-Anwendung: Zu einer vorhandenen bedingten Wahrscheinlichkeit ist die Umkehrung gesucht.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">p(K   DK) = \frac{p(K) \cdot p(DK   K)}{p(K) \cdot p(DK   K) + p(\bar{K}) \cdot p(DK   \bar{K})}</math> <math display="block">p(K   DK) = \frac{0,05 \cdot 0,85}{0,05 \cdot 0,85 + 0,95 \cdot 0,17} \approx \underline{\underline{0,208}}</math> <p>Frau A hat „nur“ mit einer ca. 20-prozentigen Wahrscheinlichkeit Brustkrebs.</p> </li> <li> <math display="block">p(K   \overline{DK}) = \frac{p(K) \cdot p(\overline{DK}   K)}{p(K) \cdot p(\overline{DK}   K) + p(\bar{K}) \cdot p(\overline{DK}   \bar{K})}</math> <math display="block">p(K   \overline{DK}) = \frac{0,05 \cdot 0,15}{0,05 \cdot 0,15 + 0,95 \cdot 0,83} \approx \underline{\underline{0,0094}}</math> <p>Frau B kann mit einer ca. 1-prozentigen Wahrscheinlichkeit trotzdem an Brustkrebs erkrankt sein.</p> <p><i>Anmerkung: Leicht abweichende Ergebnisse können wieder auftreten, falls der Prüfling die Daten aus der Fachzeitschrift nutzt (<math>\frac{102}{2000} = 5,1\%</math>).</i></p> </li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>Die a-priori-Wahrscheinlichkeit von 5% ist für beide Frauen gleich. Für Frau A steigt diese auf die bedingte a-posteriori-Wahrscheinlichkeit <math>p(K   DK)</math> von ca. 20 %. Das hängt aber damit zusammen, dass die Wahrscheinlichkeit <math>p(DK   \bar{K})</math> („falsche Diagnose Krebs“) sehr ins Gewicht fällt. Wenn vorher kein begründeter Krankheitsverdacht bestand, ist die diagnostische Aussagekraft sehr gering.</li> </ul> <p>Bei Frau B sinkt der 5 %-Wert auf die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit <math>p(K   \overline{DK})</math> von ca. 1%.</p> <p>Negative Testergebnisse sind also viel aussagekräftiger als positive Testergebnisse.</p>			
			25	5

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	$p(K DK) = \frac{p(K) \cdot p(DK K)}{p(K) \cdot p(DK K) + p(\bar{K}) \cdot p(DK \bar{K})}$ $= \frac{prae \cdot sens}{prae \cdot sens + (1 - prae) \cdot (1 - spez)}$ $= \frac{0,05 \cdot 0,85}{0,05 \cdot 0,85 + (1 - 0,05) \cdot (1 - spez)}$ $= \frac{0,0425}{0,9925 - 0,95 \cdot spez}$ <p>Anmerkung: Leicht abweichende Ergebnisse können auftreten, falls der Prüfling die Daten aus der Fachzeitschrift nutzt (<math>\frac{102}{2000} = 5,1\%</math>).</p>  <p>Wenn die Spezifität steigt, wenn also der Anteil steigt, dass Gesunde durch den Test als gesund erkannt werden, dann vergrößert sich auch die Wahrscheinlichkeit für eine korrekte Krankheitsdiagnose. Allerdings muss die Spezifität nahe bei 1 liegen, damit die Krankheitsdiagnose höchstwahrscheinlich zutrifft.</p>			
			10	5

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	<p><math>Z</math> sei die Zufallsgröße für die Anzahl der geheilten Frauen unter den 100 getesteten. Wir nehmen an, dass <math>Z</math> 100-<math>p</math>-binomialverteilt ist.</p> <p>Der Pharmakonzern behauptet : <math>p \geq 0,8</math>.</p> <p>Im Test könnte man dann versuchen die Nullhypothese <math>H_0: p &lt; 0,8</math> zu verwerfen</p> <p>Werte von <math>Z</math> deutlich über 80 sprechen für das Medikament (gegen <math>H_0</math>).                      Entscheidungsregel: Es wird dem Hersteller geglaubt, wenn mindestens <math>k</math> Frauen geheilt werden.</p> <p>Der Fehler 1. Art lässt sich dann nach oben abschätzen durch: <math>P_{0,8}^{100}(Z \geq k)</math></p> <p>Deshalb bestimmen wir <math>k</math> so dass gilt:</p> $P_{0,8}^{100}(Z \geq k) = 1 - F_{0,8}^{100}(Z \leq k - 1) \leq 5\%$ <p><math>F_{0,8}^{100}(Z \leq k - 1)</math> muss mindestens 0,95 betragen. Also:</p> $\Phi\left(\frac{k - \mu - 0,5}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) \geq 0,95.$ $\frac{k - 80 + 0,5}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 1,64 \Rightarrow k = 1,64 \cdot \sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2} + 80 + 0,5 = 87.$ <p>Es müssen also mindestens 87 Frauen mit dem Medikament erfolgreich behandelt werden, um die Nullhypothese auf dem 5%-Niveau ablehnen zu können und deshalb den Herstellerangaben zu glauben.</p>			
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

## STOCHASTIK 2

### III.2 Geheimschrift

In der Kurzgeschichte *Der Goldkäfer* von Edgar Allan Poe entschlüsselt die Hauptfigur Legrand die unten stehende Geheimschrift.

Es wird zunächst angenommen, dass nur die 203 **Buchstaben** (also keine Satz- und Leerzeichen) des Originaltextes einzeln verschlüsselt wurden.

Dabei wurde ein und derselbe Buchstabe immer wieder gleich verschlüsselt, und verschiedene Buchstaben wurden auch verschieden verschlüsselt, wobei nicht zwischen großen und kleinen Buchstaben unterschieden wurde. Ein **a** und ein **A** im Originaltext *könnten* beispielsweise immer durch ein **♣** verschlüsselt sein, ein **d** und ein **D** durch ein **♠**.



5 3 Ø Ø Å 3 0 5 ) ) 6 \* ; 4 8 2 6 ) 4 Ø . ) 4 Ø ) ; 8 0 6 \*  
; 4 8 Å 8 ] 6 0 ) ) 8 5 ; 1 Ø ( ; : Ø \* 8 Å 8 3 ( 8 8 ) 5 \*  
Å ; 4 6 ( ; 8 8 \* 9 6 \* ? ; 8 ) \* Ø ( ; 4 8 5 ) ; 5 \* Å 2 :  
\* Ø ( ; 4 9 5 6 \* 2 ( 5 \* - 4 ) 8 ] 8 \* ; 4 0 6 9 2 8 5 ) ;  
) 6 Å 8 ) 4 Ø Ø ; 1 ( Ø 9 ; 4 8 0 8 1 ; 8 : 8 Ø 1 ; 4 8 Å 8  
5 ; 4 ) 4 8 5 Å 5 2 8 8 0 6 \* 8 1 ( Ø 9 ; 4 8 ; ( 8 8 ; 4 ( Ø ? 3 4 ; 4 8 ) 4 Ø ; 1 6 1 ; : 1 8 8 ; Ø ? ;

Um einen solchen Text zu entschlüsseln, kann man die Anzahl der einzelnen Zeichen (siehe Anlage 1) im verschlüsselten Text mit den Buchstabenhäufigkeiten der Sprache des Textes vergleichen. Hierzu finden Sie in der Anlage 2 eine Tabelle mit Buchstabenhäufigkeiten in verschiedenen Sprachen.

a) Zunächst ein kurzes Arbeiten mit dieser Buchstaben-Häufigkeitstabelle:

Sie stellen einen Beutel her mit 10 000 Steinchen, auf denen je ein Buchstabe steht.

Die relativen Häufigkeiten der einzelnen Buchstaben in dem Beutel sollen dabei den relativen Häufigkeiten in *italienischen* Texten folgen.

- Berechnen Sie die Anzahl der Steinchen in dem Beutel mit dem Buchstaben **o**.
- Begründen Sie, dass es notwendig ist, mindestens 10 000 Steinchen insgesamt zu nehmen, wenn die Steinchen im Beutel *exakt* nach der auf 2 Stellen gerundeten Häufigkeitstabelle des Italienischen verteilt sein sollen.

Sie entnehmen nun dem Beutel zufällig ohne Zurücklegen fünf solcher Steinchen.

- Begründen Sie, dass man bei der Bearbeitung jeder der folgenden drei Teilaufgaben mit guter Näherung so tun kann, als ob man mit Zurücklegen ziehen würde.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
  - Ereignis A: Unter den fünf Buchstaben findet sich kein „E“.
  - Ereignis B: Unter den fünf Buchstaben ist genau ein Konsonant.
  - Ereignis C: Sie finden die fünf Buchstaben, die Sie zum Bilden des Namens LAURA benötigen.

(25P)

**Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik**

- b) Betrachten Sie zufällig ausgewählte Texte aus verschiedenen Sprachen mit jeweils ebenfalls genau 203 Buchstaben.
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Anlage 2 für jede der Sprachen Deutsch, Englisch, Französisch, Spanisch und Italienisch den Erwartungswert der Anzahlen der jeweils zwei häufigsten Buchstaben.
  - Ordnen Sie mit dieser Information den obigen verschlüsselten Text aus dem *Goldkäfer* begründet einer der Sprachen zu.
  - Begründen Sie, welche zwei der fünf Sprachen sich durch diese Methode nur schlecht unterscheiden lassen. **(20P)**

Eine Person ist sich sicher, dass der Text entweder englisch oder deutsch ist. Um aus ihrer Sicht eine Entscheidung treffen zu können, schlägt sie zwei Signifikanztests vor mit der Zufallsgröße „Anzahl des häufigsten Buchstabens“, um vielleicht eine der beiden Sprachen verwerfen zu können.

- c) Gehen Sie davon aus, dass zwei *einseitige* Hypothesentests durchgeführt werden. Bestimmen Sie die Ablehnungsbereiche auf dem 5 %-Niveau und wenn möglich auch die Fehlerwahrscheinlichkeiten 2. Art. Verwenden Sie dafür Normalverteilungsnäherungen. Beurteilen Sie die Ergebnisse der Hypothesentests. **(20P)**

Es wurde bisher unterstellt, dass alle Worte direkt aneinander geschrieben sind. In der Kurzgeschichte dagegen musste sich Legrand entscheiden, ob nicht stattdessen vielleicht die Worttrennungen durch ein Extra-Zeichen, also ein Symbol für das Leerzeichen, mitcodiert wurden.

- d) Sowohl im Englischen als auch im Deutschen sind die Worte im Mittel etwa fünf Buchstaben lang. Entscheiden Sie, ob im vorliegenden verschlüsselten Text die Wörter getrennt sind (also das Leerzeichen codiert wurde) oder nicht. **(15P)**
- e) Um die Wortlängen-Verteilung in den verschiedenen Sprachen besser zu modellieren, wurden typische englische und deutsche Kurzgeschichten ausgezählt. Es ergaben sich folgende Anzahlen:

Wortlänge	Anzahl der Wörter in englischen Texten	Anzahl der Wörter in deutschen Texten	Wortlänge	Anzahl der Wörter in englischen Texten	Anzahl der Wörter in deutschen Texten
1	122	164	10	42	93
2	260	273	11	21	67
3	327	558	12	7	53
4	291	334	13	1	26
5	196	257	14	2	19
6	159	223	15	0	21
7	157	137	16	1	9
8	120	106	mehr als 16	0	3
9	71	99	Gesamtzahlen	1777	2442

Nach dieser Verteilung hat ein Wort im Englischen im Mittel **4,6** Buchstaben, ein Wort im Deutschen aber etwas mehr als **5,1** Buchstaben.

Nehmen wir einmal an, Ihnen würde ein (anderer als oben) verschlüsselter Text von 600 Zeichen Länge vorliegen, bei dem Sie wüssten, dass die Leerzeichen mitcodiert sind, dass also die 600 Zeichen Buchstaben und Leerzeichen bedeuten.

Beschreiben Sie ein Vorgehen unter der Verwendung von Wörtern der Länge 2 und 3, das eventuell eine Entscheidung zwischen Englisch und Deutsch ermöglicht, und begründen Sie, warum es das Gewünschte leistet. **(10P)**

- f) Begründen Sie, dass bei einem in Buchstaben codierten Sprach-Text das Aufeinanderfolgen von Buchstaben *nicht* als Bernoulli-Kette aufgefasst werden kann (im Gegensatz zum Beutel mit den Buchstaben-Steinchen aus Aufgabenteil a)). Illustrieren Sie diesen Sachverhalt an sinnvoll gewählten Beispielen mit deutschen oder englischen Wörtern. **(10P)**

## Anlage 1 zur Aufgabe „Geheimschrift“

Folgende Tabelle gibt die Häufigkeiten der Zeichen in dem verschlüsselten Text aus der Kurzgeschichte von Edgar Allan Poe an:

Zeichen	absolute Häufigkeit
8	33
;	26
4	19
Ø	16
)	16
*	13
5	12
6	11
(	10
Å	8

Zeichen	absolute Häufigkeit
1	8
0	6
9	5
2	5
:	4
3	4
?	3
]	2
–	1
.	1

## Anlage 2 zur Aufgabe „Geheimschrift“

Folgende Tabelle gibt die relative Häufigkeit der Buchstaben von Texten in verschiedenen Sprachen an.

Buchstabe	Deutsch	Englisch	Französisch	Spanisch	Italienisch
<b>a</b>	6,51%	8,17%	7,64%	12,53%	11,74%
<b>b</b>	1,89%	1,49%	0,90%	1,42%	0,92%
<b>c</b>	3,06%	2,78%	3,26%	4,68%	4,50%
<b>d</b>	5,08%	4,25%	3,67%	5,86%	3,73%
<b>e</b>	17,40%	12,70%	14,72%	13,68%	11,79%
<b>f</b>	1,66%	2,23%	1,07%	0,69%	0,95%
<b>g</b>	3,01%	2,02%	0,87%	1,01%	1,64%
<b>h</b>	4,76%	6,09%	0,74%	0,70%	1,54%
<b>i</b>	7,55%	6,97%	7,53%	6,25%	11,28%
<b>j</b>	0,27%	0,15%	0,55%	0,44%	0,00%
<b>k</b>	1,21%	0,77%	0,05%	0,00%	0,00%
<b>l</b>	3,44%	4,03%	5,46%	4,97%	6,51%
<b>m</b>	2,53%	2,41%	2,97%	3,15%	2,51%
<b>n</b>	9,78%	6,75%	7,10%	6,71%	6,88%
<b>o</b>	2,51%	7,51%	5,38%	8,68%	9,83%
<b>p</b>	0,79%	1,93%	3,02%	2,51%	3,05%
<b>q</b>	0,02%	0,10%	1,36%	0,88%	0,51%
<b>r</b>	7,00%	5,99%	6,55%	6,87%	6,37%
<b>s</b>	7,27%	6,33%	7,95%	7,98%	4,98%
<b>t</b>	6,15%	9,06%	7,24%	4,63%	5,62%
<b>u</b>	4,35%	2,76%	6,31%	3,93%	3,01%
<b>v</b>	0,67%	0,98%	1,63%	0,90%	2,10%
<b>w</b>	1,89%	2,36%	0,11%	0,02%	0,00%
<b>x</b>	0,03%	0,15%	0,39%	0,22%	0,00%
<b>y</b>	0,04%	1,97%	0,31%	0,90%	0,00%
<b>z</b>	1,13%	0,07%	0,14%	0,52%	0,49%

## Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung																											
		I	II	III																									
a)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>0,0983 \cdot 10000 = 983</math>. Man braucht also 983 Steinchen mit einem <b>o</b>.</li> <li>• Die Anzahl der Steinchen muss für jeden Buchstaben ganzzahlig sein. Rechnet man so wie oben für alle Buchstabenhäufigkeiten in der italienischen Sprache, so sind auch Primzahlen dabei, z. B. 983. Der g.g.T all dieser natürlichen Zahlen ist also 1, d. h. man kann also die Anzahl der Steinchen durch eine geeignete Division nicht mehr verringern.</li> </ul> <p>Bei 10000 Steinchen ist der Unterschied von fünfmaligem Ziehen mit oder ohne Zurücklegen zu vernachlässigen, weil sich bei der großen Gesamtanzahl von Steinchen die entsprechende Wahrscheinlichkeit so gut wie gar nicht ändert.</p> <p>Unter Annahme konstanter Wahrscheinlichkeiten lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für die geforderten Ereignisse wie folgt bestimmen:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ereignis A: Da im Italienischen die Wahrscheinlichkeit eines Buchstabens, kein <b>E</b> zu sein, bei 88,21% liegt, ist <math>p_A = 0,8821^5 \approx 53,41\%</math>.</li> <li>• Ereignis B: Dies wird über eine binomiale Wahrscheinlichkeit berechnet: Da <math>p_{\text{Konsonant}} = 0,5235</math>, gilt <math>p_B = 5 \cdot 0,5235 \cdot (1 - 0,5235)^4 \approx 13,49\%</math>.</li> <li>• Ereignis C: Da das <b>L</b> beim Ziehen an fünf Positionen erscheinen kann, das <b>U</b> noch an vier Positionen und das <b>R</b> an drei, ergibt sich <math>p_C = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 0,0651 \cdot 0,0301 \cdot 0,0637 \cdot 0,1174^2 \approx 0,01\%</math>.</li> </ul>	15	10																										
b)	<p>Erwartungswerte der beiden jeweils häufigsten Buchstaben:</p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td>Deutscher Text</td> <td>e</td> <td>35,3</td> <td>n</td> <td>19,9</td> </tr> <tr> <td>Englischer Text</td> <td>e</td> <td>25,8</td> <td>t</td> <td>18,4</td> </tr> <tr> <td>Französischer Text</td> <td>e</td> <td>29,9</td> <td>s</td> <td>16,1</td> </tr> <tr> <td>Spanischer Text</td> <td>e</td> <td>27,8</td> <td>a</td> <td>25,4</td> </tr> <tr> <td>Italienischer Text</td> <td>e</td> <td>23,9</td> <td>a</td> <td>23,8</td> </tr> </tbody> </table> <p>Die beiden häufigsten Zeichen im verschlüsselten Goldkäfertext kommen 33-mal und 26-mal vor. Damit scheiden die Möglichkeiten eines italienischen oder eines spanischen Textes schon aus, denn hier sind die häufigsten beiden Buchstaben praktisch gleich häufig.</p> <p>Im Englischen kommt das <b>e</b> 1,4-mal so häufig vor wie das <b>t</b>, im Deutschen kommt das <b>e</b> 1,78-mal so häufig vor wie das <b>n</b>, im Französischen das <b>e</b> gar 1,85-mal so häufig wie das <b>s</b>. Der Text zeigt ein Verhältnis von 1,27. Da liegt das Englische am nächsten.</p> <p>Die eben aufgeführten Zahlen zeigen, dass sich mit diesem Test ein italienischer und ein spanischer Text nur schwer unterscheiden lassen.</p>	Deutscher Text	e	35,3	n	19,9	Englischer Text	e	25,8	t	18,4	Französischer Text	e	29,9	s	16,1	Spanischer Text	e	27,8	a	25,4	Italienischer Text	e	23,9	a	23,8	10	10	
Deutscher Text	e	35,3	n	19,9																									
Englischer Text	e	25,8	t	18,4																									
Französischer Text	e	29,9	s	16,1																									
Spanischer Text	e	27,8	a	25,4																									
Italienischer Text	e	23,9	a	23,8																									



Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	<p>Der häufigste Buchstabe ist – laut Tabelle – in beiden Sprachen das <b>e</b>. Im Englischen taucht dieses mit der relativen Häufigkeit von 12,7 % auf, die wir als Wahrscheinlichkeit deuten. Entsprechend taucht im Deutschen das <b>e</b> mit einer Wahrscheinlichkeit von 17,4 % auf.</p> $\mu_{\text{Englisch}} = 25,78 \quad \sigma_{\text{Englisch}} \approx 4,74 > 3 \text{ (Laplace-Bedingung erfüllt)}$ $\mu_{\text{Deutsch}} = 35,32, \quad \sigma_{\text{Deutsch}} \approx 5,40 > 3 \text{ (Laplace-Bedingung erfüllt)}$ <p>Will man die Nullhypothese <math>H_0</math> : “Der Text ist in deutscher Sprache“ verwerfen, sollte man linksseitig testen.</p> $P_{H_0}(X \leq k) \leq 5\% \Leftrightarrow P_{H_0}\left(\frac{X - \mu_{\text{deu}} + 0,5}{\sigma_{\text{deu}}} \leq \frac{k - \mu_{\text{deu}} + 0,5}{\sigma_{\text{deu}}}\right) \leq 5\%$ $\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k - \mu_{\text{deu}} + 0,5}{\sigma_{\text{deu}}}\right) \leq 5\% \Leftrightarrow \frac{k - \mu_{\text{deu}} + 0,5}{\sigma_{\text{deu}}} \leq -1,645$ $\Leftrightarrow \frac{k - 35,32 + 0,5}{5,40} \leq -1,645 \Leftrightarrow k \leq 25$ <p>Man sollte also im Ablehnungsbereich <math>X \leq 25</math> die Hypothese, der Text sei in deutscher Sprache, verwerfen, was die Daten – <math>X = 33</math> – aber nicht hergeben.</p> <p>Der Fehler 2. Art kann gut berechnet werden, weil zwei einfache Hypothesen vorliegen:</p> $P_{H_1}(X > 25) \approx 1 - \Phi\left(\frac{25 - \mu_{\text{eng}} + 0,5}{\sigma_{\text{eng}}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{25 - 25,78 + 0,5}{4,74}\right) \approx 52\%.$ <p>Will man die Nullhypothese <math>H_0</math> : “Der Text ist in englischer Sprache“ verwerfen, so sollte man rechtsseitig testen.</p> $P_{H_0}(X > k) \leq 5\% \Leftrightarrow P_{H_0}(X \leq k) > 95\%$ $\Leftrightarrow P_{H_0}\left(\frac{X - \mu_{\text{eng}} + 0,5}{\sigma_{\text{eng}}} \leq \frac{k - \mu_{\text{eng}} + 0,5}{\sigma_{\text{eng}}}\right) > 95\%$ $\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k - \mu_{\text{eng}} + 0,5}{\sigma_{\text{eng}}}\right) > 95\% \Leftrightarrow \frac{k - \mu_{\text{deu}} + 0,5}{\sigma_{\text{deu}}} > 1,645$ $\Leftrightarrow \frac{k - 25,78 + 0,5}{4,74} > 1,645 \Leftrightarrow k > 34$ <p>Man sollte also mit dem Ablehnungsbereich <math>X &gt; 34</math> die Hypothese, der Text sei in englischer Sprache, verwerfen, was die Daten – <math>X = 33</math> – auch nicht, aber schon eher, hergeben.</p> <p>Der Fehler 2. Art kann wieder gut berechnet werden, weil zwei einfache Hypothesen vorliegen:</p> $P_{H_1}(X \leq 34) \approx \Phi\left(\frac{34 - \mu_{\text{deu}} + 0,5}{\sigma_{\text{deu}}}\right) \approx \Phi\left(\frac{34 - 35,32 + 0,5}{5,40}\right) \approx 44\%.$			

**Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik**

	<b>Lösungsskizze</b>	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	<p><i><u>Bemerkung 1:</u> Auch andere stimmige Argumentationen sind zulässig.</i></p> <p><i><u>Bemerkung 2:</u> Man kann auch – nicht ganz konform zur Aufgabenstellung – mit <math>\sigma</math>-Intervallen argumentieren:</i></p> <p><i>Nimmt man an, der Text sei in englischer Sprache, dann liegt der ausgezählte Wert 33 um etwa 1,52 Standardabweichungen zu weit rechts, das ist immerhin ein Indiz, diese Annahme in Zweifel zu ziehen.</i></p> <p><i>Umgekehrt: Nimmt man an, der Text sei in deutscher Sprache, dann liegt der ausgezählte Wert 33 nur um etwa 0,43 Standardabweichungen zu weit links, das ist keinerlei Indiz, diese Annahme in Zweifel zu ziehen.</i></p>		10	10
d)	<p>Wenn die Wörter im Schnitt fünf Buchstaben umfassen, muss ebenso im Schnitt jedes sechste Zeichen ein Leerzeichen sein: Das Leerzeichen ist das häufigste Zeichen überhaupt. Bei der Codierung muss also ein Code-Zeichen eine relative Häufigkeit von etwa 17 % aufweisen.</p> <p>Das Code-Zeichen <b>8</b> erfüllt zwar in etwa diese relative Häufigkeit, dann aber passen die nächsthäufigen Zeichen nicht mehr.</p> <p>Wichtiger noch ist folgende Beobachtung: Das Code-Zeichen „<b>8</b>“ tritt in Dopp- lung auf (also zweimal hintereinander) – dies geht bei einem Leerzeichen, zu- mindest bei korrektem Text, nicht.</p> <p>Sollte hingegen das „;“ als Code für das Leerzeichen interpretiert werden (es kommt mit einer Häufigkeit von etwa 13 %, also etwas zu wenig, vor), so er- gibt sich durch Abzählen, dass es viel zu viele lange Wörter geben müsste.</p>		15	

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	<p>Jedem Wort, außer dem letzten, folgt ein Leerzeichen. Mit diesen Werten wären deshalb in einem englischen Text mit 600 Zeichen etwa <math>\frac{600}{4,6+1} - 1 \approx 106</math> codierte Leerzeichen zu erwarten, in einem deutschen Text etwa <math>\frac{600}{5,1+1} - 1 \approx 97</math>.</p> <p>Mit diesem Kriterium lassen sich die Leerzeichen wahrscheinlich identifizieren und damit die Wortlängenstatistik erstellen.</p> <p>(Ein Wort der Länge 2 lässt sich – außer am Anfang und am Ende, dort ist es noch einfacher - daran erkennen, dass nach einem Leerzeichen das nächste drei Positionen später auftaucht, analog vier Positionen später bei Dreibuchstabenwörtern).</p> <p>Bei den gegebenen Verteilungen ergeben sich für einen englischen Text:</p> $p_E(\text{Zweiwort}) = \frac{260}{1777} \approx 14,6\%, \quad p_E(\text{Dreiwort}) = \frac{327}{1777} \approx 18,4\%$ <p>und für einen deutschen Text:</p> $p_D(\text{Zweiwort}) = \frac{273}{2442} \approx 11,2\%, \quad p_E(\text{Dreiwort}) = \frac{558}{2442} \approx 22,9\%$ <p>In einem deutschen Text müssten die Merkmale für Dreibuchstabenwörter also doppelt so häufig auftauchen wie die für Zweibuchstabenwörter, im Englischen nur etwa einviertel Mal so häufig.</p> <p><i>Bemerkung: Wenn nur der letzte Absatz dem Sinn entsprechend ausgeführt wird, sollten nur zwei Punkte abgezogen werden.</i></p>		5	5
f)	<p>Entscheidend ist bei Texten, dass die Buchstaben nicht unabhängig aufeinander folgen, wie es bei einem Bernoulli-Experiment der Fall wäre; es gibt sehr viele häufige Zwei- oder Drei-Buchstaben-Kombinationen.</p> <p>Im Extremfall folgt sogar auf einen Buchstaben notwendig ein anderer – im Deutschen folgt z. B. auf ein <b>q</b> notwendig ein <b>u</b>. Ebenso folgt auf ein <b>c</b> mit großer Wahrscheinlichkeit (über 60 %) ein <b>h</b>, obwohl das <b>h</b> nur eine Häufigkeit von unter 5 % hat.</p> <p>Entsprechend sind im Deutschen Dreibuchstabenkombinationen wie <b>und</b>, <b>der</b> und <b>die</b>, <b>ich</b> o. Ä. wesentlich häufiger, als nach einer einfachen Multiplikation der Häufigkeiten der Einzelbuchstaben zu erwarten wäre.</p> <p>Im Englischen gilt dieses Argument vor allem für die Zweibuchstabenkombination <b>th</b> und die Dreibuchstabenkombination <b>the</b>.</p> <p><i>Anmerkung: Der Grund liegt letztlich darin, dass die Zeichen Laute codieren, die sinntragenden Spracheinheiten aber Morpheme oder auch Silben sind, die aus mehreren Lauten bestehen.</i></p>		5	5
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20