

ANALYSIS 1

I.1 Designervase

Die Firma *Function in Life* bittet ihre Designer, einen Entwurf für die „ultimate Vase“ einzureichen. Diese Vase soll auf einer Wohnkultur-Messe ausgestellt werden und eine „ideale mathematische Ästhetik“ aufweisen. Der Firmensprecher erklärt dazu:

„Die ideale Vase ist nicht nur rotationssymmetrisch; sie ist auch symmetrisch zwischen der oberen und unteren Hälfte, das heißt, wenn man sie umdreht, ändert sich ihr Aussehen nicht.“

Auf die Frage nach der Größe der Vase sagt der Firmensprecher, er wünsche sich eine Gesamthöhe von 12 dm, und der maximale Durchmesser der Vase solle zwischen 3 dm und 4 dm liegen. Das sei zwar etwas kippelig, aber sehr ästhetisch.

Die Designer sollen also eine mathematische Modellierung mit ästhetisch ansprechenden Funktionen vornehmen und die Vase als Rotationskörper von geeigneten Kurven um die x -Achse betrachten; sie brauchen eine Außenkurve mit der Funktion f_a und eine Innenkurve mit der Funktion f_i . Der durch diese Kurven begrenzte Raum soll aus Glas bestehen.

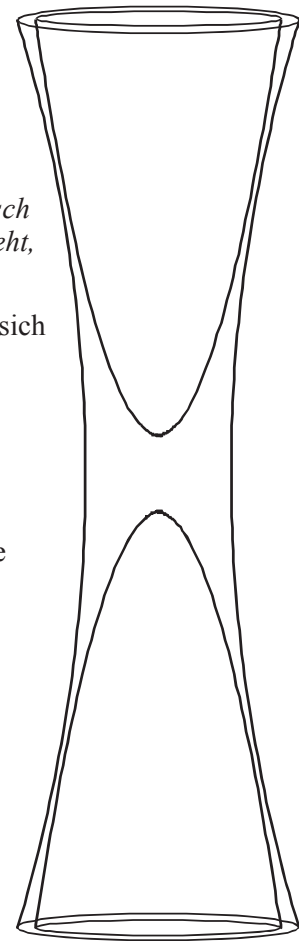
Nach heftigen Diskussionen einigen sich die Designer darauf, folgende Funktionen zu verwenden (alle Maße sind weiterhin in dm):

$$f_a(x) = 1 + \frac{1}{40}x^2 \quad \text{und} \quad f_i(x) = \sqrt{\frac{|x| - 0,5}{2}}.$$

- a) Geben Sie den Definitionsbereich von f_i an und zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen für $x \in [-6, 6]$.
Bestätigen Sie, dass die Rotation der Graphen von f_a und f_i um die x -Achse eine Vase ergibt, deren Mittelteil aus massivem Glas eine Höhe von 1 dm und einen Durchmesser von mindestens 2 dm aufweist.
- b) Berechnen Sie den Winkel, unter dem der äußere Rand der Vase den Fußboden trifft. Zeigen Sie, dass die Forderung des Firmensprechers bezüglich des Durchmessers erfüllt ist.
- c) Nun geht es um die technische Realisierung. Die Designer wollen die Vase aus Glas herstellen. Die Materialexperten sind skeptisch. Eine erste grobe Schätzung der Experten ergibt, dass der Vasenrand als Standfläche einen Flächeninhalt von mindestens $2,5 \text{ dm}^2$ haben muss. Bestätigen Sie, dass diese Forderung eingehalten ist.
- d) Bestimmen Sie, wie viel Wasser (in Litern) maximal in die Vase passt. Zeigen Sie, dass die Vase insgesamt ein Materialvolumen von ca. $18,9 \text{ dm}^3$ aufweist.
Hinweis: Das Volumens V eines Körpers, der durch Rotation des Graphen einer Funktion f um die x -Achse über dem Intervall $[a; b]$ entsteht, berechnet man nach der Formel:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

- e) Die Materialexperten sind weiterhin skeptisch. Sie meinen, dass die Vase überall eine Glasstärke von mindestens $7 \text{ mm} = 0,07 \text{ dm}$ aufweisen muss. Begründen Sie, dass die Differenz $f_a(x) - f_i(x)$ nicht die Glasstärke darstellt. Zeigen Sie, wie Sie die minimale Glasstärke mathematisch bestimmen könnten. Eine explizite Berechnung ist nicht gefordert.



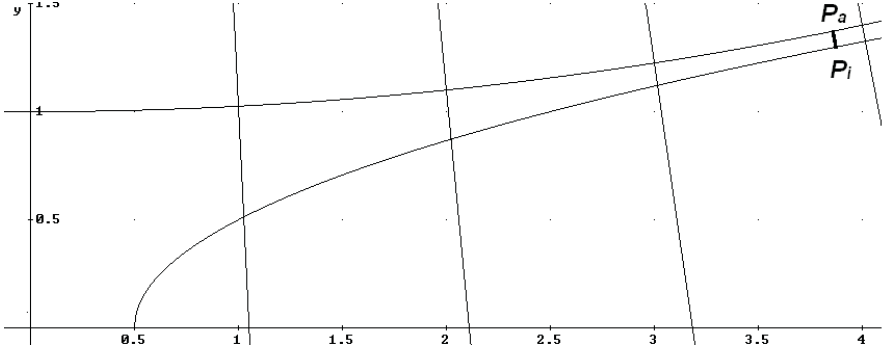
Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Da die Funktion f_i im Reellen nur nichtnegative Argumente haben darf, gilt: $D_{f_i} =]-\infty; -0,5] \cup [0,5; \infty[$.</p> <p>Wenn die Graphen der beiden Funktionen im gleichen Maßstab von x- und y-Achse gezeichnet sind, ergibt sich etwa folgendes Diagramm:</p> <p>Zwischen $x_l = -0,5$ und $x_r = 0,5$ ist f_i nicht definiert; das bedeutet hier, dass die Vase in diesem Bereich aus massivem Glas besteht, das mindestens 1 dm hoch (dick) ist, da $x_r - x_l = 1$.</p> <p>Der Scheitelpunkt der nach oben geöffneten Parabel f_a ist $S(0 1)$, $f_a(0)$ ist also minimal und der Durchmesser ist daher mindestens 2 dm.</p>	15		
b)	<p>Um den Winkel zu erhalten, mit dem die Vase außen den Boden berührt, muss der Winkel berechnet werden, den f_a am Rand des Definitionsbereichs hat. Dazu wird die Ableitung von f_a benötigt:</p> $f_a'(x) = \frac{1}{20}x.$ <p>Da $f_a'(6) = 0,3$ und dieser Wert den Tangens der Tangentensteigung darstellt, ergibt sich für den gesuchten Winkel α: $\alpha = 90^\circ - \arctan(0,3) \approx 73,30^\circ$. Der Rand der Vase trifft also den Fußboden unter einem Winkel von etwa 73°. Der Bodendurchmesser d der Vase bestimmt sich mit $d = 2 \cdot f_a(6) = 3,8$. Dieser Wert liegt im geforderten Bereich.</p>		20	
c)	<p>Die Aufstandsfläche ist ein Kreisring. Seine Fläche ergibt sich durch</p> $A = \pi \cdot (f_a^2(6) - f_i^2(6))$ $= \pi \cdot (3,61 - \frac{5,5}{2})$ $= 2,7017\dots$ <p>Mit ca. $2,7 \text{ dm}^2$ ist die Forderung der Materialexperten erfüllt.</p>	10		
d)	<p>Das Wasservolumen ist das Volumen des Rotationskörpers, das durch die Rotation des Funktionsgraphen von f_i um die x-Achse in den Grenzen $0,5$ (Vasenboden) und 6 (oberer Rand) entsteht.</p>			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Auszuwerten ist also der Ausdruck $V_W = \pi \int_{0,5}^6 \left(\sqrt{\frac{x-0,5}{2}} \right)^2 dx$ (auf den Betrag kann verzichtet werden, da sich die Rechnung nur auf positive x-Werte bezieht).</p> <p>Es gilt:</p> $V_W = \pi \cdot \int_{0,5}^6 \left(\sqrt{\frac{x-0,5}{2}} \right)^2 dx$ $= \pi \cdot \int_{0,5}^6 \frac{x-0,5}{2} dx$ $= \frac{\pi}{4} \cdot [x^2 - x]_{0,5}^6$ $\approx 23,7583.$ <p>In die Vase passen also knapp 24 l Wasser.</p> <p>Um das Materialvolumen der Vase zu bestimmen, muss man vom Rotationskörper, der durch die Rotation von f_a in den Grenzen von -6 bis 6 entsteht, das Zweifache des eben ermittelten Wasservolumens abziehen.</p> <p>Es ist also der folgende Ausdruck auszuwerten:</p> $V_G = \pi \int_{-6}^6 \left(1 + \frac{1}{40} x \right)^2 dx - 2 \cdot V_W.$ <p>Es gilt:</p> $V_G = \pi \cdot \int_{-6}^6 \left(1 + \frac{1}{40} x^2 \right)^2 dx - 2 \cdot V_W$ $= \pi \int_{-6}^6 \left(1 + \frac{1}{20} x^2 + \frac{1}{1600} x^4 \right) dx - 2 \cdot V_W$ $= \pi \cdot \left[\frac{x^5}{8000} + \frac{x^3}{60} + x \right]_{-6}^6 - 2 \cdot V_W$ $\approx 18,9092.$ <p>Dies ist im Rahmen der Genauigkeit der angegebene Wert.</p>			
e)	<p>Die Differenz $d(x) = f_a(x) - f_i(x)$ gibt bei der Vase stets die Strecke von Außen- zu Innenwand <u>in der Waagerechten</u> an (die Vase ist gegenüber der Darstellung mit Funktionsgraphen ja in der Realität „um 90° gekippt“). Die Wände stehen aber nirgendwo lotrecht, also ist diese Differenz an jeder Stelle stets größer als der jeweils kürzeste Weg von Wand zu Wand.</p> <p>Um die Glasstärke an einem Punkt z.B. auf der Außenfläche zu bestimmen, müsste man von diesem Punkt aus das Minimum aller Abstände zu Punkten auf der Innenfläche bestimmen. Wegen der Rotationssymmetrie genügt es, den Sachverhalt zweidimensional zu betrachten, also die Abstände zwischen Punkten auf den Graphen von f_a und f_i. Da die Funktion f_i differenzierbar ist,</p>			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>steht die minimale Verbindungsstrecke von einem beliebigen Punkt auf dem Graphen f_a zu allen Punkten auf dem Graphen von f_i senkrecht auf der zugehörigen Tangente an den Graphen von f_i. Um die Forderung der Materialexperten zu erfüllen, müsste der <u>globale</u> Minimalabstand größer oder gleich 7 mm sein, d.h. man müsste den oben bestimmten Minimalabstand als Funktion des ausgewählten Punktes auf dem Graphen von f_a nochmals minimieren. Mit dem gleichen Argument folgt, dass der gesuchte Minimalabstand durch eine Verbindungsstrecke von je einem Punkt auf dem Graphen von f_a und f_i realisiert wird, die normal zu beiden Graphen ist.</p>  <p>Die Länge dieses Weges $\overline{P_i P_a}$ ergibt dann wirklich die minimale Glasstärke.</p> <p><u>Bemerkung:</u> In dieser Präzision wird keine Schülerlösung erwartet, aber wesentliche Gedanken dieser Argumentation sollten deutlich werden.</p> <p>Tatsächlich haben f_a und f_i bei $x \approx 3,85847$ dieselbe Steigung.</p> <p>Da die Steigung der beiden Randkurven im betrachteten Bereich etwa 0,2 ist, weisen die Normalen eine Steigung von etwa -5 auf. Bei 1 cm Glasdicke würden also Eintritts- und Austrittsstelle um etwa 2 mm – entsprechend 0,02 in den verwendeten Einheiten – differieren. Diese Differenz ist so klein, dass die verwendete Näherung zulässig ist.</p> <p>Es ist $d(3,855847) \approx 7,63$ mm ; auf der Normalen reduziert sich dieser Wert zur (sehr genau bestimmten) Glasstärke von ca. 7,5 mm.</p>			20
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

ANALYSIS 2

I.2 Strickwaren

Ein Strickwarenhersteller produziert Mützen.

Dem Unternehmen entstehen bei der Produktion Kosten in folgender Weise: Die Fixkosten belaufen sich auf 24 000 €. Bei einer Produktionsmenge von 10 000 Stück ergeben sich Gesamtkosten von 78 000 €, bei 20 000 Stück betragen die Gesamtkosten 96 000 €. Bei einer Menge von 40 000 Stück betragen die Gesamtkosten 120 000 €.

Die Gesamtkosten sollen durch eine ganzrationale Funktion K dritten Grades dargestellt werden. Hierbei soll x die Menge in 1 000 Stück sein. Die Einheit der Gesamtkosten soll 1 000 € sein.

- a) Bestimmen Sie aus den Angaben die Funktionsgleichung der Gesamtkosten.
[Zur Kontrolle: $K(x) = 0,004x^3 - 0,3x^2 + 8x + 24$].

Die Mützen werden am Markt zu einem Preis von 4,80 € pro Stück angeboten.

- b) Die Gewinnschwelle wird bei einer Absatzmenge von 20 000 Stück erreicht. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Gewinnfunktion. Berechnen Sie danach:
- Gewinngrenze,
 - Produktions-/ Absatzmenge, bei welcher der maximale Gewinn erzielt wird,
 - den maximalen Gewinn.

Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion in das Koordinatensystem in der Anlage ein und kennzeichnen Sie die Gewinnzone.

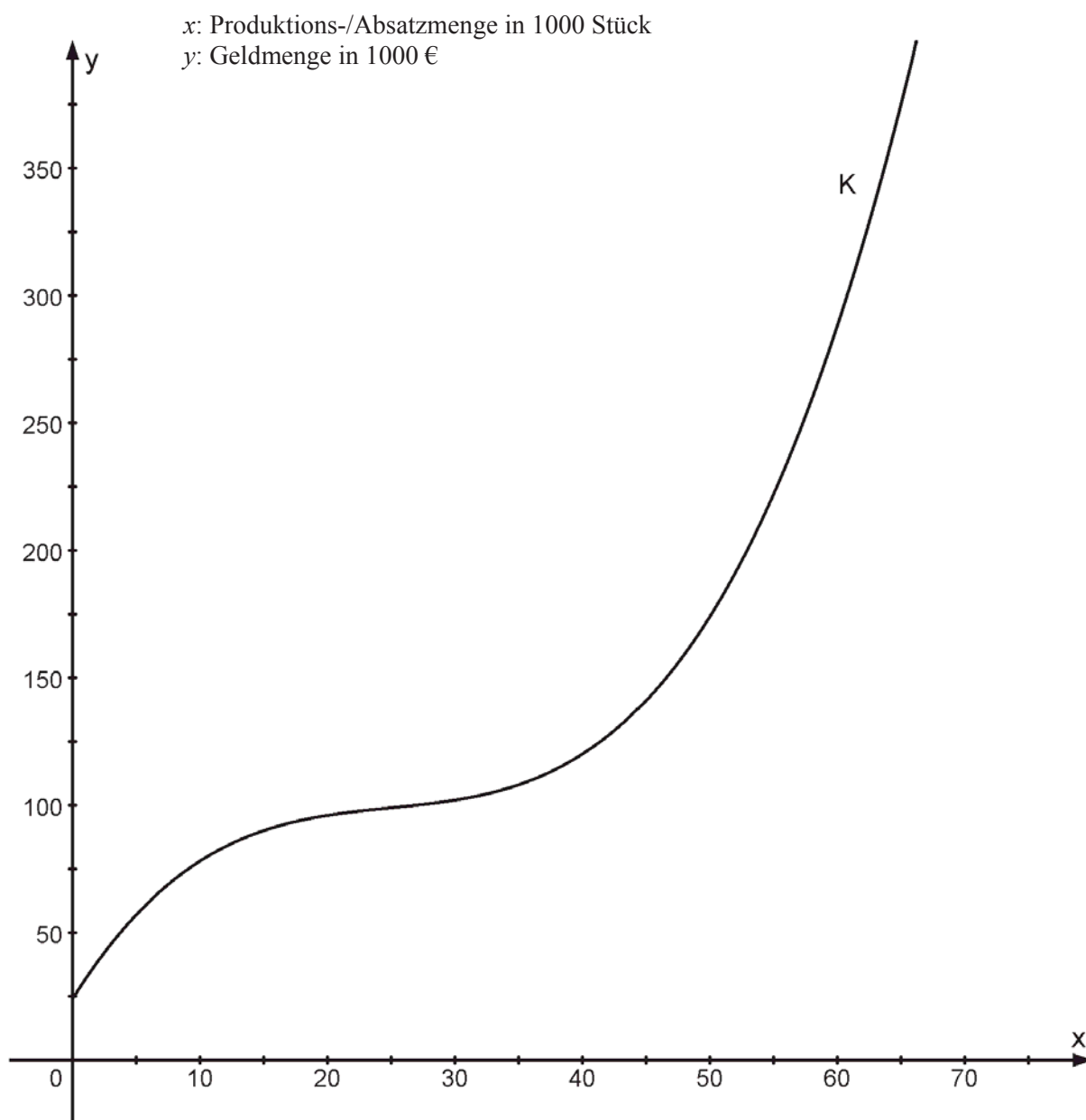
- c) Die Vertriebsabteilung sagt voraus, dass der derzeitige Preis über die Sommermonate am Markt nicht zu halten sein wird. Ermitteln Sie näherungsweise mit einer Genauigkeit von einer Nachkommastelle einen Preis, bei welchem gerade noch Kostendeckung erreicht wird.
- d) Das Unternehmen ist mit weiteren Produkten am Markt vertreten. Für eine neue Faserart ist das Unternehmen Alleinanbieter. Der Preis ist somit nicht konstant, sondern von der angebotenen Menge abhängig. Der Zusammenhang zwischen Preis und Menge ist durch folgendes Untersuchungsergebnis dokumentiert:

Menge x	5 000	10 000	20 000	40 000
Preis p	14,14	10,00	5,00	1,25

x : Angebotene Fasermenge in m
 p : Preis in Euro pro m

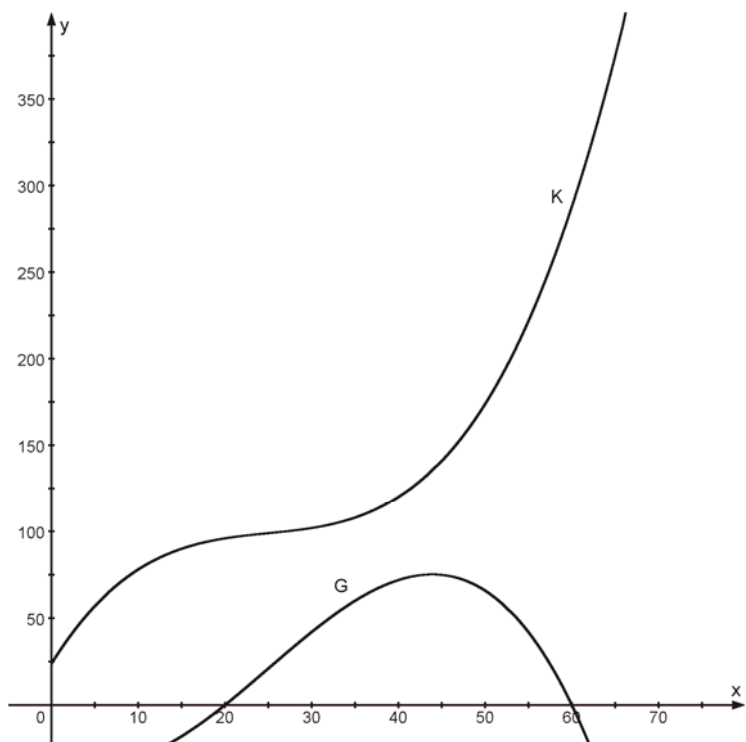
Bestimmen Sie aus den Angaben eine mögliche Preisfunktion gemäß dem exponentiellen Ansatz $p(x) = p_0 \cdot e^{-\lambda x}$ und begründen Sie, warum dieser Ansatz eine marktgerechte Preisentwicklung beschreibt.

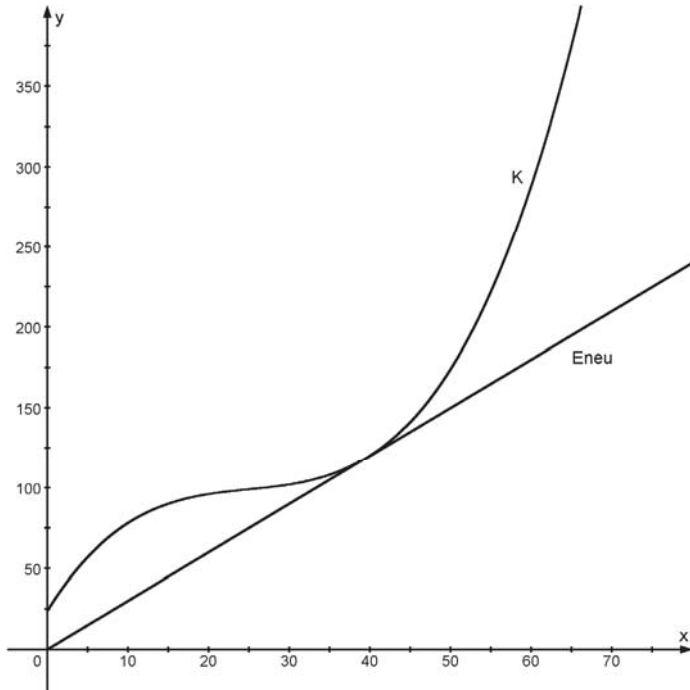
Anlage zur Aufgabe „Strickwaren“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p><u>Bestimmung der Gesamtkostenfunktion:</u> Ansatz: $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$</p> $\begin{aligned} K_{fix} &= 24 \Rightarrow & d &= 24 \\ K(10) &= 78 \Rightarrow a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d = 78 \\ K(20) &= 96 \Rightarrow a \cdot 20^3 + b \cdot 20^2 + c \cdot 20 + d = 96 \\ K(40) &= 120 \Rightarrow a \cdot 40^3 + b \cdot 40^2 + c \cdot 40 + d = 120 \end{aligned}$ <p>Die Lösung des Gleichungssystems ist mit dem Gauß-Verfahren möglich: Erweiterte Koeffizientenmatrix:</p> $\left(\begin{array}{ccc c} 1.000 & 100 & 10 & 54 \\ 8.000 & 400 & 20 & 72 \\ 64.000 & 1.600 & 40 & 96 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc c} 500 & 50 & 5 & 27 \\ 2.000 & 100 & 5 & 18 \\ 8.000 & 200 & 50 & 12 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc c} 500 & 50 & 5 & 27 \\ 0 & 20 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & 3 & 24 \end{array} \right)$ $a = \frac{1}{250} = 0,004; b = -\frac{3}{10}; c = 8.$ $K(x) = 0,004x^3 - 0,3x^2 + 8x + 24.$	20		
b)	<p>$p = 4,8, E(x) = 4,8x,$ $G(x) = E(x) - K(x) = -0,004x^3 + 0,3x^2 - 3,2x - 24.$</p> <p><u>Berechnung der Gewinngrenze:</u> $G(x) = 0.$</p> <p>Da die Gewinnschwelle gegeben ist, kann mit Hilfe der Polynom-Division oder des Horner-Schemas der Ausgangsterm faktorisiert werden.</p> $\begin{aligned} -0,004x^3 + 0,3x^2 - 3,2x - 24 &= 0 \\ (x - 20)(-0,004x^2 + 0,22x + 1,2) &= 0 \\ x - 20 = 0 \vee -0,004x^2 + 0,22x + 1,2 &= 0 \\ x_{01} = 20 \vee x_{02} = 60 \vee x_{03} &= -5 \end{aligned}$ <p>Die Gewinngrenze liegt bei 60 000 Stück.</p> <p><u>Berechnung des Gewinnmaximums:</u> $G'(x) = 0 \wedge G''(x) < 0,$ $G'(x) = -0,012x^2 + 0,6x - 3,2,$ $G''(x) = -0,024x + 0,6.$</p> $G'(x) = 0 \Rightarrow -0,012x^2 + 0,6x - 3,2 = 0 \Rightarrow x_{11} = 43,9 \vee x_{12} = 6,07,$ $G''(43,9) = -0,454 < 0, \text{ lokaler Hochpunkt,}$ $G''(6,07) = 0,454 > 0, \text{ lokaler Tiefpunkt.}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>$G(43,9) = 75,3$.</p> <p>Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von 43 900 Stück erreicht. Er beträgt 75 300 Euro.</p>  <p>Die Gewinnzone beginnt bei einer Menge von 20 000 Stück (Gewinnschwelle) und endet bei einer Menge von 60 000 Stück (Gewinngrenze).</p>	10	25	
c)	<p>Das Unternehmen arbeitet gerade noch mit Kostendeckung, wenn die Erlöse höchstens genauso groß sind wie die Kosten:</p> <p>Die minimalen Stückkosten sind gleichbedeutend mit dem Mindestpreis:</p> $k(x) = \frac{K(x)}{x} = 0,004x^2 - 0,3x + 8 + \frac{24}{x}$ <p>Für das Stückkostenminimum gelten die Bedingungen: $k'(x) = 0 \wedge k''(x) > 0$</p> $k'(x) = 0,008x - 0,3 - \frac{24}{x^2}$ $k''(x) = 0,008 + \frac{48}{x^3}$ $0,008x - 0,3 - \frac{24}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 37,5x^2 - 3.000 = 0.$ <p>Mit Hilfe des Newton-Verfahrens kann eine Näherungslösung gefunden werden:</p> $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Mit einem Startwert von $x_1 = 40$ ergibt sich folgende Reihe:</p> $x_2 = 39,444$ $x_3 = 39,429$ <p>Die Nullstelle der Ableitung ist also näherungsweise: 39,4. $k''(39,4) = 0,00878 > 0 \Rightarrow$ lokaler Tiefpunkt. $k(39,4) = 2,999 \approx 3,00$.</p> <p>Das Stückkostenminimum wird bei einer Menge von 39 400 Stück erreicht und beträgt ca. 3,00 €.</p>  <p>Alternativ kann der Mindestpreis aus folgender Betrachtung heraus bestimmt werden:</p> $K(x) = p_{\min} \cdot x \wedge K'(x) = p_{\min} \Rightarrow K(x) = K'(x) \cdot x$ $\Rightarrow 0,004x^3 - 0,3x^2 + 8x + 24 = (0,012x^2 - 0,6x + 8) \cdot x$ $\Leftrightarrow x^3 - 37,5x^2 - 3\,000 = 0.$ <p>Die Lösung kann analog zur oberen Rechnung erfolgen.</p>			
	<p>d) <u>Ermittlung der Preisfunktion:</u> Der Ansatz $p(x) = p_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ enthält zwei Unbekannte. Es sind vier Angaben vorhanden, aus denen diese bestimmt werden können. Man erhält ein überbestimmtes Gleichungssystem:</p>		15	15

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$p(5\,000) = 14,14 \Rightarrow p_0 \cdot e^{\lambda \cdot 5\,000} = 14,14$ $p(10\,000) = 10 \Rightarrow p_0 \cdot e^{\lambda \cdot 10\,000} = 10$ $p(20\,000) = 5 \Rightarrow p_0 \cdot e^{\lambda \cdot 20\,000} = 5$ $p(40\,000) = 1,25 \Rightarrow p_0 \cdot e^{\lambda \cdot 40\,000} = 1,25$ Zur Lösung genügt es zwei Gleichungen zu betrachten, z.B.: $\frac{p(10.000)}{p(20.000)} \Rightarrow 2 = e^{\lambda \cdot 10.000} \Rightarrow \lambda \approx 6,93 \cdot 10^{-5}$ $p(10.000) = 10 \Rightarrow 2 = p_0 \cdot e^{-6,93 \cdot 10^{-5} \cdot 10.000} \Rightarrow p_0 \approx 20$ Es ergibt sich: $p(x) = 20 \cdot e^{-6,93 \cdot 10^{-5} \cdot x}$ Die Funktion beschreibt eine marktgerechte Preisentwicklung. Bei steigender Absatzmenge fällt der zu erzielende Marktpreis. Die Funktion p fällt monoton.			
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

II.1 Flugrouten

Wir betrachten zunächst in den Aufgabenteilen a) und b) ein **lokales** dreidimensionales rechtwinkliges Koordinatensystem.

Im Koordinatenursprung befindet sich ein Flughafen (genauer: der Abhebepunkt auf einer Startbahn).

$$(x | y | z) = (\text{Osten} | \text{Norden} | \text{Oben}).$$

Die x - y -Ebene beschreibt also die horizontale Ebene, in der der Flughafen liegt. Die Längeneinheit in allen drei Richtungen beträgt 1 km.

Ein Flugzeug startet näherungsweise geradlinig, seine Flugbahn kurz nach dem Abheben lässt sich durch die Gleichung

$$\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 43 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}^+$$

beschreiben.

- Geben Sie begründet die Himmelsrichtung an, in die das Flugzeug startet, und berechnen Sie den Steigungswinkel.
- Als das Flugzeug vom Abflugort 30 km zurückgelegt hat, verschwindet es in einer Wolkendecke. Bestimmen Sie die Höhe der Wolkendecke an dieser Stelle über der x - y -Ebene (Horizontalebene am Flughafen).
Der Abstand von 30 km vom Startpunkt ist zwar klein verglichen mit dem Erdradius R . Dennoch ist durch die Erdkrümmung die Höhe der Wolkendecke über der Erdoberfläche etwas größer als die zuvor berechnete Höhe über der x - y -Ebene. Ermitteln Sie diesen Unterschied. (Rechnen Sie mit $R = 6370$ km).

Hinweis: Der Erdmittelpunkt hat in dem betrachteten Koordinatensystem die Koordinaten

$$M(0 | 0 | -6370).$$

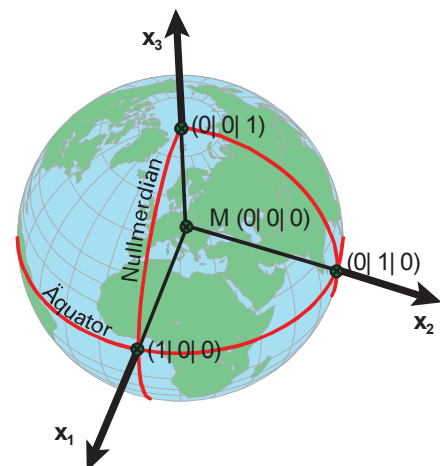
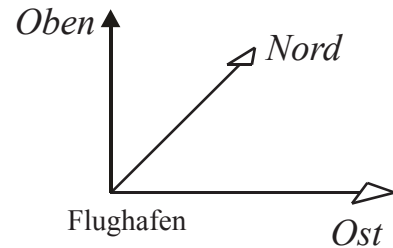
- Der betrachtete Start-Flughafen sei Oslo (geografische Koordinaten: $60,2^\circ$ Nord; $11,1^\circ$ Ost). Der Zielflughafen sei Quebec (geografische Koordinaten: $46,8^\circ$ Nord; $71,2^\circ$ West). Beschreiben Sie ohne zu rechnen mit geometrischen Argumenten den Verlauf der kürzesten Flugroute.

Im Weiteren betrachten wir **ein globales erdgebundenes** rechtwinkliges dreidimensionales Koordinatensystem (vgl. Abbildung rechts). Die Längeneinheit in allen drei Richtungen sei also gerade der Erdradius ($1 \text{ LE} \hat{=} 6370 \text{ km}$).

- Ermitteln Sie die Koordinaten von Oslo und Quebec in diesem Koordinatensystem und dann den (sphärischen) Winkel $\sphericalangle(\text{Oslo}, M, \text{Quebec})$

Bestimmen Sie die Länge der kürzesten Flugroute von Oslo nach Quebec in km. Gehen Sie dabei der Einfachheit halber davon aus, dass die Flughöhe konstant 10 km beträgt (dass das Flugzeug also auf einer Kugel mit dem Radius 6380 km fliegt).

- Begründen Sie ein mögliches Verfahren, wie man den nördlichsten Punkt dieser Flugroute bestimmen könnte.

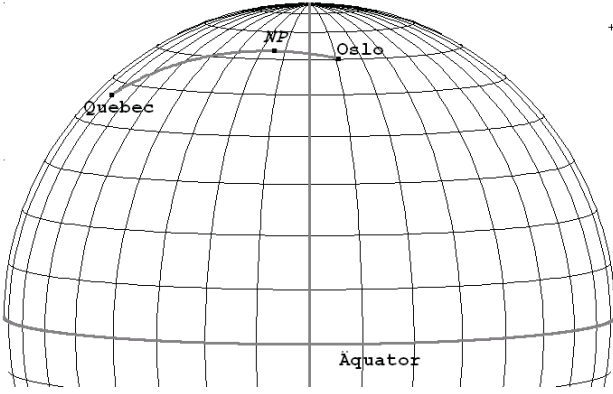


Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Das Flugzeug fliegt genau nach Nordwesten, da die Ostkomponente und die Nordkomponente des Flug-Richtungsvektors dem Betrage nach gleich sind und außerdem die Nordkomponente positiv ist und die Ostkomponente negativ (d.h. West) ist.</p> <p>Der Steigungswinkel kann entweder elementargeometrisch bestimmt werden:</p> <ul style="list-style-type: none"> Wenn sich das Flugzeug in horizontaler Richtung $\sqrt{100^2 + 100^2}$ km bewegt, steigt es 43 km. Also gilt für den Steigungswinkel: $\alpha = \arctan\left(\frac{43}{\sqrt{2} \cdot 100}\right) \approx 16,9^\circ.$ <p>oder mit den Methoden der Analytischen Geometrie:</p> <ul style="list-style-type: none"> Für den Winkel β zwischen dem Flug-Richtungsvektor und einem Normalenvektor zur Horizontalebene – z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – gilt: $\beta = \arccos\left(\frac{ \vec{v} \cdot \vec{n} }{ \vec{v} \cdot \vec{n} }\right) = \arccos\left(\frac{43}{\sqrt{100^2 + 100^2 + 43^2}}\right)$ $= \arccos\left(\frac{43}{\sqrt{21\,849}}\right) \approx 73,1^\circ.$ <p>Die gesuchte Größe des Neigungswinkels α ist komplementär zu β bzgl. 90°, also $\alpha = 16,9^\circ$.</p>	15		
b)	<p>Sei P der Punkt, in dem das Flugzeug in die Wolkendecke eintaucht.</p> <p>Es gilt $\vec{P} = s \cdot \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 43 \end{pmatrix}$ und $\vec{P} = s \cdot \left \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 43 \end{pmatrix} \right = 30$.</p> <p>Also $s = \frac{30}{\sqrt{21\,849}}$. Und damit: $\vec{P} = \frac{30}{\sqrt{21\,849}} \cdot \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 43 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -20,296 \\ 20,296 \\ 8,727 \end{pmatrix}$</p> <p>Die z-Komponente von \vec{P} ist die Höhe der Wolkendecke an dieser Stelle über der x-y-Ebene (Horizontalebene am Flughafen). Die gesuchte Höhe ist also 8 727 m.</p> <p>Der Erdmittelpunkt liegt (bei Annahme der Erde als einer idealen Kugel) im Abstand des Erdradius lotrecht unter jedem Punkt der Erdoberfläche, hat also in dem betrachteten lokalen Koordinatensystem die Koordinaten $M(0 \mid 0 \mid -6370)$.</p> <p>Der Abstand von M zu P beträgt $\vec{P} - \vec{M} = 6378,79$. Um die Höhe von P über der idealen Erdoberfläche zu bestimmen, muss von diesem Wert der Erdradius subtrahiert werden. Es ergibt sich eine Höhe von 8 792 m.</p>			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Die Differenz der beiden Höhen beträgt also ca. 65 m.</p> <p><i>Bemerkung:</i> Natürlich ist die hier verwendete Rechengenauigkeit für den Erdmittelpunkt M unsinnig, da bekanntlich der Abstand von Punkten auf der Erdoberfläche (selbst bei NN) um bis zu ca. 20 km schwankt, und somit der Wert für den Erdradius nur ein sehr grober Näherungswert ist. Dennoch ist das Ergebnis nicht unsinnig, da dieser Fehler bei der Differenzbildung $\vec{P} - \vec{M}$ – Erdradius im Wesentlichen selbst korrigiert wird. Diese Betrachtung wird hier aber nicht erwartet. Wichtig ist die Größenordnung des Ergebnisses von gut 60 m.</p>		20	10
c)	<p>Die kürzeste Verbindung von zwei Punkten auf einer Kugeloberfläche (hier mit dem Radius 6 370 km +10 km) liegt auf einem Großkreis durch die beiden Punkte. Das ist ein Weg mit der geringsten Krümmung. Liegen die beiden Punkte nicht polar gegenüber, so ist der Großkreis und der zugehörige Verbindungsbogen eindeutig. Man erhält diesen Großkreis als Schnittkreis der Kugel mit der Ebene durch die beiden Punkte und den Kugelmittelpunkt.</p>	10	10	
d)	<p>Die Bestimmung der kartesischen Koordinaten von Oslo und Quebec im globalen erdgebundenen Koordinatensystem erfolgt mit Hilfe der Formel $(\cos \lambda \cdot \cos \varphi \mid \sin \lambda \cdot \cos \varphi \mid \sin \varphi)$, wobei φ jeweils die geographische Breite und λ jeweils die geographische Länge bezeichnet.</p> <p>Die Umrechnung der geographischen Koordinaten von Oslo ergibt: $Os(0,48767690 \mid 0,095678 \mid 0,867765)$.</p> <p>Die Umrechnung der geographischen Koordinaten von Quebec ergibt: $Qu(0,220606 \mid -0,648026 \mid 0,728969)$.</p> <p>Berechnung des Winkels $\varepsilon = \sphericalangle(Oslo, M, Quebec)$</p> <p>Da $Os = 1$ und auch $Qu = 1$, ist die Rechnung mit Hilfe des Skalarproduktes sehr einfach: $\varepsilon = \arccos(Os \cdot Qu) \approx 47,3^\circ$.</p> <p>Der Umfang des ganzen Flug-Großkreises beträgt: $U = 2\pi \cdot 6380$ km, und somit beträgt die gesuchte Länge des Großkreisbogens: $B = \frac{\varepsilon}{360^\circ} \cdot U \approx 5\,267$ km.</p> <p><i>Bemerkung:</i> Wenn man ε im Bogenmaß hat, kann man einfacher rechnen: $B = 6380 \text{ km} \cdot \varepsilon$.</p>		20	

Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	<p>Der nördlichste Punkt auf dem Kreisbogen B ist derjenige Punkt, der in dem betrachteten globalen erdgebundenen Koordinatensystem den größten x_3-Wert hat.</p> <p><i>Dieser liegt lotrecht 10 km über dem nördlichsten Punkt des Großkreises auf der Erdoberfläche durch Oslo und Quebec, wir können uns deshalb der Einfachheit halber auf diesen Großkreis konzentrieren und nicht auf die 10 km höher liegende Flugroute.</i></p> <p>Ein möglicher Weg, den gesuchten nördlichsten Punkt zu finden, besteht z.B. darin, eine geeignete Parametrisierung des Großkreisbogens B' von Oslo nach Quebec zu betrachten, die x_3-Komponente als Funktion dieses Parameters aufzufassen und dann das zugehörige Maximierungsproblem zu lösen.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Der Parameter könnte z.B. der sphärische Winkel von Oslo bis zu dem betrachteten Punkt sein. • Ein anderer Weg – am einfachsten im Ansatz – besteht darin, dass man zunächst die <u>Strecke</u> zwischen Oslo und Quebec durch $\vec{F} = (1-t) \cdot \vec{Os} + t \cdot \vec{Qu}$, $0 \leq t \leq 1$ darstellt und dann diese Punkte (Vektoren) normiert, denn die Punkte (Vektoren) auf B' haben ja alle den Betrag 1: $\vec{B}' = \frac{(1-t) \cdot \vec{Os} + t \cdot \vec{Qu}}{ (1-t) \cdot \vec{Os} + t \cdot \vec{Qu} }, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (*)$ • Ein dritter Weg betrachtet gleichzeitig die Gleichung der Kugeloberfläche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ und eine Parameterform der Ebene durch den Erdmittelpunkt (=Nullpunkt), Os und Qu, also $E : s \cdot Os + t \cdot Qu$ $s, t \in \mathbb{R}$. Die Kugelgleichung erlaubt es, einen der beiden Parameter der Ebene als Funktion des anderen zu betrachten, also zu eliminieren. Dann bleibt ein Parameter, der die wichtige x_3-Komponente bestimmt, die maximiert werden muss. 			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p><i>Bemerkung: Mehr als dieser oder ein vergleichbarer Text ist hier nicht verlangt. Als Hinweis für die Korrektur führen wir die Rechnung hier noch aus:</i></p> <p><i>Wir rechnen mit stark gerundeten Werten:</i></p> <p>$O_s = (0,488 \mid 0,096 \mid 0,868)$, $Q_u = (0,220606 \mid -0,648026 \mid 0,728969)$.</p> <p><i>Eingesetzt in (*) erhält man für die x_3-Komponente:</i></p> $x_3(t) = \frac{0,707106 \cdot (868 - 139 \cdot t)}{\sqrt{322073 \cdot t^2 - 322372 \cdot t + 500392}} . \text{ Abgeleitet ergibt sich}$ $x_3'(t) = \frac{353553 \cdot (7035496 - 25715451 \cdot t)}{5000 \cdot \sqrt{(322073 \cdot t^2 - 322372 \cdot t + 500392)^3}} \text{ mit der Nullstelle}$ <p>$t_1 \approx 0,27359$.</p> <p><i>Diesem Parameter entspricht ungefähr der Punkt:</i></p> <p>$NP(0,4442 \mid -0,11513 \mid 0,88849)$.</p> <p><i>Aus inhaltlichen Gründen kann dem nur ein <u>maximaler</u> Wert von x_3 entsprechen.</i></p> <p><i>Wir rechnen die geographischen Koordinaten zurück:</i></p> <p>$\varphi \approx \arcsin 0,88849 \approx 62,7^\circ$,</p> <p>$\lambda \approx \arcsin \left(\frac{-0,115134}{\cos \varphi} \right) \approx -14,5^\circ$,</p> <p><i>also ein Punkt im Nordatlantik knapp südöstlich von Island.</i></p>			15
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

II.2 Büromöbel

Der deutsche Büromöbelhersteller OfficeComfort lässt in einem Zweigwerk P in Polen Bauteile herstellen, die anschließend im Hauptwerk H in Westdeutschland zu so genannten Endkomponenten von Büromöbeln verarbeitet und von dort aus direkt vermarktet werden.

Im Zweigwerk P werden in einer ersten Stufe die Rohstoffe R_1, R_2, R_3 und R_4 zu den Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3 verarbeitet. In einer zweiten Stufe werden aus den drei Zwischenprodukten die Bauteile B_1, B_2 und B_3 hergestellt. Die folgenden Tabellen geben den bei der Fertigung auftretenden Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) und die Material- und Fertigungskosten in Geldeinheiten (GE) an:

$R \rightarrow Z$	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	4	8	0
R_2	0	2	3
R_3	3	0	2
R_4	5	1	2

$Z \rightarrow B$	B_1	B_2	B_3
Z_1	4	2	2
Z_2	1	3	3
Z_3	2	2	6

Kosten für je eine ME der Rohstoffe in GE	R_1	R_2	R_3	R_4
	1	2	3	1

Kosten für die Fertigung je einer ME der Zwischenprodukte in GE	Z_1	Z_2	Z_3
	4	3	1

Kosten für die Fertigung je einer ME der Bauteile in GE	B_1	B_2	B_3
	2	4	6

- a) Berechnen Sie die Rohstoff-/Bauteilematrix C_{RB} und bestimmen Sie für je eine Mengeneinheit (ME) der Bauteile B_1, B_2 und B_3 den Vektor der Rohstoffkosten \vec{k}_R^T , den Vektor der Fertigungskosten der Zwischenprodukte \vec{k}_Z^T und den Vektor der Herstellkosten der Bauteile (= Summe der Rohstoffkosten und der Fertigungskosten für die Zwischenprodukte und der Bauteile) \vec{k}_{HerB}^T .

$$(\text{Zur Kontrolle: } C_{RB} = \begin{pmatrix} 24 & 32 & 32 \\ 8 & 12 & 24 \\ 16 & 10 & 18 \\ 25 & 17 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{k}_{HerB}^T = (136 \quad 126 \quad 188))$$

- b) Wegen Renovierungsarbeiten im Rohstofflager soll das Lager komplett geräumt und der durch den Rohstoffvektor $\vec{x}_R = (3584 \quad 1888 \quad 1776 \quad 2144)^T$ angegebene Bestand verbraucht werden. Der Lagerleiter behauptet, dass sich der Bestand an R_1, R_2 und R_3 bei der Herstellung von Bauteilen vollständig aufbrauchen ließe, der von R_4 aber noch ergänzt werden müsse. Bestimmen Sie die Produktionsmengen der Bauteile B_1, B_2 und B_3 , die sich aus den Rohstoffbeständen herstellen lassen, und geben Sie die noch zu ergänzende Menge von R_4 an.

Das Hauptwerk H verarbeitet die Bauteile B_1 , B_2 und B_3 zu den Büromöbel-Endkomponenten E_1 , E_2 und E_3 . Sowohl der Bedarf an Bauteilen in ME als auch die bei der Herstellung der Endkomponenten entstehenden Fertigungskosten in GE sind bedingt durch Produktstrategien, die von Billigmöbeln bis zu hochwertigen Qualitätsmöbeln reichen, zusätzlich von einem Parameter $t \in [1;10]$ abhängig.

Der Materialbedarf und die Fertigungskosten sind der folgenden Matrix D_t und dem Vektor $\vec{k}_{t,E}^T$ zu entnehmen:

$$D_t = \begin{pmatrix} 2 & 2t & 6 \\ 6 & 12 & 4 \\ 4 & 4 & t+2 \end{pmatrix}; \quad \vec{k}_{t,E}^T = \left(\begin{pmatrix} 800 \\ t \end{pmatrix} (4t+1000) \begin{pmatrix} 1240 \\ t \end{pmatrix} \right).$$

- c) Die Firma OfficeComfort plant für $t=4$ eine Wochenproduktion an Endkomponenten von 300 ME von E_1 , 400 ME von E_2 und 600 ME von E_3 .
Ermitteln Sie, wie viele Bauteile das Zweigwerk P hierfür liefern muss und wie viele Rohstoffe zur Herstellung dieser Wochenproduktion verbraucht werden.
- d) Für den Transport der Bauteile vom Zweigwerk P ins Hauptwerk H fallen zusätzlich noch Kosten in Höhe von 10 % der Herstellkosten der Bauteile an.

Bestimmen Sie den Vektor der Herstellkosten der Endkomponenten E_1 , E_2 und E_3 in Abhängigkeit von t ($= \vec{k}_{HerE}^T$).

(Zur Kontrolle: $\vec{k}_{HerE}^T = \left(\begin{pmatrix} 1958 + \frac{800}{t} \end{pmatrix} (303,2t + 3490,4) \begin{pmatrix} 206,8t + 1865,6 + \frac{1240}{t} \end{pmatrix} \right))$

- e) Zeigen Sie, dass in Abhängigkeit von t die Gesamtherstellkosten K für einen Auftrag über jeweils 20 ME der Endkomponenten E_1 , E_2 und E_3 wie folgt lauten:

$$K(t) = 10200t + 146280 + \frac{40800}{t}.$$

Ermitteln Sie, für welche Werte von $t \in [1;10]$ die Gesamtherstellkosten K minimal sind, und geben Sie die minimalen Kosten an.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Rohstoff-/Bauteilematrix C_{RB}:</p> $C_{RB} = A_{RZ} \cdot B_{ZB} \Leftrightarrow C_{RB} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 32 & 32 \\ 8 & 12 & 24 \\ 16 & 10 & 18 \\ 25 & 17 & 25 \end{pmatrix}$ <p>Vektor der Rohstoffkosten \vec{k}_R^T:</p> $\vec{k}_R^T = (1 \ 2 \ 3 \ 1) \cdot C_{RB} = (113 \ 103 \ 159)$ <p>Vektor der Fertigungskosten der Zwischenprodukte \vec{k}_Z^T:</p> $\vec{k}_Z^T = (4 \ 3 \ 1) \cdot B_{ZB} = (21 \ 19 \ 23)$ <p>Vektor der Herstellkosten der Bauteile \vec{k}_{HerB}^T:</p> $\vec{k}_{HerB}^T = (113 \ 103 \ 159) + (21 \ 19 \ 23) + (2 \ 4 \ 6) = (136 \ 126 \ 188)$	5	10	
b)	<p>Produktionsmengen der Bauteile und Ergänzungsmenge von R_4:</p> $C_{RB} \cdot \vec{x}_B = \vec{x}_R \quad \text{mit} \quad \vec{x}_R = \begin{pmatrix} 3584 \\ 1888 \\ 1776 \\ 2144 + r_4 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{ccc c} 24 & 32 & 32 & 3584 \\ 8 & 12 & 24 & 1888 \\ 16 & 10 & 18 & 1776 \\ 25 & 17 & 25 & 2144 + r_4 \end{array} \right)$ $\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$ $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & -536 + r_4 \end{array} \right)$ <p>Die Behauptung des Lagerleiters ist richtig. Die Rohstoffbestände lassen sich vollständig verbrauchen, wenn von den Bauteilen B_1 32 ME, B_2 40 ME und B_3 48 ME produziert werden und der Rohstoff R_4 um 536 ME ergänzt wird.</p>	5	10	10

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	<p>Benötigte Bauteile für die geplante Wochenproduktion mit $t = 4$:</p> <p>Wochenproduktionsvektor $\vec{x}_E = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 600 \end{pmatrix}$</p> $\vec{x}_B = D_4 \cdot \vec{x}_E \Leftrightarrow \vec{x}_B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7400 \\ 9000 \\ 6400 \end{pmatrix}$ <p>Für die für $t = 4$ geplante Wochenproduktion muss das Zweigwerk P 7400 ME von B_1, 9000 ME von B_2 und 6400 ME von B_3 liefern.</p> <p>Verbrauch an Rohstoffen für die geplante Wochenproduktion mit $t = 4$:</p> $\vec{x}_R = C_{RB} \cdot D_4 \cdot \vec{x}_E \Leftrightarrow \vec{x}_R = C_{RB} \cdot \vec{x}_B$ $\vec{x}_R = \begin{pmatrix} 24 & 32 & 32 \\ 8 & 12 & 24 \\ 16 & 10 & 18 \\ 25 & 17 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7400 \\ 9000 \\ 6400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 670400 \\ 320800 \\ 323600 \\ 498000 \end{pmatrix}$ <p>Für die für $t = 4$ geplante Wochenproduktion werden im Zweigwerk P 670.400 ME von R_1, 320.800 ME von R_2, 323600 ME von R_3 und 498.000 ME von R_4 verbraucht.</p>	5	10	
d)	<p>Vektor der Herstellkosten der Endkomponenten $\vec{k}_{Her_E}^T$:</p> <p>Fertigungskostenvektor $\vec{k}_E^T = \begin{pmatrix} \frac{800}{t} & 4t + 1000 & \frac{1240}{t} \end{pmatrix}$</p> $\vec{k}_{Her_E}^T = 1,1 \cdot \vec{k}_{Her}^T \cdot D_t + \vec{k}_E^T$ $\vec{k}_{Her_E}^T = 1,1 \cdot (136 \quad 126 \quad 188) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2t & 6 \\ 6 & 12 & 4 \\ 4 & 4 & t+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{800}{t} & 4t + 1000 & \frac{1240}{t} \end{pmatrix}$ $\vec{k}_{Her_E}^T = (1958 \quad 299,2t + 2490,4 \quad 206,8t + 1865,6) + \begin{pmatrix} \frac{800}{t} & 4t + 1000 & \frac{1240}{t} \end{pmatrix}$ <p>Also: $\vec{k}_{Her_E}^T = \left(\left(1958 + \frac{800}{t} \right) \quad (303,2t + 3490,4) \quad \left(206,8t + 1865,6 + \frac{1240}{t} \right) \right)$.</p>	5	10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	<p>Die Gesamtherstellkosten K für den Auftrag in Abhängigkeit von t:</p> $\text{Auftragsvektor } \vec{x}_E = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$ $K(t) = \vec{k}_{HerE}^T \cdot \vec{x}_E$ $K(t) = \left(\left(1958 + \frac{800}{t} \right) \quad (303, 2t + 3490, 4) \quad \left(206, 8t + 1865, 6 + \frac{1240}{t} \right) \right) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$ $K(t) = 10200t + 146280 + \frac{40800}{t}$ <p>Hiermit ist gezeigt, dass die angegebenen Gesamtherstellkosten K in Abhängigkeit von t richtig sind.</p> <p>Minimum der Gesamtherstellkosten K:</p> $K'(t) = 0 \wedge K''(t) > 0 \quad [\text{oder eine andere hinreichende Bedingung!}]$ $K'(t) = 10200 - \frac{40800}{t^2} \wedge K''(t) = \frac{81600}{t^3}$ $10200 - \frac{40800}{t^2} = 0 \Leftrightarrow 10200t^2 = 40800 \Leftrightarrow t_{1/2} = \pm 2$ $K''(2) = 10200 \Rightarrow \text{Minimalstelle in } t = 2$ $K(2) = 187080$ <p>Aus einer Verlaufsbeobachtung der „Kostenhyperbel“ bzw. durch Einsetzen der Randwerte 1 [$K(1) = 197280$] und 10 [$K(10) = 252360$] ist zu erkennen, dass mit $K_{Min}(2/187080)$ ein absolutes Minimum vorliegt. Daher sind nur für $t = 2$ die Gesamtherstellkosten für diesen Kundenauftrag minimal und die minimalen Kosten betragen 187.080 GE.</p>	5	10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

STOCHASTIK 1

III.1 Medikamententest

Im Rahmen einer Studie über die Wirksamkeit des neuen Mittels Mathysol gegen die häufig lang andauernde Krankheit Mathephobie werden 1 200 Patienten mit diesem Medikament behandelt, 697 Patienten davon werden innerhalb eines kurzen Zeitraums nach der Behandlung gesund; die Behandlung wird dann als erfolgreich bezeichnet. Parallel dazu wurden 1 200 weitere Patienten (Kontrollgruppe) mit denselben Symptomen mit einem Placebo behandelt und 491 davon mit Erfolg.

- a) Von den insgesamt 2 400 an Mathephobie erkrankten Patienten der Studie wird ein erfolgreich behandelter Patient zufällig für genauere Untersuchungen ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Patient mit Mathysol therapiert wurde.

Die insgesamt 2 400 Patienten wurden in zwei Kliniken behandelt, die Tabelle gibt einen Überblick über die Behandlungsart und den Erfolg:

Klinik	Anzahl der Patienten und Behandlungsart	Behandlungsergebnis	
Universitätsklinik	200 mit Medikament	149 Misserfolge	51 Erfolge
	1 000 mit Placebo	667 Misserfolge	333 Erfolge
Kreiskrankenhaus	1 000 mit Medikament	354 Misserfolge	646 Erfolge
	200 mit Placebo	42 Misserfolge	158 Erfolge

- b) Interpretieren Sie die Daten in Bezug auf die Wirksamkeit von Mathysol aus der Sicht der Krankenhäuser und aus der Sicht des Herstellers von Mathysol, der alle diese Daten hat.
- c) Begründen Sie, unter welchen Bedingungen es bei solchen Studien grundsätzlich sinnvoll ist, bei einer ausgewählten Patientengruppe die Anzahl X der erfolgreich behandelten Patienten als binomialverteilt anzunehmen. Nennen Sie auch sachliche Gründe, die in diesem Zusammenhang der Annahme einer Binomialverteilung entgegenstehen können.

Gehen Sie im Weiteren davon aus, dass bei jeder der folgenden Gruppen von Patienten die Anzahl der erfolgreichen Behandlungen binomialverteilt ist.

Ein Arzt behandelt nacheinander Patienten mit Mathysol. Der Arzt geht aufgrund der Studie von einer Erfolgswahrscheinlichkeit von ca. $\frac{7}{12}$ aus.

- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der Behandlung von 8 Patienten 3 oder mehr geheilt werden.
- e) Von acht Behandlungen ist keine erfolgreich, und dem Arzt kommen Zweifel.

Untersuchen Sie, ob es stochastische Gründe für den Arzt gibt, seine Vorgehensweise zu überdenken. Man kann hier auch die Frage untersuchen, wie viele Patienten man im Mittel mit Mathysol behandeln müsste, bis der erste Behandlungserfolg eintritt. Dieser Erwartungswert werde hier mit ew bezeichnet. Begründen Sie, dass für diese Zahl ew folgende Gleichung gelten muss:

$$ew = 1 \cdot \frac{7}{12} + (1 + ew) \cdot \frac{5}{12}.$$

Berechnen Sie eine Lösung dieser Gleichung und untersuchen Sie nochmals im Kontext dieses Ergebnisses die Frage, ob es stochastische Gründe für den Arzt gibt, seine Vorgehensweise zu überdenken.

- f) Aus vielen vorangegangenen Studien weiß man, dass ca. 40 % aller „Behandlungen“ von Mathephobie-Patienten mit Placebos erfolgreich sind. Die obige Studie weckt Hoffnungen in die Wirksamkeit des Medikamentes Mathysol. Diese Hoffnungen sollen wissenschaftlich abgesichert werden.

Dazu soll in einer weiteren Studie das statistische Instrument des Hypothesentests auf dem 1 %-Niveau verwendet werden, um gegebenenfalls zu begründen, dass Mathysol wirksamer ist als Placebos.

5 000 an Mathephobie erkrankte Personen sollen mit Mathysol behandelt werden. Beschreiben und begründen Sie das weitere Vorgehen bei diesem Test.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$P(\text{Mathysol} \text{Erfolgreich}) = \frac{P(\text{Mathysol} \cap \text{Erfolgreich})}{P(\text{Erfolgreich})}$ $= \frac{\frac{697}{2400}}{\frac{(697 + 491)}{2400}} = \frac{697}{1188} \approx 59\%.$	15		
b)	<p>Bei beiden Kliniken ist der relative Behandlungserfolg von Placebos (ca. 33 % und 79 %) größer als der beim Einsatz von Mathysol (ca. 26 % und 65 %). Nimmt man aber alle mit Placebos behandelten Patienten zusammen, so ist der relative Behandlungserfolg nur ca. 41 % gegenüber dem aller Mathysol-Behandlungen von 58 %. (<i>Dieses erstaunliche Phänomen ist unter dem Namen Simpson-Paradoxon bekannt.</i>)</p> <p>Wenn man davon ausgeht, dass die Unterschiedlichkeit der beiden Kliniken keine Rolle spielt, dann ist die Gesamtstatistik mit den größeren Fallzahlen am aussagekräftigsten, und die Hoffnung in die Wirksamkeit von Mathysol wird gestärkt.</p>		15	
c)	<p>In einer Bernoullikette ist die Erfolgswahrscheinlichkeit eines Einzelversuches von den Ausgängen der anderen Versuche stochastisch unabhängig und für alle Einzelversuche gleich. Diese Annahme kann man rechtfertigen, wenn die Auswahl der Patientengruppe aus der Menge aller Mathephobiker „rein zufällig“ erfolgte. Dies wäre z.B. dann nicht der Fall, wenn begründete Vermutungen über Ursachen der Krankheit bei der Auswahl eine Rolle gespielt hätten.</p>		10	
d)	<p>Sei X = Anzahl der bei einer Behandlung von 8 Patienten geheilten Patienten.</p> $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left[\left(\frac{5}{12}\right)^8 + 8 \cdot \frac{7}{12} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^7 + \binom{8}{2} \left(\frac{7}{12}\right)^2 \left(\frac{5}{12}\right)^6 \right]$ $\approx 1 - 0,061 = 0,939.$ <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Behandlung von 8 Patienten 3 oder mehr geheilt werden, ist also fast 94 %.</p>	10		
e)	<p>Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{7}{12}$.</p> <p>Dass 8 Behandlungen nicht zu einem Erfolg führen, tritt dann mit der Wahrscheinlichkeit $P(\text{"8 Misserfolge"}) = \left(\frac{5}{12}\right)^8 \approx \frac{1}{1100}$. Die Wahrscheinlichkeit ist so klein, dass man an den bisherigen Annahmen zweifeln muss.</p> <p>Entweder hat der Arzt beim ersten Patienten Erfolg, dann betrug die betrachtete Anzahl 1, oder der Arzt hat keinen Erfolg, dann ist er wieder in der Ausgangssituation, die erwartete Anzahl an Patienten bis zum ersten ist aber um 1 größer als ew. Die Mathematisierung dieser Überlegung führt auf die (lineare)</p>			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Gleichung $ew = 1 \cdot \frac{7}{12} + (1+ew) \cdot \frac{5}{12}$, die die Lösung $ew = \frac{12}{7} \approx 1,7$ hat.</p> <p>In der konkreten Situation ist die Anzahl bis zum ersten Erfolg größer als 8, weicht also deutlich von dem Erwartungswert 1,7 nach oben ab. Dies ist ein Indiz dafür, dass entweder der angenommene Wert von $p = \frac{7}{12}$ nicht stimmt, oder ein Fehler bei der Behandlung mit Mathysol aufgetreten ist.</p>	5	15	10
f)	<p>Es sei p die unbekannte Erfolgswahrscheinlichkeit bei der Behandlung von Mathephobikern mit Mathysol. Die Nullhypothese, dass die Behandlung mit Mathysol wirkungslos ist (also nicht besser als die Behandlung mit Placebos) soll nach Möglichkeit verworfen werden. Also wählen wir als Nullhypothese: $H_0 : p \leq 0,4$. Da nicht anzunehmen ist, dass Mathysol schlechter wirkt als Placebos, setzen wir: $H'_0 : p = 0,4$.</p> <p><i>Diese Vereinfachung ist auch rein formal gerechtfertigt, da dadurch die Wahrscheinlichkeit $P(H_0 \text{ wird verworfen} H_0)$ nach oben abgeschätzt wird.</i></p> <p>Es sei X die Anzahl der erfolgreichen Behandlungen. Große Werte von X sprechen gegen H'_0.</p> <p>X ist unter der Bedingung H'_0 5000-0,4-binomialverteilt. Diese Verteilung können wir mit Hilfe der Normalverteilung approximieren:</p> <p>$\frac{X - 2000 + 0,5}{\sqrt{1200}}$ ist in ausreichender Näherung standard-normal-verteilt.</p> <p>Da das gewünschte Signifikanzniveau 1 % betragen soll, lösen wir mit Hilfe der Tabelle in der Formelsammlung die Gleichung $normal(x) = 0,99$: Man erhält $x \approx 2,326$, also $P\left(\frac{X - 2000 + 0,5}{\sqrt{1200}} \leq 2,326\right) \approx 0,99$ und damit</p> <p>$P(X > 2080,1) \approx 0,01$.</p> <p>$K = 2081$ ist also die kleinste Anzahl für die gilt</p> <p>$P(X > 2081) \leq 0,01$.</p> <p>Wenn also mehr als 2 081 von den 5 000 Patienten mit Mathysol erfolgreich behandelt werden, kann die Nullhypothese auf dem 1 % Signifikanzniveau verworfen werden.</p>		10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

STOCHASTIK 2

III.2 Mathematikwettbewerb

Beim Wettbewerb „Känguru der Mathematik“ der Humboldt-Universität zu Berlin handelt es sich um einen Multiple-Choice-Test. Im Jahr 2006 bestand er für die Klassenstufen 7 und 8 aus 30 Aufgaben mit jeweils 5 Antworten, von denen genau eine richtig war. Die Punktergebnisse der Teilnehmer wurden nach folgendem Schema ermittelt:

Jeder Teilnehmer startet mit 30 Punkten auf seinem Punktekonto.

Zusätzlich zu diesen 30 Punkten werden für die richtigen Lösungen Punkte addiert:

für die ersten zehn Aufgaben	für die nächsten zehn Aufgaben	für die letzten zehn Aufgaben
jeweils 3 Punkte	jeweils 4 Punkte	jeweils 5 Punkte

Für falsche Antworten werden Punkte abgezogen, und zwar jeweils ein Viertel der erreichbaren:

bei den ersten zehn Aufgaben	bei den nächsten zehn Aufgaben	bei den letzten zehn Aufgaben
jeweils 0,75 Punkte	jeweils 1 Punkt	jeweils 1,25 Punkte

Eine nicht bearbeitete Aufgabe, in der also keine Antwort angekreuzt ist, wird mit 0 Punkten bewertet.

- a) Weisen Sie nach, dass nach diesem Bewertungsschema die erreichbare Punktzahl zwischen 0 und 150 Punkten liegt.

Geben Sie drei verschiedene Möglichkeiten an, wie ein Teilnehmer eine Endpunktzahl von 30 Punkten erreichen kann.

Ein Teilnehmer hat ein Ergebnis von 125 Punkten erreicht. Bestimmen Sie die Mindestanzahl von Aufgaben des 5-Punkte-Typs, die er richtig gelöst haben muss.

- b) Ein pubertierender Teilnehmer macht sich einen Witz daraus, ohne nachzudenken 30 Antworten anzukreuzen und nach zwei Minuten den Lösungsbogen mit der Bemerkung abzugeben: „Ich bin schon fertig.“

Bestimmen Sie, welche Gesamtpunktzahl bei dieser Vorgehensweise zu erwarten ist.

Lina hingegen nimmt den Wettbewerb ernst. Sie hat 24 Aufgaben sorgfältig gelöst, die anderen 6 bereiten ihr Probleme. Bei 3 der fehlenden Aufgaben versteht sie die Aufgabenstellung nicht, bei 2 Aufgaben kann sie jeweils eine der 5 Antwortmöglichkeiten ausschließen, bei einer Aufgabe erkennt sie zwei Antworten als falsch.

Entscheiden Sie, in welcher Situation es aus stochastischer Sicht sinnvoll sein kann zu raten, in welcher nicht.

Am Känguru-Wettbewerb 2006 haben aus den Klassenstufen 7 und 8 insgesamt 107 921 Schülerinnen und Schüler teilgenommen. Die Punkteverteilung ist in der beigefügten Tabelle dargestellt. In der Tabelle ist als Durchschnitt (Mittelwert) 55 Punkte angegeben.

- c) Beschreiben Sie, wie Sie bei der Bestimmung des Mittelwertes und der Varianz der Punkteverteilung der 107 921 Schülerinnen und Schüler aus den Klassenstufen 7 und 8 mit den gegebenen Daten in der Tabelle vorgehen würden (ohne die ziemlich umfangreichen Rechnungen wirklich durchzuführen).

- d) Geht man von den Werten in der Ihnen vorliegenden Tabelle aus, so ergibt sich ein Mittelwert von 55,2. Die Wettbewerbsleitung nennt jedoch einen Punktedurchschnitt von 55,0.

Begründen Sie, wie es zu dieser Abweichung kommen kann. Gehen Sie davon aus, dass Rechenfehler nicht die Ursache sind.

Im Folgenden geht es darum, die gegebene Punkteverteilung mit einer Normalverteilung zu vergleichen.

- e) Betrachten Sie die Normalverteilung mit den Parametern $\mu=55$ und $\sigma=18,5$.

Bestimmen Sie die Anzahl der 107 921 Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die nach dieser Normalverteilung zwischen 20 und 49,75 Punkten hätten erreicht haben müssen und berechnen Sie die prozentuale Abweichung vom tatsächlichen Wert.

Begründen Sie, dass bereits an den absoluten Häufigkeiten in der Tabelle zu erkennen ist, dass die Näherung mit dieser Normalverteilung zu deutlichen Abweichungen führen muss.

Känguru-Wettbewerb 2006 Ergebnisse

Punkte	Anzahl in Klassenstufen			
	5/6	7/8	9/10	11/13
150,00	5	2	0	7
140,00 - 149,75	38	7	8	18
130,00 - 139,75	233	33	28	38
120,00 - 129,75	733	110	64	58
110,00 - 119,75	1 984	376	133	155
100,00 - 109,75	4 286	1 106	467	348
90,00 - 99,75	8 256	2 820	1 292	672
80,00 - 89,75	14 293	6 162	3 179	1 108
70,00 - 79,75	21 852	11 324	6 588	2 181
60,00 - 69,75	28 532	17 702	11 209	3 631
50,00 - 59,75	32 318	23 101	15 395	5 009
40,00 - 49,75	27 774	23 021	15 159	5 070
30,00 - 39,75	16 711	15 270	9 276	2 908
20,00 - 29,75	6 509	5 682	2 991	880
10,00 - 19,75	1 335	1 114	499	129
0,00 - 9,75	95	91	67	71
Insgesamt	164 954	107 921	66 355	22 283
Durchschnitt	60,9	55,0	54,3	56,3

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Werden alle Aufgaben richtig gelöst, so ergibt sich als Endpunktzahl $30 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 5 = 150$.</p> <p>Werden nur falsche Antworten angekreuzt, so sind die 30 Punkte Startguthaben aufgebraucht: $30 - 10 \cdot 0,75 - 10 \cdot 1 - 10 \cdot 1,25 = 0$.</p> <p>30 Punkte als Endergebnis kommen z.B. zustande, wenn man</p> <ul style="list-style-type: none"> keine Aufgabe bearbeitet, die 30 Startpunkte also das Endergebnis sind, alle Aufgaben bearbeitet und von jeder "Sorte" zwei richtig und acht falsch gelöst hat: $30 + 2 \cdot 3 - 8 \cdot 0,75 + 2 \cdot 4 - 8 \cdot 1 + 2 \cdot 5 - 8 \cdot 1,25 = 30$, nur 5 Aufgaben bearbeitet hat, eine 4-Punkte-Aufgabe richtig, zwei 3-Punkte-Aufgaben und zwei 5-Punkte-Aufgaben falsch: $30 + 4 - 2 \cdot 0,75 - 2 \cdot 1,25 = 30$. <p>Wurden alle 3-Punkte-Aufgaben und alle 4-Punkte-Aufgaben richtig gelöst, so ist eine Punktsumme von $30 + 30 + 40 = 100$ erreicht. Es müssen also noch mindestens 5 Aufgaben aus dem letzten Drittel richtig gelöst werden.</p>	10	20	
b)	<p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man ohne nachzudenken eine richtige Antwort ankreuzt, beträgt 0,2.</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man ohne nachzudenken eine falsche Antwort ankreuzt, beträgt 0,8.</p> <p>Für jede der Teilaufgaben mit B Bewertungspunkten gilt:</p> $E(T) = 0,2 \cdot B - 0,8 \cdot 0,25 \cdot B = 0.$ <p>Der Erwartungswert für die Gesamtpunktzahl ist also die Startpunktzahl 30.</p> <p>Aus stochastischer Sicht ist es nicht sinnvoll zu raten, wenn der Erwartungswert für die zu erreichende Punktzahl negativ ist.</p> <p>Im ersten Fall ist siehe c) der Erwartungswert pro Aufgabe 0.</p> <p>In den anderen Fällen sind die Erwartungswerte positiv:</p> $E(T_2) = 0,25 \cdot B - 0,75 \cdot 0,25 \cdot B = 0,0625 \cdot B.$ $E(T_3) = \frac{1}{3}B - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}B = \frac{1}{6}B.$ <p>Es ist also aus stochastischer Sicht in allen Fällen sinnvoll zu raten.</p>	10	15	
c)	<p>Zu beachten ist, dass in der Tabelle nicht die einzelnen Ergebnisse aufgeführt sind, sondern Klassen eingeteilt wurden. Nur die absolute Häufigkeit, mit der die maximale Punktzahl 150 erreicht wurde, ist gesondert aufgeführt.</p> <p>Zur Berechnung des Mittelwerts und der Varianz kann man nur sinnvollerweise jeweils die Klassenmitten benutzen.</p> <p>Mittelwert: Statt die Summe der einzelnen Daten kann man deshalb nur die Produkte aus Klassenmitten und zugehörigen Anzahlen aufaddieren und dann durch die Gesamtzahl teilen.</p>			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Varianz:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Entweder man summiert die Produkte aus den quadrierten Abweichungen von Klassenmitten und zuvor berechnetem Mittelwert mit den zugehörigen Anzahlen und teilt dann diese Summe durch die Gesamtzahl. <p><i>Wenn hier die Division durch $n - 1$ genannt wird, ist dies ebenso zu akzeptieren, der Sinn dieser Unterschiede soll nicht diskutiert werden</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • oder rechentechnisch besser: man summiert die Produkte aus den Quadraten der einzelnen Klassenmitten und zugehörigen Anzahlen, teilt das Ergebnis durch die Gesamtzahl und subtrahiert noch das Quadrat des zuvor bestimmten Mittelwertes. 		10	
d)	<p>Vermutlich wurde der Mittelwert von 55 aus den genauen Punktzahlen berechnet. Die Einteilung der Punkte in die Klassen ermöglicht eine kompakte Darstellung der Ergebnisse, die exakte Berechnung des Mittelwerts ist jedoch nicht mehr möglich.</p>			10
e)	<p>Wenn X normalverteilt ist mit den Parametern $\mu = 55$ und $\sigma = 18,5$, so gilt:</p> $P(20 \leq X \leq 49,75) = \Phi\left(\frac{49,75 - 55}{18,5}\right) - \Phi\left(\frac{20 - 55}{18,5}\right) \approx \Phi(-0,28) - \Phi(-1,89)$ $\approx (1 - 0,6103) - (1 - 0,9706) = 0,3897 - 0,0294 = 0,3603 \approx 36,0\%$ <p>Danach müssten ca. $0,36 \cdot 107\,291 \approx 38\,850$ Teilnehmerinnen und Teilnehmer zwischen 20 und 49,75 Punkten erreicht haben. Laut Tabelle waren es jedoch 43 973.</p> <p>Die Abweichung vom Tabellenwert beträgt ca. 12 %.</p> <p>Während eine Glockenkurve mit einem Maximum bei 55 symmetrisch nach beiden Seiten abfällt, ist die absolute Häufigkeit von Punkten im Bereich $[40,00 ; 49,75]$ fast identisch mit der im Bereich $[50,00 ; 59,75]$. Es erstaunt daher nicht, dass die mit der Normalverteilung prognostizierten Werte deutlich kleiner sind.</p>		15	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20