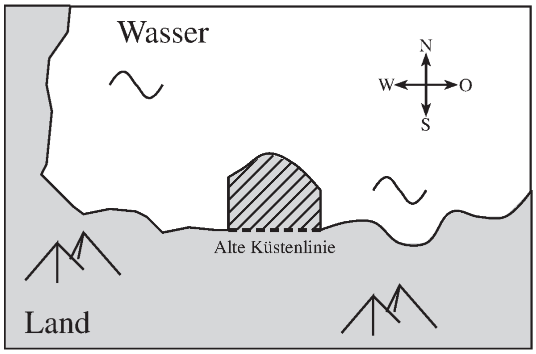
Analysis 1

I.1 Halbinsel

Eine in einen See ragende künstlich angelegte Halbinsel soll neu gestaltet werden. Die Halbinsel ist in Ost-West-Richtung 30 m breit, auf der westlichen Seite ragt die Halbinsel in Nordrichtung 15 m (Punkt C), auf der östlichen Seite 10 m (Punkt D) in den See (siehe Abbildung in der Anlage).



Ein neuer Praktikant erstellt für den Verlauf der nördlichen Strandlinie die Funktionsgleichung
$$g(x) = -\frac{7}{90}x^2 + \frac{13}{6}x + 15 \text{ für } 0 \le x \le 30 .$$

Der Projektleiter zweifelt dieses Ergebnis an und fordert seinen Praktikanten auf, exemplarisch für drei Punkte mit x-Werten aus dem Intervall [5; 25] zu überprüfen, ob der Funktionsgraph von g mit der Strandlinie übereinstimmt. Eine Abweichung der Funktionswerte von den gemessenen Werten (siehe Abbildung in der Anlage) von maximal 1 m soll akzeptiert werden.

a) • Bestätigen Sie durch Rechnung, dass der Zweifel des Projektleiters berechtigt ist.

• Begründen Sie, warum die nördliche Strandlinie nicht auf dem Graphen einer quadratischen Funktion (Parabel) liegen kann (siehe Abbildung in der Anlage). (15P)

Die Planungsabteilung geht davon aus, dass die Strandlinie durch eine Funktion f dritten Grades modelliert werden kann. Zur Erstellung der Funktionsgleichung werden an den beiden Punkten $C(0|15)$ und $D(30|10)$ noch Winkelpeilungen vorgenommen: Am Punkt C hat die Strandlinie einen Winkel von 45° zur Ost-West-Achse, am Punkt D einen Winkel von 116,57° (siehe Abbildung in der Anlage).

b) • Bestätigen Sie, dass die Steigung der Strandlinie im Punkt C den Wert 1 und im Punkt D den Wert -2 aufweist.

• Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f, deren Graph den Verlauf der Strandlinie modelliert.

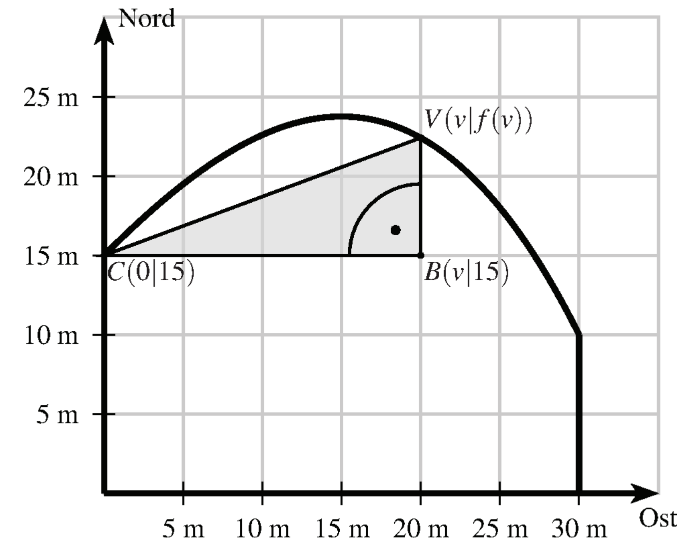
Kontrollergebnis: $f(x) = -\frac{1}{1350}x^3 - \frac{1}{60}x^2 + x + 15$ für $0 \le x \le 30$ (20P)

Im Folgenden wird die in Aufgabenteil b) genannte Funktion f genutzt.

c) Berechnen Sie, wie weit die Halbinsel in Nordrichtung in den See ragt. (20P)

Ein Plan sieht vor, dass auf dem Gebiet der Halbinsel eine Fläche in Form eines rechtwinkligen Dreiecks abgeteilt und bepflanzt werden soll, die im Punkt V auf die Strandlinie trifft. Die abgeteilte Dreiecksfläche soll maximal werden.

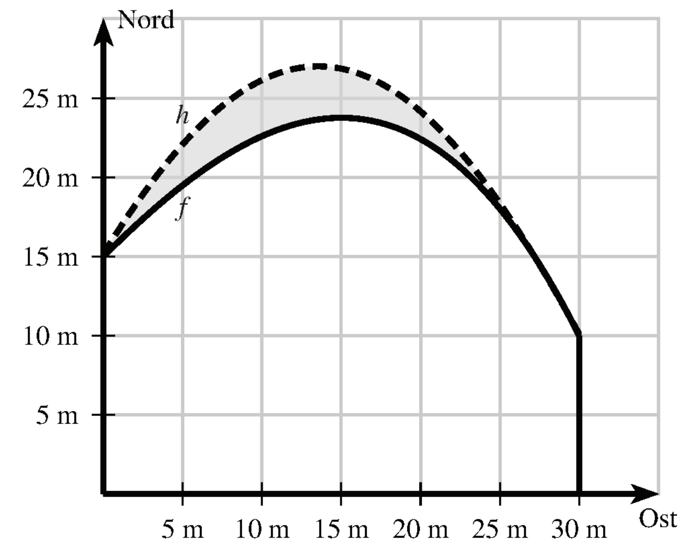
d) Bestimmen Sie den maximalen Inhalt der Dreiecksfläche und die Koordinaten des zugehörigen Punktes V. (20P)



Wegen lang anhaltender Trockenheit ist der Wasserstand des Sees abgesunken. Dadurch hat sich die weiterhin durch die Punkte C und D führende Strandlinie so verändert, dass ihr Verlauf im Intervall $0 \leq x \leq 30$ durch den Graphen einer Sinusfunktion h der Form

$$h(x) = a \cdot \sin(0{,}068 \cdot x + 0{,}65) + d$$

angenähert werden kann ($a > 0$).



e) • Beschreiben Sie die Wirkung der Parameter a und d auf den Verlauf des Graphen der Funktion h.

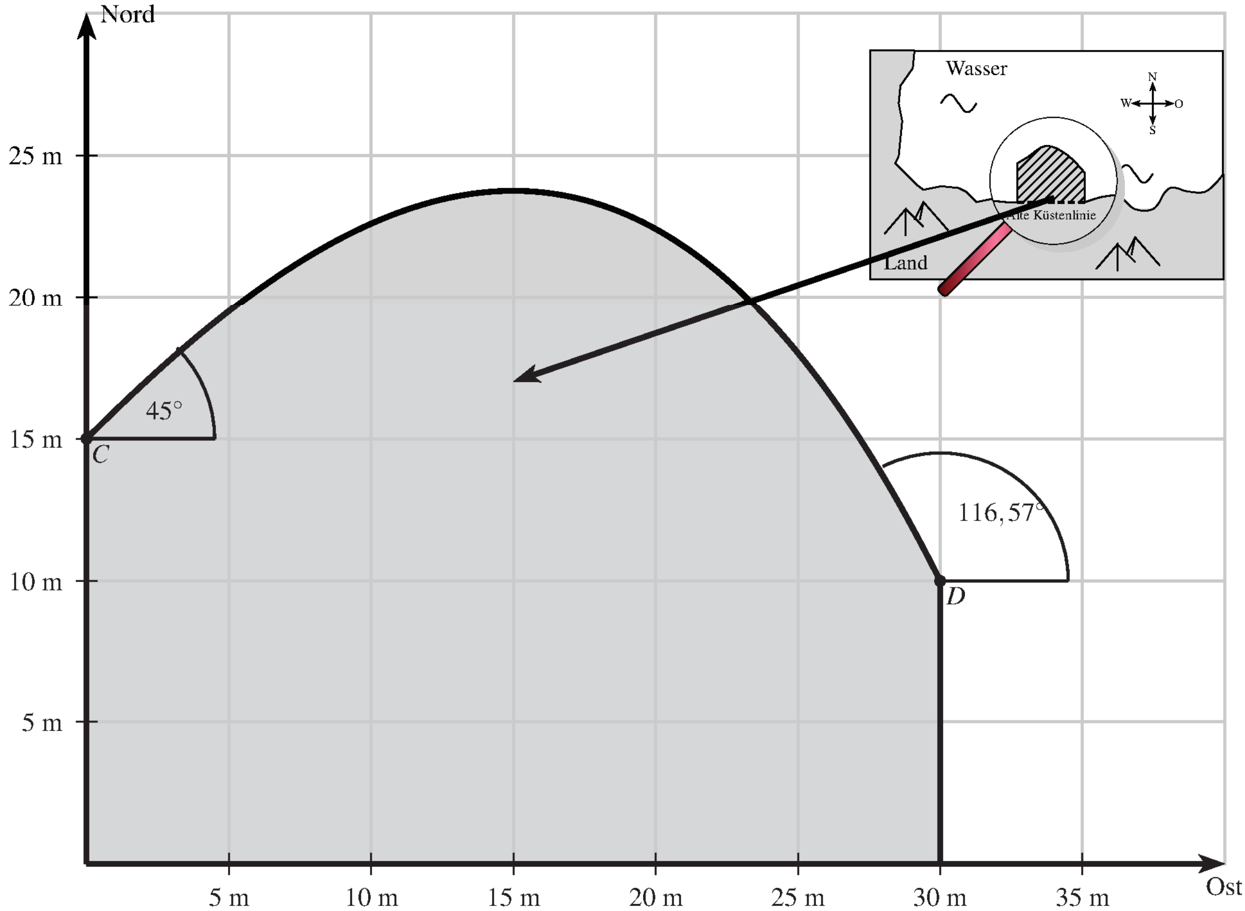
• Bestimmen Sie die Parameter a und d und runden Sie Ihre Ergebnisse auf ganze Zahlen. (10P)

Rechnen Sie im Folgenden mit dem Kontrollergebnis $h(x) = 30 \cdot \sin(0{,}068x + 0{,}65) - 3$.

f) Bestimmen Sie mit Hilfe einer Stammfunktion von h den Inhalt der durch den Rückgang des Wassers im Norden der Halbinsel freigelegten Fläche im Intervall $0 \leq x \leq 30$. (15P)

Hinweis: Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass es außer $x = 0$ und $x = 30$ keine weiteren Schnittstellen gibt.

Anlage zur Aufgabe „Halbinsel“



Ausschnitt aus der Karte

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• Ablesen von Koordinaten aus der Grafik ergibt näherungsweise z. B. $R(5\|19{,}5)$, $S(15\|24)$ und $T(25\|18)$ Durch Einsetzen der Funktionswerte erhält man hingegen: $g(5)\approx 23{,}9;\quad g(10)\approx 28{,}9;\quad g(25)\approx 20{,}6$ Abweichungen: $R:\ 23{,}9-19{,}5=4{,}4$ $S:\ 28{,}9-24=4{,}9$ $T:\ 20{,}6-18=2{,}6$. Offensichtlich ist die Abweichung in jedem der drei Fälle größer als 1 m . Die Vermutung des Projektleiters ist also richtig. • Der Graph einer quadratischen Funktion ist stets achsensymmetrisch bezüglich der durch den Scheitelpunkt verlaufenden Parallelen zur y-Achse . Das ist hier offensichtlich nicht gegeben. *Andere Begründungen sind möglich.*	10	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
b)	• Es ist $\tan 45° = 1$ und $\tan 116{,}57° \approx -2$ • Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems: Es ist $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ und $f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ mit $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Nach Aufgabenstellung gelten die folgenden vier Gleichungen $(I)\quad f(0) = 15$ $(II)\quad f'(0) = 1$ $(III)\quad f(30) = 10$ $(IV)\quad f'(30) = -2$ Hieraus ergibt sich $(I)\quad a_0 = 15$ $(II)\quad a_1 = 1$ $(III)\quad 10 = a_3 30^3 + a_2 30^2 + a_1 30 + a_0 = 27000a_3 + 900a_2 + 45$ $(IV)\quad -2 = 3a_3 30^2 + 2a_2 30 + a_1 = 2700a_3 + 60a_2 + 1$ Damit ist mittels $0{,}1 \cdot III - IV$ $3 = 30a_2 + 3{,}5 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{60}$ und $1 = 2700a_3 + 90 \cdot \left(-\frac{1}{60}\right) + 4{,}5 = 2700a_3 + 3 \Leftrightarrow a_3 = -\frac{1}{1350}$. Also ist $f(x) = -\frac{1}{1350}x^3 - \frac{1}{60}x^2 + x + 15$ im Intervall $0 \le x \le 30$ *Verwendet ein Prüfling statt der Steigungswerte abgelesene Punktkoordinaten (etwa aus Aufgabenteil a) zum Aufstellen eines Gleichungssystems, soll bei korrekter Durchführung die volle Punktzahl gegeben werden.*		20	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	Berechnung des Hochpunktes: Eine hinreichende Bedingung ist.: $f'(x)=0 \wedge f''(x)<0$ $f'(x)=-\frac{3}{1350}x^2-\frac{1}{30}x+1$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{15}{2}+\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2+\frac{1350}{3}}=15 \vee x=-\frac{15}{2}-\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2+\frac{1350}{3}}=-30$ $f''(x)=-\frac{6}{1350}x-\frac{1}{30}$ $f''(15)=-\frac{6}{1350}\cdot 15-\frac{1}{30}-0{,}1<0$ $f(15)=-\frac{1}{1350}\cdot 15^3-\frac{1}{60}\cdot 15^2+15+15=23{,}75$ Die zweite Lösung $x=-30$ liegt außerhalb des Definitionsbereichs. Der Graph von f hat einen Hochpunkt bei (15| 23,75); die Halbinsel ragt also in Nordrichtung 23,75 m in den See.	20		
d)	Extremwertberechnung: Hauptbedingung: $A(v)=\frac{1}{2}v\cdot\left(f(v)-15\right)$ Nebenbedingung: $f(v)=-\frac{1}{1350}v^3-\frac{1}{60}v^2+v+15$ Zielfunktion: $A(v)=\frac{1}{2}v\cdot\left(f(v)-15\right)$ Es ergibt sich somit für die Zielfunktion $A(v)=\frac{1}{2}v\cdot(-\frac{1}{1350}v^3-\frac{1}{60}v^2+v+15-15)=-\frac{1}{2700}v^4-\frac{1}{120}v^3+\frac{1}{2}v^2$ und deren Ableitungen: $A'(v)=-\frac{1}{675}v^3-\frac{1}{40}v^2+v$ und $A''(v)=-\frac{1}{225}v^2-\frac{1}{20}v+1$ Bestimmung der Maximalstelle: $0=-\frac{1}{675}v^3-\frac{1}{40}v^2+v=v\cdot\left(-\frac{1}{675}v^2-\frac{1}{40}v+1\right)$ $\Leftrightarrow v=0 \vee -\frac{1}{675}v^2-\frac{1}{40}v+1=0$ $\Leftrightarrow v=0 \vee v^2+\frac{135}{8}v-675=0$ $\Leftrightarrow v=0 \vee v=-\frac{135}{16}\pm\frac{15\sqrt{849}}{16}$ Damit ergeben sich drei Lösungen: $v_1=0$, $v_2\approx 18{,}879$ und $v_3\approx -35{,}754$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	In dem interessierenden Definitionsbereich kann höchstens $v_2 \approx 18{,}879$ als Lösung infrage kommen, da bei $v_1 = 0$ keine Dreiecksfläche vorhanden ist und $v_3 \approx -35{,}754$ außerhalb des Definitionsbereichs liegt. $A''(v_2) = -\frac{1}{225}v_2^2 - \frac{1}{20}v_2 + 1 \approx -\frac{1}{225}\cdot 18{,}879^2 - \frac{1}{20}\cdot 18{,}879 + 1 \approx -1{,}5 < 0$ An der Stelle $v_2 \approx 18{,}879$ befindet sich also ein Maximum. Die Flächenberechnung ergibt: $A(v_2) = -\frac{1}{2700}v_2^4 - \frac{1}{120}v_2^3 + \frac{1}{2}v_2^2 \approx -\frac{1}{2700}\cdot 18{,}879^4 - \frac{1}{120}\cdot 18{,}879^3 + \frac{1}{2}\cdot 18{,}879^2 \approx 75{,}1$ Die maximale Dreiecksfläche beträgt ungefähr 75,1 m^2. $f(v_2) = -\frac{1}{1350}v_2^3 - \frac{1}{60}v_2^2 + v_2 + 15 \approx -\frac{1}{1350}\cdot 18{,}879^3 - \frac{1}{60}\cdot 18{,}879^2 + 18{,}879 + 15 \approx 22{,}954$ Der Punkt V hat näherungsweise die Koordinaten $V(18{,}88 \mid 22{,}95)$.		10	10

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

- Der Parameter a gibt die Amplitude der Funktion h an. Für $a > 1$ wird der Graph in y-Richtung gegenüber dem Graphen einer Funktion $\hat{h}$ mit $\hat{h}(x) = \sin(0{,}068 \cdot x + 0{,}65) + d$ gestreckt; für $a < 1$ wird der Graph in y-Richtung gestaucht.
Anmerkung: Der Begriff "Amplitude" kann auch umschrieben werden.

Der Parameter d gibt die Verschiebung des Graphen einer Funktion $\tilde{h}$ mit $\tilde{h}(x) = a \cdot \sin(0{,}068 \cdot x + 0{,}65)$ in y-Richtung an. Für $d > 0$ wird der Graph nach oben verschoben; für $d < 0$ wird der Graph nach unten verschoben.
- Es gelten die zwei Gleichungen $h(0) = 15$ und $h(30) = 10$.
Damit ist
$a \cdot \sin\left(0{,}068 \cdot 0 + 0{,}65\right) + d = 15 \Leftrightarrow a \cdot \sin\left(0{,}65\right) + d = 15 \quad \text{(I)}$
und
$a \cdot \sin\left(0{,}068 \cdot 30 + 0{,}65\right) + d = 10 \Leftrightarrow a \cdot \sin\left(2{,}69\right) + d = 10 \quad \text{(II)}$
Durch Subtraktion der Gleichungen (I) und (II) ergibt sich
$a \cdot \sin(0{,}65) - a \cdot \sin(2{,}69) = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{\sin(0{,}65) - \sin(2{,}69)}$
Für d gilt somit wegen (II):
$d = 10 - \frac{5}{\sin(0{,}65) - \sin(2{,}69)} \cdot \sin\left(2{,}69\right)$
Die gerundeten Werte sind also: $a \approx 30$, $d \approx -3$

</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>Berechnung der Fläche zwischen den Graphen der Funktionen h und f :
$A=\int_0^{30}\left(h(x)-f(x)\right)dx$
$=\int_0^{30}\left(\left(30\cdot\sin\left(0{,}068x+0{,}65\right)-3\right)-\left(-\frac{1}{1350}x^3-\frac{1}{60}x^2+x+15\right)\right)dx$
$=\int_0^{30}\left(30\cdot\sin\left(0{,}068x+0{,}65\right)+\frac{1}{1350}x^3+\frac{1}{60}x^2-x-18\right)dx$
$=\left[-\frac{30}{0{,}068}\cdot\cos\left(0{,}068x+0{,}65\right)+\frac{1}{4\cdot 1350}x^4+\frac{1}{3\cdot 60}x^3-\frac{1}{2}x^2-18x\right]_0^{30}$
$=\left(-\frac{7500}{17}\cdot\cos\left(0{,}068\cdot 30+0{,}65\right)+\frac{1}{5400}\cdot 30^4+\frac{1}{180}\cdot 30^3-\frac{1}{2}\cdot 30^2-18\cdot 30\right)$
$-\left(-\frac{7500}{17}\cdot\cos\left(0{,}068\cdot 0+0{,}65\right)\right)$
$=\left(-\frac{7500}{17}\cdot\cos\left(2{,}69\right)+150+150-450-540\right)-\left(-\frac{7500}{17}\cdot\cos\left(0{,}65\right)\right)$
$\approx -293{,}05-\left(-351{,}21\right)\approx 58{,}16$
Es wird eine Fläche von rund 58 m² freigelegt.</td><td></td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

Analysis 2

I.2 Smartphones

Die Markteinführung eines neuen Smartphones vom Elektronikhersteller PEAR wird stets aufgeregt erwartet. Zur Modellierung der Entwicklung der täglichen Verkaufszahlen eines neu eingeführten Smartphones schlägt die Planungsabteilung von PEAR die Modellfunktion v vor mit

$$v(t) = 10000 \cdot t \cdot e^{-0{,}02t} \text{ mit } t \geq 0$$

wobei t die Zeit in Tagen seit Beginn der Markteinführung und $v(t)$ die am Tag t verkaufte Anzahl von Smartphones darstellt.

Die folgende Tabelle zeigt, wie viele Smartphones des Modells S2013 nach seiner Markteinführung pro Tag verkauft wurden.

t in Tagen	0	10	30	60
Verkaufszahlen in Stück	0	81 870	164 640	180 720

a) Bestätigen Sie, dass die Funktion v die täglichen Verkaufszahlen des Smartphones S2013 angenähert wiedergibt. (10P)

In der Anlage ist der Graph von v dargestellt.

b)
- Beschreiben Sie kurz den Verlauf des Graphen qualitativ.
- Interpretieren Sie darauf Bezug nehmend die Entwicklung der Verkaufszahlen im Anwendungskontext.
- Vergleichen Sie das Modell hinsichtlich des Langzeitverhaltens mit einer realistischen Entwicklung der Verkaufszahlen. (15P)

c)
- Bestätigen Sie, dass gilt: $v'(t) = 10000 \cdot e^{-0{,}02t} \cdot (1 - 0{,}02t)$.
- Berechnen Sie, an welchem Tag die meisten Smartphones S2013 verkauft werden, und berechnen Sie die entsprechende Verkaufszahl. (15P)

  Hinweis: Da aus der Abbildung deutlich wird, dass der einzige Extrempunkt ein Hochpunkt ist, reicht die Untersuchung der notwendigen Bedingung.

Eine Stammfunktion V von v hat die Gleichung $V(t) = 10\,000 \cdot \left(-50t \cdot e^{-0{,}02t} - 2500 \cdot e^{-0{,}02t}\right)$.

d) • Ermitteln Sie den Wert des Integrals $\int_0^{100} v(t)\,dt$.

• Interpretieren Sie das Integral im gegebenen Anwendungskontext. (15P)

Für die Firma PEAR ist es aus verschiedenen Gründen sinnvoll, den Produktzyklus (d. h. die Zeit vom ersten bis zum letzten verkauften Smartphone) zu begrenzen. Zur Vereinfachung der Prognose der insgesamt in den Verkauf gehenden Smartphones S2013 setzt die Planungsabteilung ab dem Wendepunkt der Verkaufszahlenentwicklung eine lineare Abnahme der täglichen Verkaufszahlen an, d. h. man ersetzt ab dem Wendepunkt der Funktion v den weiteren Verlauf des Funktionsgraphen durch die Wendetangente. Die Koordinaten des Wendepunkts sind gerundet $W(100 \mid 135335)$.

e) • Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.

• Zeichnen Sie die Wendetangente in das Koordinatensystem in der Anlage.

• Ermitteln Sie den Zeitpunkt, ab dem nach diesem Modell keine Smartphones mehr verkauft werden.

• Bestimmen Sie die Anzahl der Smartphones, die nach diesem Modell ab dem Zeitpunkt $t_w = 100$ insgesamt noch verkauft werden. (20P)

Aus Erfahrung weiß die Planungsabteilung, dass sie die Verkaufszahlenfunktion v in regelmäßigen Abständen variieren muss, um sie an das sich verändernde Verbraucherverhalten anzupassen. Bereits für das Nachfolgemodell von dem hier betrachteten Smartphone S2013 ist damit zu rechnen, dass schon am 40. Tag das Verkaufszahlenmaximum von 200 000 Smartphones erreicht wird.
Die Planungsabteilung verwendet den allgemeinen Ansatz

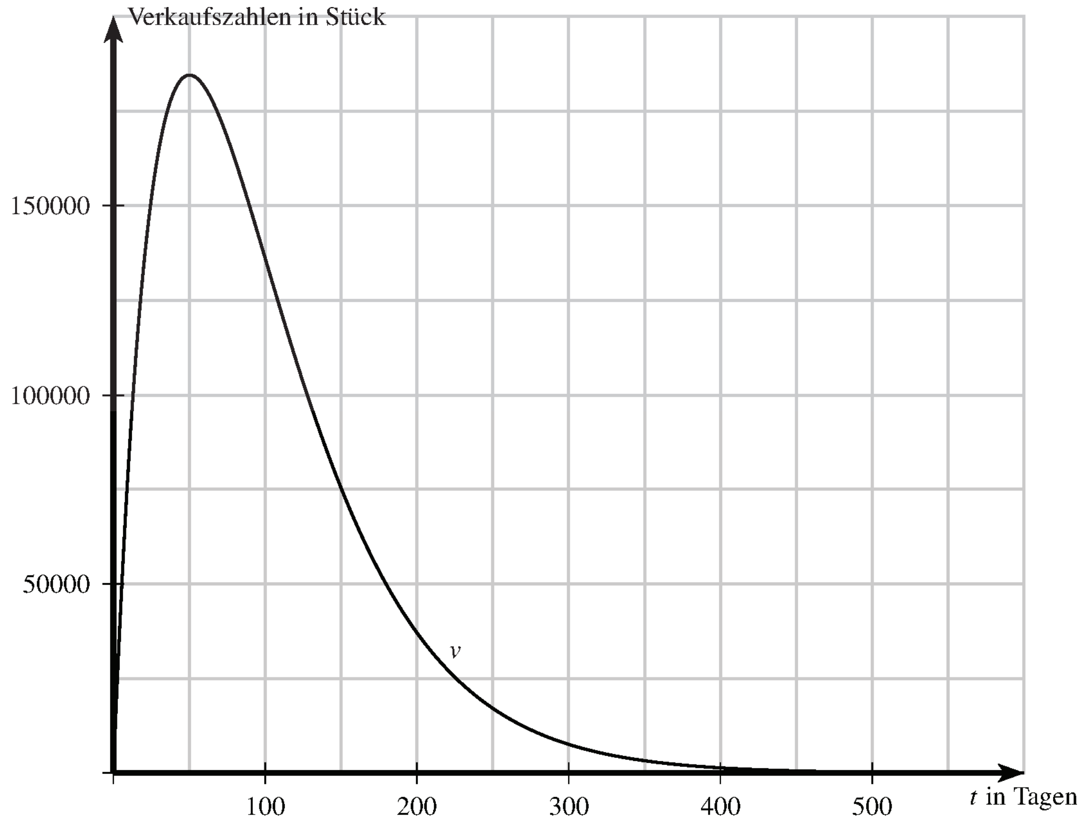
$$v_{a,\,b}(t) = 10\,000 \cdot t \cdot e^{\left(-\frac{1}{a} \cdot t + b\right)} \text{ mit } a > 0,\ \ b \geq 0\,.$$

f) Bestimmen Sie a und b so, dass die neue Verkaufszahlenfunktion die Prognose für den Zeitpunkt und den Wert des Verkaufszahlenmaximums für das Nachfolgemodell erfüllt. (15P)

g) • Ermitteln Sie, welchen Einfluss der Parameter a auf die Lage der Maximalstelle von $v_{a,\,b}$ hat.

• Ermitteln Sie, welchen Einfluss der Parameter b (für einen festen Wert des Parameters a) auf den Wert des Maximums von $v_{a,\,b}$ hat. (10P)

Anlage zur Aufgabe „Smartphones“



Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Es ist:
$v(0)=0$
$v(10)\approx 81873{,}1$
$v(30)\approx 164643{,}5$
$v(60)\approx 180716{,}5$
Die in der Tabelle angegeben täglichen Verkaufszahlen werden angenähert erreicht.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>• Der Graph steigt zunächst bis zu seinem Hochpunkt an, danach fällt er. In der Phase des Fallens wird der Graph bis zum Wendepunkt immer steiler, danach wird er immer flacher. Er nähert sich der t-Achse asymptotisch an.
Zur Erlangung der vollen Punktzahl ist die Verwendung von Fachbegriffen erforderlich.
• Ein neues Smartphone erreicht kurz nach seiner Markteinführung eine maximale Nachfrage. Danach sinken die Verkaufszahlen, bis nahezu kein Smartphone mehr verkauft wird.
• Es muss ein Vergleich zwischen Modell und Realität bezüglich des Langzeitverhaltens gezogen werden, z. B.
Das Modell liefert auch für sehr große Zeitpunkte positive Verkaufszahlen, was in einer realistischen Situation nicht plausibel ist.
oder
Das Modell liefert in der Zukunft Verkaufszahlen, die kleiner als 1 sind, das ist unrealistisch.
oder
Im Modell nehmen die Verkaufszahlen langfristig ab. Das ist in der Realität ähnlich.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

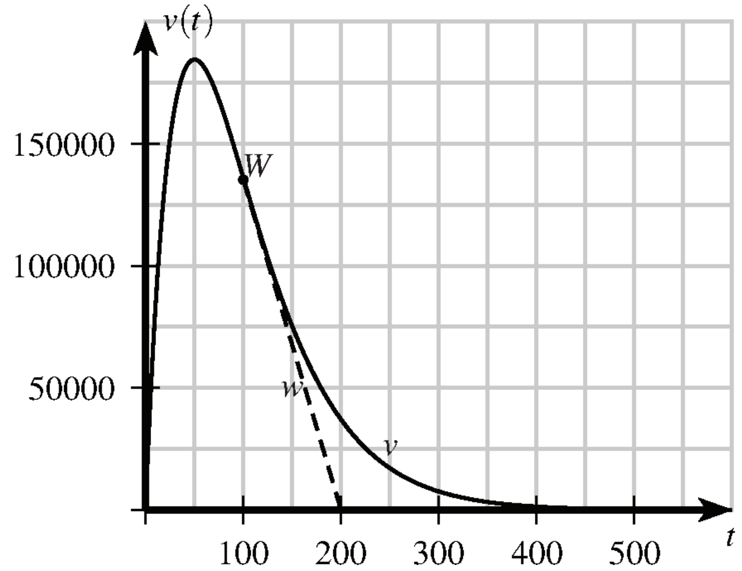
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>

- Anwendung der Produkt- und der Kettenregel:
$v'(t) = 10000 \cdot e^{-0,02t} + 10000t \cdot e^{-0,02t} \cdot (-0,02)$
$= 10000 \cdot e^{-0,02t} \cdot \left(1 + t \cdot (-0,02)\right) = 10000 \cdot e^{-0,02t} \cdot \left(1 - 0,02t\right)$
Damit ist bestätigt, dass der angegebene Term richtig ist.
- Es ist die Nullstelle von v' zu bestimmen:
$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 10000 \cdot e^{-0,02t} \cdot \left(1 - 0,02t\right) = 0$
$\Leftrightarrow 10000 \cdot e^{-0,02t} = 0 \quad \vee \quad 1 - 0,02t = 0$
$\Leftrightarrow t = \frac{1}{0,02} = 50$
$v(50) = 10000 \cdot 50 \cdot e^{-0,02 \cdot 50} = \frac{500000}{e} \approx 183940$
Die meisten Smartphones S2013, nämlich ca. 183940 Stück, werden am 50. Tag nach der Markteinführung verkauft.

</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

- Es ist
$\int_0^{100} v(t)\,dt = \left[V(t)\right]_0^{100} = \left[10000 \cdot \left(-50t \cdot e^{-0,02t} - 2500 \cdot e^{-0,02t}\right)\right]_0^{100}$
$= 10000 \cdot \left(-\frac{5000}{e^2} - \frac{2500}{e^2}\right) + 25000000$
$= -\frac{75000000}{e^2} + 25000000 \approx 14849854$
- Das Integral kann so interpretiert werden, dass nach dem mathematischen Modell in den ersten 100 Tagen nach der Markteinführung etwa 14849854 Smartphones S2013 verkauft werden.

</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	• Ansatz für die Wendetangente: $w(t) = m \cdot t + n$ $m = v'(100) = 10\,000 \cdot e^{-0{,}02 \cdot 100} \cdot \left(1 - 0{,}02 \cdot 100\right) = -\frac{10\,000}{e^2} \approx -1353$ Einsetzen der Steigung und der Koordinaten des Wendepunktes ergibt mit gerundete Werten: $135335 \approx -1353 \cdot 100 + n$ also $n \approx 270635$ $w(t) \approx -1353 \cdot t + 270635$ • Zeichnung der Wendetangente  • Der Ansatz $-1353 \cdot t + 270635 = 0$ führt zu $t \approx 200$ Wird der Graph der Verkaufszahlenfunktion ab dem Wendepunkt durch die Wendetangente ersetzt, so endet der Verkauf nach ca. 200 Tagen. • Zu berechnen ist ein Integral, das hier als Flächeninhalt eines Dreiecks gedeutet werden kann. sodass die prognostizierte Anzahl der verkauften Smartphones $\frac{100 \cdot 135335}{2} = 6\,766\,750$ beträgt. *Der Wert 200 kann für diese Rechnung auch aus der Zeichnung entnommen werden.*		20	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)	Anwendung der Produkt- und der Kettenregel: $v'_{a,b}(t) = 10000 \cdot e^{\left(-\frac{1}{a}\cdot t+b\right)} + 10000t \cdot e^{\left(-\frac{1}{a}\cdot t+b\right)} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)$ $= 10000 \cdot e^{\left(-\frac{1}{a}\cdot t+b\right)} \cdot \left(1-\frac{t}{a}\right)$ $v'_{a,b}(40) = 0$ $\Leftrightarrow 10000 \cdot e^{\left(-\frac{1}{a}\cdot 40+b\right)} \cdot \left(1-\frac{40}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow e^{\left(-\frac{1}{a}\cdot 40+b\right)} = 0 \vee \left(1-\frac{40}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow a = 40$ $v'_{40,b}$ hat wegen des linearen Terms $\left(1-\frac{t}{40}\right)$ an der Stelle $t = 40$ einen Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus. Die Verkaufszahlen erreichen dort also ein Maximum. $v_{40,b}(40) = 200000 \Leftrightarrow 10000 \cdot 40 \cdot e^{\left(-\frac{1}{40}\cdot 40+b\right)} = 200000$ $\Leftrightarrow e^{\left(-\frac{1}{40}\cdot 40+b\right)} = 0{,}5 \Leftrightarrow -1+b = \ln(0{,}5) \Leftrightarrow b = 1+\ln(0{,}5)$ Die Funktionsgleichung lautet: $v(t) = 10000 \cdot t \cdot e^{\left(-\frac{1}{40}\cdot t+1+\ln(0{,}5)\right)}$.			15

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
g)	Mit der Ableitung $v'_{a,b}(t) = 10000 \cdot e^{\left(-\frac{1}{a} \cdot t + b\right)} \cdot \left(1 - \frac{t}{a}\right)$ sieht man, dass die Maximalstelle immer bei $t_e = a$ liegt. Je größer *b* in der Funktion $v_{a,b}$ mit $v_{a,b}(a) = 10000 \cdot a \cdot e^{\left(-\frac{1}{a} \cdot a + b\right)} = 10000 \cdot a \cdot e^{(-1+b)} = 10000 \cdot a \cdot e^{-1} \cdot e^{b}$ gewählt wird, desto größer ist – bei konstantem Wert für *a* – das Maximum.			10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Lineare Algebra/Analytische Geometrie 1

II.1 Bauernhaus mit Photovoltaikanlage

Die Besitzer eines Bauernhauses möchten eine Photovoltaik-Anlage (PV-Anlage) auf ihrem Dach anbringen lassen. Sie lassen sich zunächst beraten, inwiefern ihr Haus für die Installation so einer Anlage geeignet ist.

In einem kartesischen Koordinatensystem lässt sich die Grundfläche des Bauernhauses durch folgende Eckpunkte beschreiben:

$G_1(0|0|0)$, $G_2(10|3|0)$, $G_3(5{,}5|18|0)$ und $G_4(-4{,}5|15|0)$.

Die Eckpunkte des Dachbodens haben die Koordinaten

$S_1(0|0|3)$, $S_2(10|3|3)$, $S_3(5{,}5|18|3)$ und $S_4(-4{,}5|15|3)$.

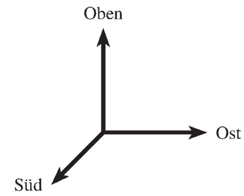
Die Punkte G_1, G_2, G_3, G_4, S_1, S_2, S_3 und S_4 bilden die Eckpunkte eines Quaders.
Die obere Kante des Daches hat die Endpunkte

$D_1(5|1{,}5|7)$ und $D_2(0{,}5|16{,}5|7)$.

Im Koordinatensystem in der Anlage sind alle Punkte und Verbindungslinien dargestellt.

Die Koordinatenachsen verlaufen in Südrichtung, in Ostrichtung und senkrecht nach oben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Süd} \\ \text{Ost} \\ \text{Oben} \end{pmatrix}.$$



Die Längeneinheit in allen drei Richtungen beträgt 1m.

Die einzelnen Photovoltaik-Elemente sind rechteckig und haben eine Breite von 0,8 m und eine Länge von 1,6 m. Die Besitzer des Bauernhauses möchten 54 dieser Elemente auf ihrem Dach montieren lassen.

a)
- Bestätigen Sie zunächst, dass die Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$ die Form eines Rechtecks hat.
- Zeigen Sie, dass es die Abmessungen der Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$ erlauben, 54 Photovoltaik-Elemente zu montieren. (20P)

b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, welche die Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$ enthält.

Kontrollergebnis: $E: 80x_1 + 24x_2 + 109x_3 = 1199$ (10P)

Eine Ausrichtung der Hausseite, auf der sich PV-Anlage befindet, nach Süden verspricht den höchsten Ertrag. Eine Abweichung von bis zu 30° von der Südrichtung wirkt sich nur gering aus.

c) Bestätigen Sie, dass die Ausrichtung der Hausseitenfläche $G_2G_3S_3S_2$ nicht zu stark von der Südrichtung abweicht. (15P)

Der Ertrag einer PV-Anlage ist am größten, wenn das Sonnenlicht im rechten Winkel auf die Anlage trifft. Da sich die Richtung des einfallenden Sonnenlichtes im Laufe eines Tages ändert, ist es nicht möglich, dass die Sonnenstrahlen zu jeder Tageszeit senkrecht auf die PV-Anlage treffen. Es wird empfohlen, dass der Neigungswinkel der PV-Anlage gegenüber der x_1x_2-Ebene zwischen 20° und 60° liegt.

d) Untersuchen Sie, ob der Winkel zwischen der Ebene E und der x_1x_2-Ebene dieser Empfehlung entspricht. (10P)

Schon durch kleinflächige Schatten auf der PV-Anlage wird der Ertrag beeinträchtigt. Auf dem Bauernhof steht ein 8 m hoher Turm mit der Turmspitze $T(15|16|8)$. An einem Wintertag haben die einfallenden Sonnenstrahlen in der Mittagszeit die Richtung $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}$.

e) • Zeigen Sie, dass die Turmspitze zur Mittagszeit einen Schatten auf die Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$ wirft und bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes SP_1. Runden Sie Ihre Angaben auf eine Nachkommastelle.

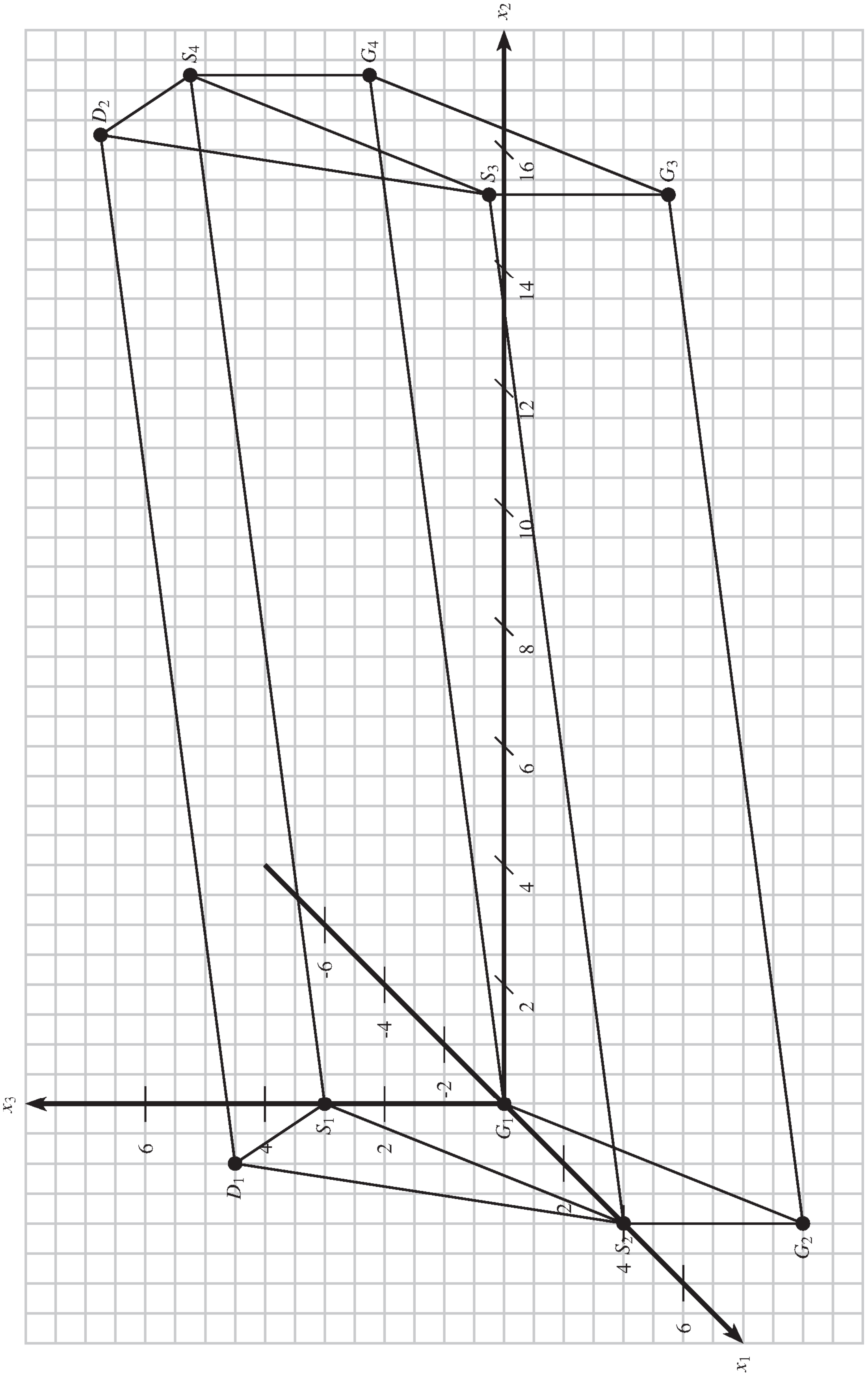
• Der Schatten, den der Turm zu der betrachteten Zeit auf das Dach wirft, ist dreieckig. Die weiteren Eckpunkte des Schattens haben (ebenfalls mit einer Genauigkeit von einer Nachkommastelle) die Koordinaten $SP_2(7{,}5|11{,}3|3{,}0)$ und $SP_3(6{,}0|16{,}3|3{,}0)$. Bestimmen Sie die Größe der beschatteten Dachfläche. (25P)

Für ein Fest wird ein kugelförmiger Gasballon so befestigt, dass er bewegungslos in der Luft schwebt. Die Ballonhülle ist durchsichtig, sodass Lichtstrahlen sie weitgehend ungehindert durchdringen können. Der Ballon hat den Mittelpunkt $M(20|30|40)$. Für Lichteffekte wird ein Laserstrahler im Punkt $L(20|30|20)$ installiert, der in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ strahlt.

f) • Für den Radius gelte zunächst $R = 10$. Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Punkte, in denen der Laserstrahl die Ballonhülle durchstößt.

• Betrachten Sie nun die Ballongröße als variabel und bestimmen Sie diejenige Radiuslänge, bei der der Laserstrahl den Ballon nicht mehr schneidet, sondern nur noch tangential berührt. (20P)

Anlage zur Aufgabe „Bauernhaus mit Photovoltaikanlage“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Durch Subtraktion der entsprechenden Koordinaten erhält man die folgenden Vektoren: $\overrightarrow{D_1S_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1{,}5 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{S_3D_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{S_2S_3} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{D_1D_2} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$ Da jeweils zwei Vektoren kollinear sind, sind die dazugehörigen Seiten parallel. Zudem schließen $\overrightarrow{S_2S_3}$ und $\overrightarrow{S_3D_2}$ einen rechten Winkel ein: $\overrightarrow{S_2S_3} \cdot \overrightarrow{S_3D_2} = -4{,}5 \cdot (-5) + 15 \cdot (-1{,}5) + 0 \cdot 4 = 0$ Das Viereck $D_1S_2S_3D_2$ ist also ein Rechteck. • 18 Elemente lassen sich nebeneinander – entlang der Dachkante $\overline{S_2S_3}$ – anbringen: $18 \cdot 0{,}8 = 14{,}4 < \left\lvert \overrightarrow{S_2S_3} \right\rvert = \sqrt{(-4{,}5)^2 + 15^2} \approx 15{,}66$ Es können 3 Reihen von Elementen übereinander angeordnet werden: $3 \cdot 1{,}6 = 4{,}8 < \left\lvert \overrightarrow{D_1S_2} \right\rvert = \sqrt{5^2 + 1{,}5^2 + (-4)^2} \approx 6{,}58$ Damit ist es möglich, $3 \cdot 18 = 54$ Elemente anzubringen.	10	10	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>Es gilt
$\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix}10\\3\\3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{S_2S_3} = \begin{pmatrix}5{,}5-10\\18-3\\3-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4{,}5\\15\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{S_2D_1} = \begin{pmatrix}5-10\\1{,}5-3\\7-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-1{,}5\\4\end{pmatrix}$
Ansatz $\vec{n}\cdot\vec{x} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{OS_2}$:
Der Normalenvektor des Ebene lässt sich mithilfe des Vektorprodukts bestimmen:
$\vec{n} = \overrightarrow{S_2S_3}\times\overrightarrow{S_2D_1} = \begin{pmatrix}-4{,}5\\15\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\-1{,}5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60\\18\\81{,}75\end{pmatrix}$
Einsetzen in die Gleichung $\vec{n}\cdot\vec{x} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{OS_2}$ liefert:
$E:\ 60x_1 + 18x_2 + 81{,}75x_3 = 60\cdot 10 + 18\cdot 3 + 81{,}75\cdot 3 = 899{,}25$.
Multiplikation mit $\frac{4}{3}$ ergibt die angegebene Koordinatengleichung:
$E:\ 80x_1 + 24x_2 + 109x_3 = 1199$</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Die Südrichtung ist durch $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ gegeben.
Da der Körper $G_1G_2G_3G_4S_1S_2S_3S_4$ einen Quader bildet, ist $\overrightarrow{G_1G_2} = \begin{pmatrix}10\\3\\0\end{pmatrix}$ ein
Normalenvektor der Ebene $G_2G_3S_3S_2$.
Es gilt für den Winkel α zwischen diesem Normalenvektor und der Südrichtung:
$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}10\\3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{10^2+3^2}}$$
Es ergibt sich: $\alpha \approx 16{,}7°$
Diese Abweichung liegt deutlich unter der Toleranzgrenze von 30°.</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	Der Winkel zwischen der Ebene E und der x_1x_2-Ebene ergibt sich aus $$\cos\alpha = \frac{\left\|\begin{pmatrix}80\\24\\109\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}80\\24\\109\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{109}{\sqrt{18857}}$$ Also gilt $\alpha \approx 37°$. Die Dachneigung beträgt ca. 37° und liegt damit im angegebenen Bereich 20° bis 60°, was der Empfehlung entspricht.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	• Betrachtet werden die Sonnenstrahlen, welche durch die Turmspitze T verlaufen. Diese liegen auf der Geraden $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}15\\16\\8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\-0,3\end{pmatrix}$ Der Schattenpunkt der Turmspitze auf dem Dach ergibt sich als Schnittpunkt von g und E: $80\cdot(15-t)+24\cdot16+109\cdot(8-0,3t)=1199$ $\Rightarrow -112,7t=-1257 \Rightarrow t=\frac{12570}{1127}$ Als Schnittpunkt von g und E ergibt sich durch Einsetzen von t in g: $SP_1(3,8\,\vert\,16,0\,\vert\,4,7)$. Zur Untersuchung, ob dieser Punkt tatsächlich auf der Dachfläche und nicht nur in der Ebene E liegt, wird deren Parameterdarstellung gebildet: $E:\vec{x}=\overrightarrow{OS_2}+r\cdot\overrightarrow{S_2S_3}+s\cdot\overrightarrow{S_2D_1}$ $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}10\\3\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5,5-10\\18-3\\3-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}5-10\\1,5-3\\7-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\3\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-4,5\\15\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-5\\-1,5\\4\end{pmatrix}$ Zu untersuchen ist, ob die Parameter zu SP_1 aus dem Intervall [0; 1] stammen: $\begin{pmatrix}3,8\\16,0\\4,7\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}10\\3\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-4,5\\15\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-5\\-1,5\\4\end{pmatrix}$ Aus der dritten Zeile ergibt sich unmittelbar $s\approx0,425$ und damit aus der zweiten Zeile $r\approx0,909$. Eine Überprüfung in der ersten Zeile ist nicht notwendig, da zuvor gezeigt wurde, dass SP_1 in E liegt. Die Parameter liegen beide in [0; 1], womit der Punkt tatsächlich in der Dachfläche liegt. • Die dreieckige Schattenfläche wird von den Vektoren $\overrightarrow{SP_1SP_2}$ und $\overrightarrow{SP_1SP_3}$ aufgespannt. Für die Größe der Dreiecksfläche gilt: $A=\frac{1}{2}\cdot\left\vert\overrightarrow{SP_1SP_2}\times\overrightarrow{SP_1SP_3}\right\vert=\frac{1}{2}\cdot\left\vert\begin{pmatrix}7,5-3,8\\11,3-16,0\\3,0-4,7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6,0-3,8\\16,3-16,0\\3,0-4,7\end{pmatrix}\right\vert$ $=\frac{1}{2}\cdot\left\vert\begin{pmatrix}3,7\\-4,7\\-1,7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2,2\\0,3\\-1,7\end{pmatrix}\right\vert=\frac{1}{2}\cdot\left\vert\begin{pmatrix}8,5\\2,55\\11,45\end{pmatrix}\right\vert=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{209,855}\approx7,2$ Der Inhalt der dreieckigen Fläche beträgt ca. 7,2 m².		10	15

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)	Gleichung der Geraden, auf der der Laserstrahl verläuft: $$l:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$ • Gleichung der Kugel: $(x_1 - 20)^2 + (x_2 - 30)^2 + (x_3 - 40)^2 = 10^2$ Einsetzen der Komponenten aus der Geradengleichung ergibt $(20-20)^2 + (30+u-30)^2 + (20+3u-40)^2 = 10^2$ Zusammenfassen: $10u^2 - 120u + 400 = 100$ (*) Vereinfachen: $u^2 - 12u + 30 = 0$ Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $u_{1,2} = 6 \pm \sqrt{6}$ Einsetzen in die Geradengleichung ergibt die Schnittpunkte $L_1\left(20 \middle\| 36+\sqrt{6} \middle\| 38+3\sqrt{6}\right) \approx L_1\left(20{,}0 \middle\| 38{,}4 \middle\| 45{,}3\right)$ und $L_2\left(20 \middle\| 36-\sqrt{6} \middle\| 38-3\sqrt{6}\right) \approx L_2\left(20{,}0 \middle\| 33{,}6 \middle\| 30{,}7\right)$ • Sei ρ der variable Radius. Dann ergibt sich analog zu obigen Überlegungen der Ansatz (siehe (*)) $10u^2 - 120u + 400 = \rho^2$ bzw. $u^2 - 12u + \frac{400-\rho^2}{10} = 0$ Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $u_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - \frac{400-\rho^2}{10}}$ Im Fall des tangentialen Berührens hat diese Gleichung *genau eine* Lösung, es muss also gelten: $36 - \frac{400-\rho^2}{10} = 0 \Leftrightarrow 360 = 400 - \rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 40$ Da im geometrischen Kontext negative Radiuslängen sinnlos sind und somit die Lösung $\rho = -\sqrt{40}$ entfällt, beträgt die Länge des gesuchten Radius $\sqrt{40}$ m, also ca. 6,3 m. *Alternativ lässt sich ρ auch mit elementargeometrischen Mitteln als Höhe des Dreiecks L_1L_2M bestimmen.*	10		10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Lineare Algebra/Analytische Geometrie 2

II.2 Pinguine

Pinguine leben in Kolonien in den kalten Regionen der Südhalbkugel. In einer dieser Kolonien mit etwa 50 000 Tieren finden Forscher 150 tote Tiere, die offensichtlich an einer bisher unbekannten Krankheit gestorben sind. Erkrankte Pinguine kann man daran erkennen, dass sie kurz nach der Infektion ein auffälliges Verhalten zeigen. An dem Tag, an dem 150 tote Tiere gefunden wurden, haben die Forscher 800 kranke Tiere gesichtet.

Zur Beschreibung der Ausbreitung der Krankheit mit einem Modell teilen die Forscher die gesamte Population von 50 000 Pinguinen in drei Gruppen ein: *Gesunde, Kranke* und *Tote*.

Im Vektor $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} G_n \\ K_n \\ T_n \end{pmatrix}$ wird die Verteilung der Gesamtpopulation auf diese drei Gruppen am Tag n (nach Ausbruch der Krankheit) notiert. Die einzelnen Komponenten G_n, K_n und T_n geben jeweils die Anzahl der Pinguine in der betreffenden Gruppe an.

Im Rahmen des Modells gilt der Zusammenhang $\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n$, wobei M die folgende Matrix ist:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}15 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{v}_0$ beschreibt die Population von 50 000 gesunden Pinguinen.

a)
- Erstellen Sie den zu der Übergangsmatrix M gehörenden Übergangsgraphen.
- Interpretieren Sie Matrixeinträge $m_{11} = 0{,}99$ und $m_{32} = 0{,}3$ vor dem Hintergrund des Sachkontextes.
- Begründen Sie im Sachkontext, warum die Summe der Spalteneinträge der Matrix M jeweils 1 beträgt. (15P)

b)
- Berechnen Sie mithilfe des Modells die Verteilung der Gesamtpopulation von 50 000 Pinguinen für die ersten beiden Tage nach Ausbruch der Krankheit.
- Beurteilen Sie, ob das von den Forschern gewählte Modell die Beobachtungen der im Text beschriebenen Pinguinfunde angemessen beschreibt. (15P)

Aufgrund der schlechten Wetterbedingungen war an einem Mittwoch die Zählung der Tiere nicht möglich. Am darauf folgenden Tag werden insgesamt 1052 kranke und 1574 tote Pinguine gezählt.

c) Bestimmen Sie mithilfe des Modells die Anzahl der gesunden, kranken und toten Tiere für den Mittwoch, an dem die Zählung nicht möglich war. (10P)

d) • Begründen Sie, dass im Rahmen dieses Modells langfristig alle Pinguine sterben werden.

• Beurteilen Sie, inwiefern es sich bei der Abnahme der Anzahl der lebenden Pinguine um eine exponentielle Abnahme handelt.

• Geben Sie die Grenzmatrix M^n für $n \to \infty$ an. Begründen Sie Ihre Angabe. (15P)

e) • Bestätigen Sie rechnerisch, dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50\,000 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von M ist.

• Interpretieren Sie die Bedeutung des Eigenvektors $\vec{a}$ im Sachzusammenhang.

• Zeigen Sie, dass zum Eigenwert 1 ausschließlich Eigenvektoren gehören, die Vielfache von $\vec{a}$ sind.

• Begründen Sie, dass ein Eigenvektor, dessen zugehöriger Eigenwert ungleich 1 ist, als Populationsvektor nicht sinnvoll ist. (20P)

Einige der genesenen Pinguine werden genauer untersucht. Es stellt sich heraus, dass diese gegen die Krankheit immun sind, also nicht wieder erkranken.
In einem erweiterten Modell geht man daher davon aus, dass <u>alle</u> Pinguine nach einer überstandenen Infektion gegen die Krankheit immun sind. Die Gruppe der *immunen* Pinguine wird in das Modell aufgenommen, sodass nun der Vektor

$$\vec{w}_n = \begin{pmatrix} G_n \\ K_n \\ T_n \\ I_n \end{pmatrix}$$

die Verteilung der Gesamtpopulation auf die vier Gruppen am Tag n beschreibt. In der Gruppe der *Gesunden* befinden sich also nur diejenigen gesunden Tiere, die zwar gesund, aber nicht immun sind.

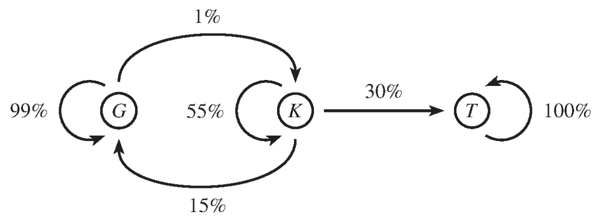
f) • Geben Sie für das erweiterte Modell eine Übergangsmatrix L an und begründen Sie Ihre Angaben.

• Bestimmen Sie den Anteil der Tiere an der Gesamtpopulation, der nach diesem Modell die Epidemie überlebt. (15P)

Für die Matrix L gilt: $L^{180} \approx \begin{pmatrix} 0{,}164 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}004 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}555 & 0{,}667 & 1 & 0 \\ 0{,}277 & 0{,}333 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) Bestätigen Sie, dass man mithilfe der Matrix $P = \begin{pmatrix} 0{,}027 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}001 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}649 & 0{,}667 & 1 & 0 \\ 0{,}324 & 0{,}333 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ den Bestand der Pinguinpopulation nach etwa einem Jahr näherungsweise berechnen kann. (10P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Übergangsgraph:  • 99% der gesunden Tiere sind am nächsten Tag noch gesund. 30% der erkrankten Tiere sind am nächsten Tag tot. • Die Spaltensumme in der Matrix M ist die Summe der Anteile, die von einem bestimmten Zustand in einen beliebigen Zustand (G, K, T) übergehen. Diese Summe muss 1 betragen, da keine Tiere – z. B. durch Zuwanderung oder Geburten – dazukommen.	5	10	
b)	• Mit dem Anfangszustand $\begin{pmatrix} 50000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\overrightarrow{v_1} = M \cdot \begin{pmatrix} 50000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49500 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v_2} = M \cdot \begin{pmatrix} 49500 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49080 \\ 770 \\ 150 \end{pmatrix}$ • Somit ergeben sich nach zwei Tagen ungefähr die im Text genannten Werte von 800 kranken und 150 toten Tieren. Die Abweichungen zwischen berechneten und beobachteten Werten betragen nur 3,75 %, das Modell scheint daher angemessen zu sein.	10		5

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>Zur Bestimmung der Vortagspopulation muss ein Gleichungssystem gelöst werden:
$$\begin{pmatrix} 0,99 & 0,15 & 0 \\ 0,01 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0,3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g \\ k \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47374 \\ 1052 \\ 1574 \end{pmatrix}$$
Die ersten beiden Gleichungen lauten:
$$\begin{aligned} 0,99 \cdot g + 0,15 \cdot k &= 47374 \\ 0,01 \cdot g + 0,55 \cdot k &= 1052 \end{aligned}$$
Durch Multiplikation der zweiten Zeile mit 99 ergibt sich
$$\begin{aligned} 0,99 \cdot g + 0,15 \cdot k &= 47375 \\ 0,99 \cdot g + 54,45 \cdot k &= 104148 \end{aligned}$$
Durch Subtraktion und Division erhält man $k = 1045,561694...$ und durch Einsetzen in die erste Zeile $g = 47694,10681...$.

Nun kann man mithilfe der dritten Zeile $0,3 \cdot k + t = 1574 \Leftrightarrow t = 1574 - 0,3k$ die Zahl der toten Tiere bestimmen: $t = 1260,3314917...$

Am Mittwoch gab es ca. 47 694 gesunde, 1046 kranke und 1260 tote Pinguine.

Runden Prüflinge die Werte immer ab oder rechnen sie mit den ungerundeten Werten weiter, so ist die volle Punktzahl zu geben. Werden die Ergebnisse in den Antwortsätzen nicht gerundet, so führt dies zu einem Abzug von einem Punkt.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>

- Da das System abgeschlossen ist (also beispielsweise keine Geburten oder Zuwanderungen stattfinden), täglich 30 % der erkrankten Pinguine sterben und stets Neuerkrankungen stattfinden, reduziert sich die Population der lebenden Tiere jeden Tag und wird aussterben.
- Täglich sterben 30 % der erkrankten Tiere. Dies legt eine exponentielle Abnahme nahe. Jedoch unterliegt die Anzahl der erkrankten Tiere Schwankungen, da kranke Tiere gesunden und gesunde Tiere erkranken können. Die Abnahme entspricht daher nur näherungsweise einer exponentiellen Entwicklung.
- $\lim\limits_{n\to\infty} M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Für alle Pinguine verläuft die Krankheit auf lange Sicht tödlich; das bedeutet, dass die ersten beiden Komponenten im Populationsvektor sich dem Wert Null annähern. Das wird dadurch erreicht, dass die Komponenten in den ersten beiden Zeilen der Grenzmatrix den Wert Null annehmen. Weil die Anzahl von 50 000 Pinguinen insgesamt konstant bleibt, müssen die Einträge in der letzten Zeile der Grenzmatrix den Wert 1 annehmen.
</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

- Es gilt $\begin{pmatrix}0{,}99 & 0{,}15 & 0\\ 0{,}01 & 0{,}55 & 0\\ 0 & 0{,}3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\50000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}99\cdot 0+0{,}15\cdot 0+0\cdot 50000\\ 0{,}01\cdot 0+0{,}55\cdot 0+0\cdot 50000\\ 0\cdot 0+0{,}3\cdot 0+1\cdot 50000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\50000\end{pmatrix}$,
also ist $\vec{a}$ Eigenvektor mit dem Eigenwert 1.
- Der Eigenvektor $\vec{a}$ beschreibt den Zustand, in dem alle 50 000 Pinguine tot sind. Im Sachzusammenhang beschreibt $M\vec{a}=\vec{a}$ den Sachverhalt, dass, wenn alle Pinguine verstorben sind, dies auch in Zukunft der Fall sein wird.
- Sei $\vec{b}$ ein weiterer Eigenvektor von M mit einem Eigenwert $\lambda_b=1$. D.h. es muss gelten: $M\cdot\vec{b}=\vec{b}$. Dies führt auf das lineare Gleichungssystem
$\begin{pmatrix}0{,}99 & 0{,}15 & 0\\ 0{,}01 & 0{,}55 & 0\\ 0 & 0{,}3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}0{,}99b_1+0{,}15b_2=b_1\\ 0{,}01b_1+0{,}55b_2=b_2\\ 0{,}3b_2+b_3=b_3\end{matrix}\right|$
$\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}-0{,}01b_1+0{,}15b_2=0\\ 0{,}01b_1-0{,}45b_2=0\\ 0{,}3b_2=0\end{matrix}\right|$
Aus der letzten Zeile folgt: $b_2=0$. Und damit folgt: $b_1=0$. b_3 kann dagegen beliebig gewählt werden. Jeder Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist also ein Vielfaches des Eigenvektors $\vec{a}$.
- Sei $\vec{b}$ ein weiterer Eigenvektor von M mit einem Eigenwert $\lambda_b\neq 1$,
d. h. es gilt: $M\cdot\vec{b}=\lambda_b\cdot\vec{b}$. Die Summe der (nicht-negativen!) Komponenten eines Vektors, der die Pinguinpopulation sinnvoll beschreiben soll, muss 50 000 betragen. Würde der Eigenvektor $\vec{b}$ diese Bedingung erfüllen, so würde die Summe der Komponenten des zeitlich darauffolgenden Vektors $\lambda_b\cdot\vec{b}$ nicht 50 000 betragen, da $\lambda_b\neq 1$. Dies würde bedeuten, dass sich die Größe der Gesamtpopulation verändern würde und das System also nicht abgeschlossen wäre.

</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	• Es ergibt sich die Matrix $$L=\begin{pmatrix}0{,}99 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}01 & 0{,}55 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}3 & 1 & 0\\ 0 & 0{,}15 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$ Begründung: Kein Tier geht jetzt mehr von der Gruppe der *Kranken* in die Gruppe der *Gesunden*, sondern der Anteil der *Kranken*, die innerhalb eines Tages genesen, findet sich in der Gruppe der *Immunen* wieder. Alle Tiere aus der Gruppe der *Immunen* sind im gegebenen Modell auch einen Tag später noch in dieser Gruppe. • Von der Gruppe der *Gesunden* wechselt in jedem Zeitschritt ein fester Anteil zur Gruppe der *Kranken*; die Anzahl der *Gesunden* nimmt also zugunsten der Anzahl der *Kranken* ab. Die Anzahl der *Kranken* wiederum nimmt zugunsten der Anzahl der *Immunen* und der Anzahl der *Toten* ab; die Gesamtanzahl der Population verteilt sich langfristig also ausschließlich auf die *Immunen* und die *Toten*.Von den erkrankten Pinguinen sterben 30 %, während 15 % gegen die Krankheit immun werden. Es sterben somit doppelt so viele kranke Tiere, wie immun werden. Damit wird ein Drittel der Pinguine die Epidemie überleben. *Sollte sich die Lösung der Prüflinge auf die Angaben im nachfolgenden Aufgabenteil beziehen, ist dies nur bei vollständiger Argumentation als korrekt zu bewerten.*	5	5	5
g)	$$L^{360}=L^{180}\cdot L^{180}\approx\begin{pmatrix}0{,}164 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}004 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}555 & 0{,}667 & 1 & 0\\ 0{,}277 & 0{,}333 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}164 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}004 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}555 & 0{,}667 & 1 & 0\\ 0{,}277 & 0{,}333 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ $$\approx\begin{pmatrix}0{,}027 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}001 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}649 & 0{,}667 & 1 & 0\\ 0{,}324 & 0{,}333 & 0 & 1\end{pmatrix}=P$$ Da man mithilfe der Matrix L^{180} den Bestand der Pinguinpopulation nach 180 Tagen berechnen kann, kann man mithilfe von $L^{360}\approx P$ den Bestand der Pinguinpopulation nach etwa einem Jahr (welches meistens 365 Tage hat) näherungsweise berechnen.		10	
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Stochastik 1

III.1 Ventilschäden

Im Jahr 1955 verfügte eine Kunstflugstaffel in Amarillo, Texas, über fünf Nachbauten der berühmten Fokker Dr1-III. Dieses Flugzeug hat einen 7-Zylinder-Motor, und da jeder Zylinder ein Auslassventil hat, sind bei einer Maschine 7 Auslassventile eingebaut.

Die Ersatzventile liefert eine örtliche Firma in Kisten mit je 50 Ventilen; die Erfahrung zeigt, dass 95% der gelieferten Ventile nach dem Einbau funktionsfähig sind. (Die Anzahl der funktionsfähigen Ventile sei binomialverteilt.)

Wenn ein Ventil defekt ist, lässt sich der Motor zwar anwerfen, aber er läuft dann mit geringerer Leistung. Bei zwei defekten Ventilen läuft der Motor gar nicht und lässt sich nicht einmal anwerfen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass in einer Kiste

- …alle Ventile funktionsfähig sind.
- … genau drei Ventile defekt sind.
- …weniger als 45 Ventile funktionsfähig arbeiten. (15P)

Der Mechaniker tauscht routinemäßig bei allen fünf Maschinen alle Auslassventile aus.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich genau ein Motor danach nicht anwerfen lässt, die anderen aber mit voller Leistung laufen. (15P)

Auslassventile sind hoch belastet. Ihre mittlere Lebensdauer beträgt erfahrungsgemäß 80 Stunden. Die Lebensdauer ist normalverteilt mit einer Standardabweichung von 18 Stunden.
Deswegen werden alle Ventile in regelmäßigen Abständen ersetzt, und zwar jeweils nach 40 Flugstunden. Gehen Sie im Weiteren davon aus, dass die neu eingebauten Ventile funktionsfähig sind.

c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Pilot während eines Fluges noch vor Ablauf des zulässigen Wartungsintervalls von 40 Stunden erlebt, dass sein Motor weniger leistet, aber noch läuft. (15P)

Die Piloten sind mit ihren Maschinen jeweils eine Stunde in der Luft, bevor sie wieder landen (und gegebenenfalls die Hilfe des Mechanikers erhalten). Berechtigterweise möchte kein Pilot erleben, dass bei seiner Maschine während seiner Flugstunde unterwegs der Motor mit geringerer Leistung läuft. Man einigt sich darauf, dass die Piloten bereit sind, ein solches Risiko einzugehen, wenn es in keiner Betriebsstunde 1% überschreitet.

d) • Begründen Sie, dass die gefährlichste Flugstunde die letzte Stunde vor der Wartung ist.

• Bestimmen Sie die Ausfallswahrscheinlichkeit für ein Ventil während dieser Stunde. (15P)

Die Mechaniker werden neuerdings auch von einer zweiten Firma mit Ventilen beliefert; die Ventile dieser Firma sind erfahrungsgemäß zu 97% funktionsfähig. Die Firma liefert die Ventile in Kisten zu 70 Stück. Die Inhalte von je einer Kiste der ersten und der zweiten Firma werden von den Mechanikern zusammengetan; aus dieser „Mischkiste“ wird das nächste benötigte Ventil zufällig herausgenommen und beim Einbau verwendet. Nach dem Einbau wird es als defekt erkannt.

e) • Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel für die Merkmalspaare
funktionsfähiges Ventil - *defektes Ventil* und
Ventil von Firma 1 - *Ventil von Firma 2*,
ob die beiden Merkmalspaare stochastisch unabhängig sind.

• Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das defekte Ventil aus der Lieferung der Firma 2 kommt. (20P)

Einem Piloten passiert es in der 40. Flugstunde seiner Maschine, dass genau zwei Ventile ausfallen und deswegen der Motor nicht mehr läuft. Mit seiner ganzen Erfahrung gelingt es ihm, die Fokker unbeschadet zu landen.
Die Luft-Aufsichtsbehörde FAA fordert, dass es in einem Zeitraum von einem Jahr bei hier 125 Wartungsintervallen, die ja jeweils vierzig Flugstunden umfassen, höchstens einen solchen Unfall geben darf, anderenfalls entzieht sie die Starterlaubnis für die Staffel.

f) • Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für diesen Motorausfall bei $p \approx 0{,}0075\,\%$ liegt.

• Ermitteln Sie mithilfe der Poisson-Verteilung die Wahrscheinlichkeit für den Entzug der Starterlaubnis bei 125 Wartungsintervallen. (20P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Sei X die Anzahl der funktionsfähigen Ventile. • Alle Ventile sind in Ordnung: $P(X=50)=0{,}95^{50}\approx 0{,}0769$ • Genau drei Ventile sind defekt: $P(X=47)=\binom{50}{47}\cdot 0{,}95^{47}\cdot 0{,}05^{3}\approx 0{,}2199$ • Weniger als 45 Ventile arbeiten einwandfrei: Mit der Tabelle ergibt sich: $P(X<45)=P(X\leq 44)\approx 1-0{,}9622=0{,}0378$	15		
b)	Es werden insgesamt 35 Ventile eingebaut. Da es 5 Maschinen gibt, gibt es auch 5 sich ausschließende Ereignisse, welche Maschine nicht funktioniert. Die anderen 4 Maschinen laufen einwandfrei, also sind die 28 eingebauten Ventile jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0,95 in Ordnung. Die Wahrscheinlichkeit, dass die anderen 4 Maschinen einwandfrei laufen, beträgt damit $p_4=0{,}95^{28}$. „Ein bestimmter Motor springt nicht an“ bedeutet: Es wurden mindestens zwei defekte Ventile eingebaut, dies passiert mit der Wahrscheinlichkeit $p_{def}=1-\binom{7}{1}\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95^{6}-0{,}95^{7}\approx 0{,}0443$ Insgesamt ergibt sich $p_b=5\cdot p_4\cdot p_{def}\approx 0{,}053$.	10	5	
c)	Es sei p_{VD} die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ventil schon nach weniger als 40 Stunden Betriebszeit ausfällt. Dann gilt: $p_{VD}=\Phi\left(\frac{40-80}{18}\right)\approx 1-\Phi(2{,}22)\approx 0{,}0132$ Da genau ein Ventil ausfallen soll und die anderen einwandfrei arbeiten sollen, ergibt sich für die gewünschte Wahrscheinlichkeit: $p_c=7\cdot p_{VD}\cdot\left(1-p_{VD}\right)^{6}\approx 0{,}085$		15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>

- Argumentation aus dem Sachkontext: Nach der Wartung sind die Ventile neu, ihr Verschleiß also noch nicht gegeben; da das Ausfallsrisiko mit dem Verschleiß steigt und der Verschleiß mit der Betriebsdauer, ist das Ausfallsrisiko (pro Flugstunde) am Ende der Einsatzzeit am größten.

  Argumentation aus der Mathematik: Je näher der Wartungstermin kommt, desto näher rückt auch der Termin des Endes der mittleren Lebensdauer.

  Das in den Berechnungen benötigte negative Argument $\frac{t-80}{18}$ der Φ-Funktion wird damit betragsmäßig kleiner, und damit wird der Wert der Φ-Funktion größer.

  Anmerkung: Es wird lediglich <u>eine</u> Begründung gefordert.

- Die Zufallsvariable L gibt die Lebensdauer des Ventils an:

  Ausfall eines Ventils während der 40. Stunde:

  $$P(39 \le L \le 40) = \Phi\left(\frac{40-80}{18}\right) - \Phi\left(\frac{39-80}{18}\right) \approx \Phi(-2{,}22) - \Phi(-2{,}28) \approx 0{,}002$$

  Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ventil in der 40. Stunde ausfällt, beträgt ca. 0,2 %.

</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	• Vierfeldertafel: (siehe unten)			

	f	$\overline{f}$	
A	$\frac{19}{48}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{5}{12}$
B	$\frac{679}{1200}$	$\frac{7}{400}$	$\frac{7}{12}$
	$\frac{577}{600}$	$\frac{23}{600}$	1

- A : Das Ventil stammt von der Firma 1.
  B : Das Ventil stammt von der Firma 2.
  f : Das Ventil ist funktionsfähig.
  $\overline{f}$: Das Ventil ist defekt.

Zu prüfen ist, ob die Gleichung $P(A)\cdot P(f)=P(A\cap f)$ erfüllt wird.

$$P(A)=\frac{5}{12} \qquad P(f)=\frac{577}{600}$$

$$P(A\cap f)=\frac{19}{48}\approx 0{,}3958$$

$$P(A)\cdot P(f)=\frac{5}{12}\cdot\frac{577}{600}=\frac{577}{1440}\approx 0{,}4007$$

Die Ergebnisse sind verschieden, aber fast gleich. Es liegt also im strengen Sinne keine stochastische Unabhängigkeit vor, näherungsweise ist dies aber doch der Fall.

Es ist

$$P(B\,|\,\overline{f})=\frac{P(B\cap\overline{f})}{P(\overline{f})}=\frac{\frac{7}{400}}{\frac{23}{600}}=\frac{21}{46}\approx 0{,}4565$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ventil aus der Lieferung der Firma 2 stammt, unter der Bedingung, dass es defekt ist, beträgt ca. 45,65 %.

Bewertung	I	II	III
	5	15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>

• X : Anzahl der vollen Stunden seit der letzten Wartung

Y : Anzahl der Ventile, die defekt sind.

$P(39 < X < 40) \approx \Phi\left(\frac{40-80}{18}\right) - \Phi\left(\frac{39-80}{18}\right) \approx \Phi(-2{,}22) - \Phi(-2{,}28)$

$\approx 0{,}9887 - 0{,}9868 = 0{,}0019$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ventil in der 40. Stunde ausfällt, beträgt ca. 0,19 %.

Für genau zwei Ventile gilt:

$P(Y = 2) = \binom{7}{2} \cdot 0{,}0019^2 \cdot 0{,}9981^5 = 0{,}000075$

Die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Ausfall in der letzten Stunde vor der Wartung beträgt ca. 0,0075 %.

• Z: Anzahl der Unfälle in einem Jahr
Gegeben: $n = 125$, $p \approx 0{,}000075$
Der Erwartungswert für solche Motorausfälle bei 125 Wartungsintervallen beträgt:
$\mu = n \cdot p \approx 125 \cdot 0{,}000075 \approx 0{,}0094$
Mit der Poissonverteilung ergibt sich:
$P(Z > 1)$
$= 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1)$
$\approx 1 - \frac{0{,}0094^0}{0!} \cdot e^{-0{,}0094} - \frac{0{,}0094^1}{1!} \cdot e^{-0{,}0094}$
$\approx 0{,}000044$
Die Wahrscheinlichkeit für den Entzug der Starterlaubnis beträgt ca. 0,0044 %.
Deutet der Prüfling den Aufgabentext so, dass der erste beschriebene Unfall mitzählt und es schon bei mindestens einem weiteren Unfall zum Entzug der Starterlaubnis kommt, ist dies ebenfalls als korrekt zu werten. In diesem Fall wäre die Wahrscheinlichkeit $P(Z > 0)$ zu bestimmen.

</td><td></td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

Stochastik 2

III.2 Wassertaxis

Viele Urlaubsinseln im Indischen Ozean sind nur mit Wasserflugzeugen, den sogenannten „Wassertaxis“ zu erreichen. Die Fluggesellschaft WT möchte derzeit die Service- und Arbeitsqualität verbessern.

Bei der Fluggesellschaft WT ist für jedes ihrer Flugzeuge ein Team von fünf Personen (A, B, C, D, E) fest verantwortlich. Wie die meisten Flugzeuge werden die Wassertaxis von zwei Piloten gesteuert. Die Passagiere und Flugzeuge werden am Boden von drei Personen betreut.

Von der Flugleitung werden die monatlichen Einsatzpläne zufällig festgelegt. Es wird für jeden Tag zufällig bestimmt, wer von den 5 Personen an welchem Tag als Pilot fliegt und wer als Bodenpersonal arbeitet. Dabei sind alle 5 Personen gleichberechtigt.

a) Geben Sie die möglichen Pilotenteams an. (5P)

Der Graph in der Anlage zeigt die Übergänge der Anzahl der bereits als Piloten eingesetzten Personen von einem Tag zum anderen. Dabei geben die Zahlen in den Kreisen an, wie viele Mitglieder des Teams bereits einen Flugeinsatz hatten. ③ bedeutet beispielsweise, dass drei der fünf Teammitglieder bereits geflogen sind.

b) Bestätigen Sie die im Graphen in der Anlage eingerahmten Übergangswahrscheinlichkeiten. (20P)

Es dauert mindestens drei Tage, bis jede der 5 Personen mindestens einmal als Pilot eingesetzt wurde.

c)
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass schon nach 3 Tagen alle Personen mindestens einmal als Pilot eingeteilt waren.
- Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Tage, bis alle Personen mindestens einmal als Pilot eingeteilt waren.

  Hinweis: Nehmen Sie zuerst an, dass bereits 4 Personen als Pilot eingeteilt waren und bestimmen Sie für diese Bedingung den Erwartungswert für die Anzahl der noch verbleibenden Tage, bis ***alle*** *Personen mindestens einmal als Pilot eingeteilt waren. Verwenden Sie das Ergebnis, indem Sie anschließend entsprechende Rechnungen wiederholen und statt 4 Personen 3 Personen und danach auch 2 und 0 Personen betrachten.* (30P)

Obwohl die Einteilung der Teammitglieder nach dem Zufallsprinzip erfolgt, gibt es immer wieder Diskussionen um die Arbeitsverteilung. Um die Situation zu beurteilen, lässt die Unternehmensleitung einige Punkte untersuchen. Durch die täglich wiederholte, zufällige Personaleinsatzplanung kann der Einsatz eines Teammitgliedes als Pilot durch die Flugleitung als Bernoulli-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0,4$ beschrieben werden.

d) - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmtes Teammitglied innerhalb der nächsten 30 Tage genau 5-mal als Pilot eingesetzt wird.
   - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmtes Teammitglied mehr als 25-mal innerhalb der nächsten 50 Tage als Pilot eingesetzt wird. (10P)

Ein älteres Teammitglied meint, dass er mit 28 Einsätzen in den letzten hundert Tagen viel zu selten als Pilot geflogen war. Er behauptet, dass bei der Verteilung der Flugeinsätze geschummelt wurde und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er zum Einsatz kam, geringer als $p = 0,4$ war.

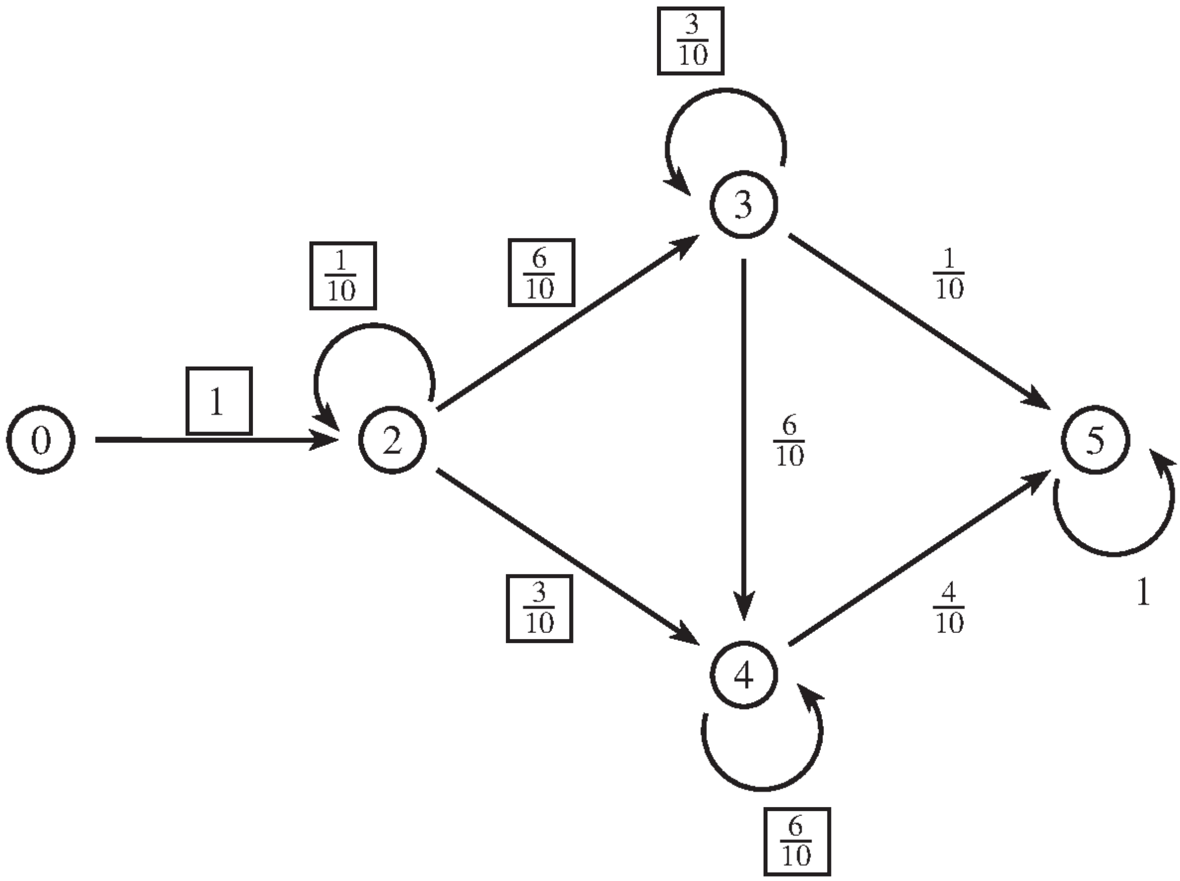
e) - Untersuchen Sie seine Behauptung mittels eines Hypothesentests zum Signifikanzniveau von 5 % ausgehend von der Nullhypothese $H_0 : p \geq 0,4$.
   - Beurteilen Sie, welche Schlüsse er ziehen könnte, wenn er 35-mal innerhalb von 100 Tagen eingesetzt worden wäre. (20P)

Zur Qualitätssicherung hat die Geschäftsführung der WT eine Umfrage unter 2300 Fluggästen durchführen lassen:

92 % der Fluggäste bleiben der Fluglinie treu, egal ob sie zufrieden sind oder nicht.
67 % der Fluggäste sind zufrieden und bleiben WT treu.
2 % der Fluggäste sind unzufrieden und werden die Fluggesellschaft wechseln.

f) Ermitteln Sie die Anzahl aller zufriedenen Passagiere und bestimmen Sie die Anzahl der Passagiere, die die Fluggesellschaft wechseln und nicht zufrieden sind. (15P)

Anlage zur Aufgabe „Wassertaxis“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Es gibt zehn mögliche Pilotenkombinationen: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE	5		
b)	Betrachtet man das Wählen zweier Piloten als Ziehen ohne Zurücklegen unter Nichtbeachtung der Reihenfolge, so ergeben sich die Übergangswahrscheinlichkeiten wie folgt: Da immer zwei Piloten für einen Flug eingesetzt werden, beträgt die Wahrscheinlichkeit $P(0 \to 2) = 1$. $P(2 \to 2) = \frac{\binom{2}{2}}{10} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ $P(3 \to 3) = \frac{\binom{3}{2}}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3$ $P(4 \to 4) = \frac{\binom{4}{2}}{10} = \frac{6}{10} = 0{,}6$ $P(2 \to 3) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1}}{10} = \frac{2 \cdot 3}{10} = 0{,}6$ $P(2 \to 4) = \frac{\binom{3}{2}}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3$		20	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	• M : Alle Piloten sind nach 3 Tagen mindestens einmal geflogen. Dann entnimmt man dem Graphen aus der Anlage: $P(M)=\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10}=0{,}18$. • $w_4:(von\ 4\ Personen\ zu\ 5\ Personen)$ $w_4=0{,}4\cdot 1+0{,}6\cdot(w_4+1)\Leftrightarrow 0{,}4\cdot w_4=1\Rightarrow w_4=\frac{1}{0{,}4}=2{,}5$ $w_3:(von\ 3\ Personen\ zu\ 5\ Personen)$ $w_3=0{,}1\cdot 1+0{,}6\cdot(w_4+1)+0{,}3\cdot(w_3+1)\Rightarrow w_3=\frac{25}{7}\approx 3{,}57$ $w_2:(von\ 2\ Personen\ zu\ 5\ Personen)$ $w_2=0{,}1\cdot(w_2+1)+0{,}6\cdot(w_3+1)+0{,}3\cdot(w_4+1)\Rightarrow w_2=\frac{545}{126}\approx 4{,}33$ $w_0:(von\ 0\ Personen\ zu\ 5\ Personen)$ $w_0=1\cdot(w_2+1)=\frac{545}{126}+1=\frac{671}{126}\approx 5{,}33$ Der Erwartungswert für die Anzahl der Tage, bis alle Personen mindestens einmal als Pilot eingeteilt waren, beträgt ca. 5,3 Tage. *Andere – auch näherungsweise – Rechenwege sind möglich.*	10		20
d)	Sei X die Anzahl der Einsätze als Pilot. • $P(X=5)=\binom{30}{5}\cdot 0{,}4^5\cdot 0{,}6^{25}\approx 0{,}41\%$ • $P(X>25)=1-P(X\le 25)\approx 1-0{,}9427=0{,}0573\approx 5{,}7\,\%$.	10		
e)	• Einseitiger Hypothesentest: $H_0:p\ge 0{,}4\quad H_1:p<0{,}4$ Dabei sind $n=100,\ \mu=np=100\cdot 0{,}4=40$ und $\sigma=\sqrt{40\cdot 0{,}6}=\sqrt{24}\approx 4{,}9>3$ Die Laplace-Bedingung ist also erfüllt. Es ergibt sich der folgende Annahmebereich: $[40-1{,}64\cdot 4{,}9;\ 100]\approx[31{,}96;\ 100]$ Weil er weniger als 32 Einsätze hatte, wird die Nullhypothese verworfen. Er hat also vermutlich recht. • Wenn er 35 Einsätze geflogen hätte, könnte er keine Schlüsse in seinem Sinne ziehen.		15	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)				

	treu	wechseln	
zufrieden	67%	6%	73%
unzufrieden	25%	2%	27%
	92%	8%	100%

Anzahl zufriedener Passagiere: $2300 \cdot 0{,}73 = 1679$

Anzahl der Passagiere, die unzufrieden sind und wechseln: $2300 \cdot 0{,}02 = 46$

		I	II	III
f)	(Bewertung)		15	
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25