Analysis 1

I.1 Netbook-Vermarktung

Der Computerladen AIKON produziert und vermarktet Netbooks. Es wird davon ausgegangen, dass die gesamte tägliche Produktion abgesetzt wird. Die täglichen Gesamtkosten in Euro für die Produktion hängen von der Anzahl x der produzierten Netbooks ab und werden durch eine Kostenfunktion K beschrieben.

Zur Kostenentwicklung sind den Produktionsplanern die folgenden Daten bekannt:

Anzahl x der produzierten Netbooks pro Tag	0	80	150
Gesamtkosten K in Euro pro Tag	12 450	32 850	38 100

Darüber hinaus haben die Produktionsplaner die Information, dass bei einer Produktion von 80 Netbooks die Grenzkosten K' 47 Euro pro Stück betragen, das heißt $K'(80) = 47$.

a) • Bestätigen Sie, dass $K(x) = 0{,}02x^3 - 5{,}8x^2 + 591x + 12\,450$ bei den gegebenen Informationen die Gleichung einer passenden Kostenfunktion darstellt.
• Beschreiben Sie die inhaltliche Bedeutung von $K'(80)$. (15P)

Die Produktionsplaner betrachten die Kostenentwicklung bei Erhöhung der Produktion genauer.

b) • Bestimmen Sie die Produktionsmenge, bei der die Grenzkosten minimal sind, und markieren Sie den zugehörigen Punkt auf dem Graphen in der Anlage.
• Bestimmen Sie die Höhe der minimalen Grenzkosten.
• Interpretieren Sie die Bedeutung der minimalen Grenzkosten im Sachkontext. (20P)

Das Computerunternehmen verkauft die Netbooks zu einem Preis von jeweils 599 Euro.

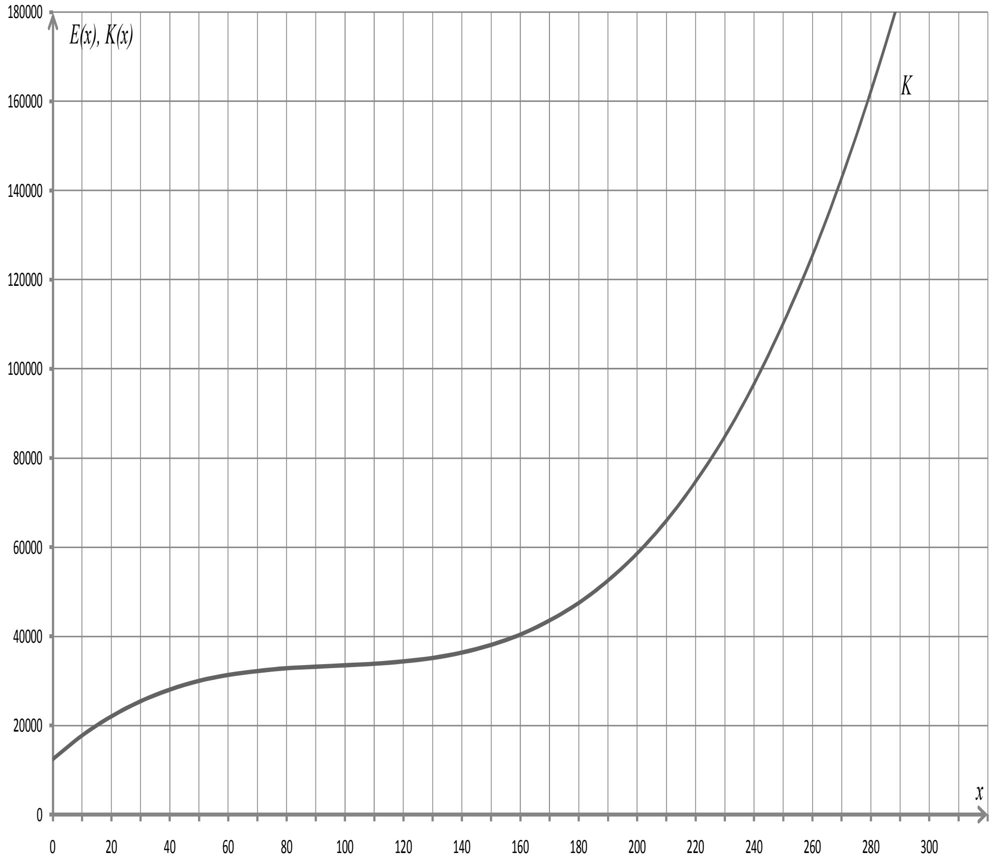
c) • Geben Sie die Gleichung der Erlösfunktion E an und zeichnen Sie den Graphen von E in das Koordinatensystem in der Anlage.
• Bestätigen Sie die Gleichung der Gewinnfunktion G mit $G(x) = -0{,}02x^3 + 5{,}8x^2 + 8x - 12\,450$. (15P)

d) • Bestätigen Sie, dass das Unternehmen mit Gewinn produziert, wenn mindestens 51 und höchstens 283 Netbooks hergestellt werden.
• Bestimmen Sie die Produktionsmenge, bei der maximaler Gewinn erwirtschaftet wird. (25P)

In der Zwischenzeit ist es zu einem Überangebot auf dem Netbookmarkt gekommen. Die Konkurrenz versucht, die Firma AIKON vom Markt zu drängen. Sie bietet dazu qualitativ gleichwertige Netbooks zu einem Preis von 300 € an. Die Geschäftsleitung der Firma AIKON beschließt, ebenfalls den Preis deutlich zu senken. Sie schlägt hierzu vor, das Minimum der Stückkosten k mit $k(x)=\frac{K(x)}{x}$ zu bestimmen.

e)
- Weisen Sie nur unter der Verwendung der ersten Ableitung von k nach, dass die tägliche Produktionsmenge, bei der die Stückkosten k am geringsten sind, in guter Näherung bei 158 Netbooks erreicht wird.
- Ermitteln Sie, welchen Verkaufspreis das Computerunternehmen für ein Netbook mindestens verlangen muss, wenn die produzierten 158 Netbooks verlustfrei verkauft werden sollen.
- Begründen Sie, warum sich AIKON wegen seiner Konkurrenten derzeit noch keine ernsthaften Sorgen machen muss. (25P)

Anlage zum Aufgabenteil b) und c)



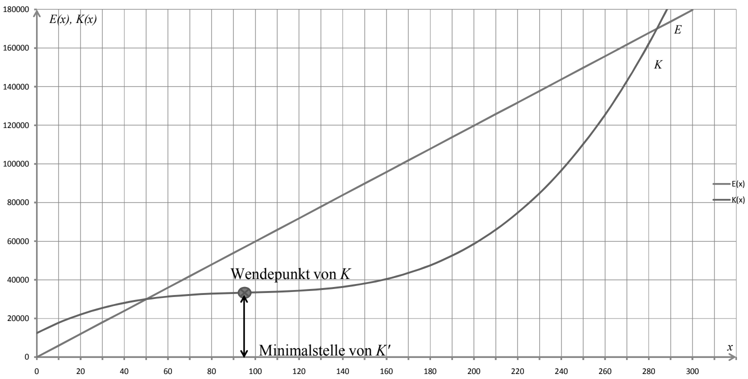
Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• $K(x) = 0{,}02x^3 - 5{,}8x^2 + 591x + 12\,450$. $K(0) = 0{,}02 \cdot 0^3 - 5{,}8 \cdot 0^2 + 591 \cdot 0 + 12\,450 = 12\,450$ ist richtig. $K(80) = 0{,}02 \cdot 80^3 - 5{,}8 \cdot 80^2 + 591 \cdot 80 + 12\,450 = 32\,850$ ist richtig. $K(150) = 0{,}02 \cdot 150^3 - 5{,}8 \cdot 150^2 + 591 \cdot 150 + 12\,450 = 38\,100$ ist richtig. Man bestimme die erste Ableitung von K : $K'(x) = 0{,}06x^2 - 11{,}6x + 591$ $K'(80) = 0{,}06 \cdot 80^2 - 11{,}6 \cdot 80 + 591 = 47$ ist richtig. Damit erfüllt die Funktion K alle genannten Vorgaben. • Inhaltliche Bedeutung von $K'(80) = 47$: Bei einer Produktion von 80 Netbooks betragen die zusätzlichen Kosten bei Erhöhung der Produktion um eine Mengeneinheit etwa 47 €.	10	5	
b)	• Minimum der Grenzkosten: Grenzkosten: $K'(x) = 0{,}06x^2 - 11{,}6x + 591$. Berechnung des Minimums: $K''(x) = 0 \wedge K'''(x) > 0$ $K''(x) = 0{,}12x - 11{,}6 = 0$ $0{,}12x = 11{,}6$ $x = \frac{1160}{12} = 96{,}\overline{6}$ Da $K'''(x) = 0{,}12 > 0$ für alle $x \in D_{K'''}$ *(oder* $K'''(96{,}\overline{6}) = 0{,}12 > 0$), befindet sich bei $x = 96{,}\overline{6}$ eine Minimalstelle der Grenzkostenfunktion K'. Im Sachkontext sind dies also 97 pro Tag produzierte Netbooks. *Andere Nachweise der Minimalität sind möglich.* • Die minimalen Grenzkosten betragen $K'(97) = 30{,}34$ Euro. *Der zugehörige Punkt ist in der Grafik unter c) eingezeichnet.* • Die minimalen Grenzkosten werden durch den Wendepunkt der Kostenkurve markiert. Beim Minimum von K' ist die Kostensteigerung pro zusätzlich produziertem Netbook am geringsten. Hier lohnt sich somit eine Produktionsausweitung besonders.		15	5

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>

- Erlösfunktion: $E(x) = 599 \cdot x$.

  Grafische Darstellung:



- Gewinnfunktion:

  Mit $G(x) = E(x) - K(x)$ gilt:

$$G(x) = 599x - \left(0{,}02x^3 - 5{,}8x^2 + 591x + 12450\right)$$
$$= -0{,}02x^3 + 5{,}8x^2 + 8x - 12450\,.$$

</td><td>10</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

- Die Grenzen der Gewinnzone entsprechen den beiden Nullstellen der Gewinnfunktion, die identisch sind mit den beiden der Grafik zu entnehmenden Schnittstellen der Graphen von *E* und *K*. Es ist:

  $G(50) = -50$ und $G(51) = 390{,}78$ sowie

  $G(283) = 1\,026{,}46$ und $G(284) = -499{,}28$.

  Das Unternehmen produziert mit Gewinn, wenn die tägliche Produktion zwischen 51 und 283 Geräten liegt.

- Tägliche Produktionsmenge, bei der maximaler Gewinn erwirtschaftet wird:

  Berechnung des Maximums:

$$G'(x) = 0 \wedge G''(x) < 0$$
$$G'(x) = -0{,}06x^2 + 11{,}6x + 8 = 0$$
$$-0{,}06x^2 + 11{,}6x + 8 = 0$$
$$x^2 - 193{,}\overline{3}x - 133{,}\overline{3} = 0$$
$$x_{1,2} = 96{,}\overline{6} \pm \sqrt{9\,344{,}\overline{4} + 133{,}\overline{3}}$$
$$x_{1,2} \approx 96{,}67 \pm 97{,}35$$
$$x_1 \approx -0{,}7$$
$$x_2 \approx 194{,}0$$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>x_1 ist im Aufgabenkontext irrelevant.
$G''(x) = -0{,}12x + 11{,}6$,
$G''(194{,}02) = -0{,}12 \cdot 194{,}02 + 11{,}6 \approx -11{,}7 < 0$.
Andere Nachweise der Maximalität sind möglich.
Damit wird bei einer Produktionsmenge von etwa 194 Netbooks maximaler Gewinn erwirtschaftet.</td><td>10</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>• Minimum der Stückkostenfunktion:
Als Stückkostenfunktion k ergibt sich: $k(x) = 0{,}02x^2 - 5{,}8x + 591 + \frac{12450}{x}$.
Wenn bei $x = 158$ das Minimum der Stückkostenfunktion liegt, dann muss $k'(x) = 0$ (hier wenigstens näherungsweise) gelten.
Man bestimme zunächst die erste Ableitung der Stückkostenfunktion:
$k'(x) = 0{,}04x - 5{,}8 - \frac{12450}{x^2}$,
dann setze man das gegebene Argument ein. Es ergibt sich
$k'(158) = 0{,}04 \cdot 158 - 5{,}8 - \frac{12450}{158^2} \approx 0{,}02$.
Wegen
$k'(157) = 0{,}04 \cdot 157 - 5{,}8 - \frac{12450}{157^2} \approx -0{,}03 < 0$ und
$k'(159) = 0{,}04 \cdot 159 - 5{,}8 - \frac{12450}{159^2} \approx 0{,}07 > 0$
befindet sich das Minimum der Stückkostenfunktion tatsächlich in guter Näherung bei $x = 158$.
Alternativ kann der Nachweis der Minimaleigenschaft über eine Betrachtung des Verlaufs der Stückkostenkurve erfolgen.

• Bestimmung des Mindestpreises:
Die Stückkosten betragen dann
$k(158) = 0{,}02 \cdot 158^2 - 5{,}8 \cdot 158 + 591 + \frac{12450}{158} \approx 252{,}68$.
Um 158 Netbooks verlustfrei zu verkaufen, müsste das Unternehmen einen Mindestverkaufspreis von 252,68 Euro pro Netbook verlangen.

• Das Computerunternehmen könnte sich langfristig weiter am Markt behaupten, wenn der Preis für ein Netbook nicht den ermittelten Mindestverkaufspreis unterschreitet. Da im vorliegenden Fall der Marktpreis noch über dem Mindestverkaufspreis liegt, erzielt das Unternehmen weiterhin Gewinn, den es unter Berücksichtigung der neuen Erlösfunktion wieder maximieren kann.</td><td></td><td>10</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

Analysis 2

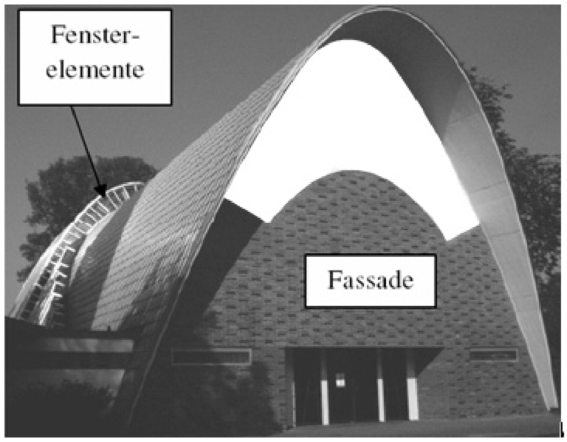
I.2 Erlöserkirche

Die Erlöserkirche in Hamburg-Farmsen (siehe Foto) ist architektonisch unter dem Gesichtspunkt interessant, dass sie an vielen Stellen die Formen von Parabeln als gestalterische Merkmale aufnimmt.

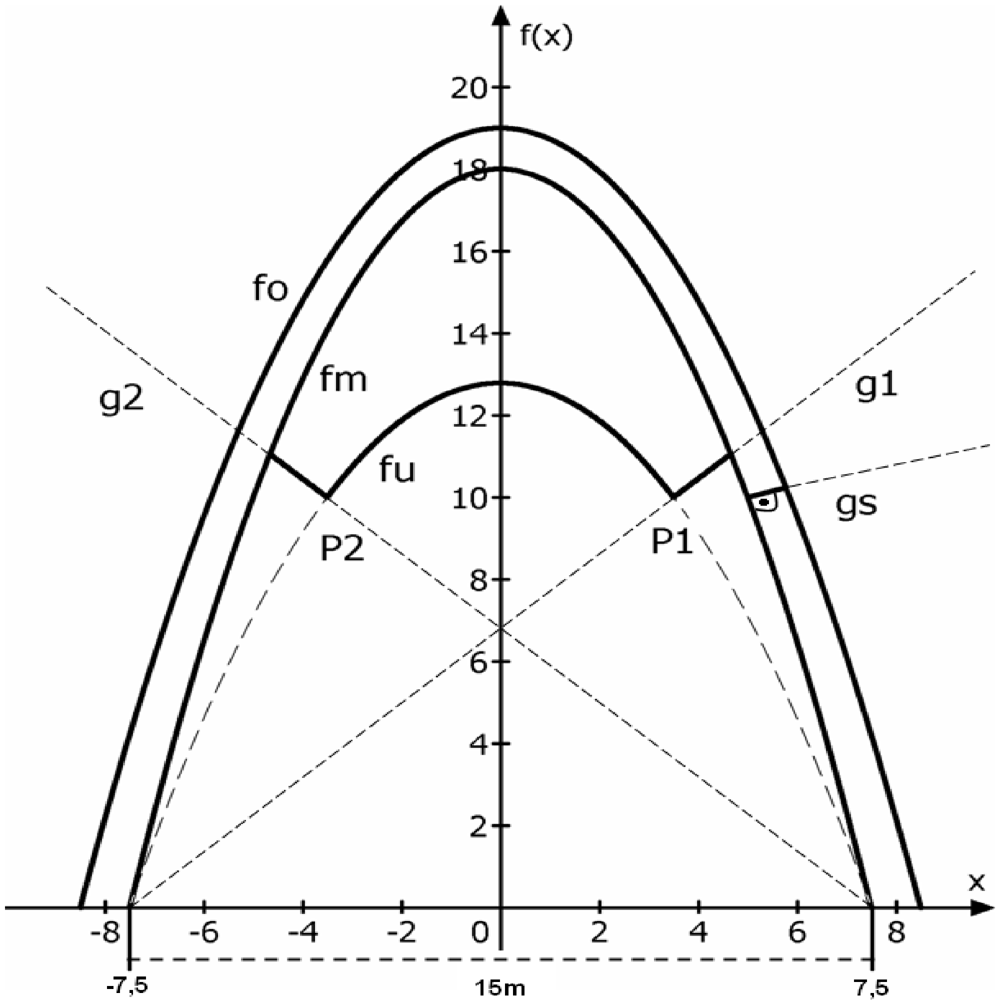
Die vordere Fläche unter dem parabelförmigen Dach wird im Folgenden als Fassade bezeichnet (siehe Foto).

In dem unten abgebildeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit einem Meter.

Die mittlere Parabel f_m beschreibt die Begrenzung der Fassade. Sie ist am Boden 15 Meter breit.



Die obere Parabel f_o beschreibt die äußere Dachlinie auf der Rückseite der Kirche oberhalb der Fensterelemente (siehe Foto). Ihr Scheitelpunkt ist 1 m höher als der Scheitelpunkt der Fassadenbegrenzung.



a) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass die Funktionsgleichung für die mittlere Parabel folgendermaßen lautet: $f_m(x) = -0{,}32x^2 + 18$.
Entnehmen Sie die erforderlichen Daten dem Text und dem umseitigen Koordinatensystem. (10P)

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f_m und berechnen Sie den Gesamtflächeninhalt der abgebildeten Fassade. (15P)

Die weiße Fläche in der Fassade ist symmetrisch aufgebaut und wird durch zwei Parabelbögen und zwei Geradenstücke begrenzt.
Die untere Parabel wird hinreichend genau durch die Funktionsgleichung $f_u(x) = -0{,}227x^2 + 12{,}784$ beschrieben.
Der relevante Parabelbogen von f_u beginnt im Punkt $P_1(3{,}5|10)$ und endet im Punkt $P_2(-3{,}5|10)$. Die Gerade g_1 geht durch den Punkt P_1 und schneidet die x-Achse im negativen Bereich in einer Nullstelle sowohl der mittleren als auch der unteren Parabel.

c) • Bestimmen Sie durch Rechnung die Gleichung der Geraden g_1.
(*Kontrollergebnis:* $g_1(x) = \frac{10}{11}x + \frac{75}{11}$)
• Ermitteln Sie die Gleichung der zweiten Geraden g_2. (15P)

d) Berechnen Sie die Schnittpunkte von f_m und g_1 und geben Sie auch die Schnittpunkte von f_m und g_2 an. (20P)
(*Kontrollergebnis für einen Schnittpunkt von* f_m *und* g_1*:* $P(4{,}659\,|\,11{,}054)$)

e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der weißen Fläche in der Fassade. (20P)

Zwischen der mittleren Parabel f_m und der oberen Parabel f_o sind Fensterelemente eingebaut, durch die Licht in das Innere der Kirche fällt. Es gilt in hinreichender Näherung: $f_o(x) = -0{,}263 \cdot x^2 + 19$.
Die Befestigung der Fensterelemente erfolgt an den parabelförmigen Dachlinien und an geraden Metallstreben, die rechtwinklig auf der mittleren Parabel angebracht sind.
Eine dieser Streben geht vom Punkt (5|10) der mittleren Parabel aus und verläuft auf der Geraden g_S, deren Gleichung $g_S(x) = \frac{5}{16} \cdot x + \frac{135}{16}$ lautet.

f) • Die Gerade g_S und die Parabel f_m schneiden sich im Punkt (5|10).
Zeigen Sie, dass g_S und die Tangente an f_m in (5|10) senkrecht zueinander stehen.
• Berechnen Sie den Punkt, in dem die Gerade g_S auf f_o trifft, und bestimmen Sie die Länge der Strebe. (20P)

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Funktionsgleichung der mittleren Parabel:
$A(-7{,}5\,|\,0)$, $B(0\,|\,18)$, $C(7{,}5\,|\,0)$ sind Punkte der Parabel.
Es gilt: $f_m(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$
Wegen der Symmetrie zur y-Achse gilt: $a_1 = 0$.
Da B Punkt der Parabel ist, gilt: $a_0 = 18$. Also gilt:
$$f_m(x) = a_2 \cdot x^2 + 18$$
Da A Punkt der Parabel ist, gilt:
$$a_2 \cdot (-7{,}5)^2 + 18 = 0$$
$$a_2 = -\frac{18}{56{,}25} = -0{,}32$$
Also lautet die Parabelgleichung: $f_m(x) = -0{,}32 \cdot x^2 + 18$.
Alternativ ist z.B. auch eine Überprüfung der Funktionsgleichung mit Hilfe von drei Punkten möglich.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Bestimmung der Fassadenfläche:
$$\int_{-7{,}5}^{7{,}5} f_m(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^{7{,}5} (-0{,}32x^2 + 18)dx$$
$$= 2 \cdot \left[\frac{-0{,}32}{3} x^3 + 18x\right]_0^{7{,}5}$$
$$= 2 \cdot \left(\frac{-0{,}32}{3} \cdot 7{,}5^3 + 18 \cdot 7{,}5\right)$$
$$= 180$$
Die Fassade hat einen Flächeninhalt von 180 m^2.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>

- Gleichung der Geraden g_1:

$P_1(-7{,}5\,|\,0)$ und $P_2(3{,}5\,|\,10)$ sind Punkte der Geraden.

Eingesetzt in die allgemeine Geradengleichung $g_1(x) = m_1 \cdot x + b_1$ ergibt sich

(1) $0 = -7{,}5 \cdot m_1 + b_1$

(2) $10 = 3{,}5 \cdot m_1 + b_1$

(2) – (1) ergibt: $10 = 11 \cdot m_1$ und damit $m_1 = \frac{10}{11}$.

Eingesetzt in (1): $0 = -7{,}5 \cdot \frac{10}{11} + b_1$ und damit $b_1 = \frac{75}{11}$.

Es gilt $g_1(x) = \frac{10}{11}x + \frac{75}{11}$.

- Gleichung der Geraden g_2:

Aus Symmetriegründen folgt für die zweite Gerade: $g_2(x) = -\frac{10}{11}x + \frac{75}{11}$.

</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Berechnung der Schnittpunkte der ersten Geraden mit der mittleren Parabel:

$$-0{,}32x^2 + 18 = \frac{10}{11}x + \frac{75}{11}$$

$$-0{,}32x^2 - \frac{10}{11}x + \frac{123}{11} = 0$$

$$x^2 + \frac{125}{44}x - \frac{3075}{88} = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{125}{88} \pm \sqrt{\frac{15625}{7744} + \frac{3075}{88}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{125}{88} \pm \frac{535}{88}$$

$$x_1 = \frac{205}{44} = 4{,}659...$$

$$x_2 = -7{,}5$$

Parabel und Gerade schneiden sich in $S_1\left(\frac{205}{44}\,\middle|\,\frac{2675}{242}\right) \approx S_1(4{,}659\,|\,11{,}054)$ bzw. in $S_2(-7{,}5\,|\,0)$.

Aus Symmetriegründen sind die Schnittpunkte für die zweite Gerade mit der mittleren Parabel $S_3(-\frac{205}{44}\,|\,\frac{2675}{242}) \approx S_3(-4{,}659\,|\,11{,}054)$ und $S_4(7{,}5\,|\,0)$.

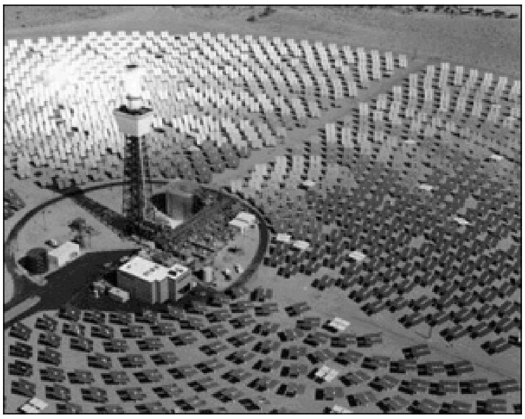
</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	Bestimmung des Flächeninhalts der weißen Fläche in der Fassade: Das Maß der weißen Fläche in der Fassade kann durch die Berechnung von vier Teilflächen, die durch die Intervalle $[-4,66;-3,5]$, $[-3,5;0]$, $[0;3,5]$, $[3,5;4,66]$ begrenzt sind, oder aus Symmetriegründen durch zwei Teilflächen und deren Verdoppelung ermittelt werden. $A_1 \approx \int_{-4,66}^{-3,5} [f_m(x) - g_2(x)]dx$ $= \int_{-4,66}^{-3,5} \left[-0,32 \cdot x^2 + 18 - \left(-\frac{10}{11}x + \frac{75}{11}\right)\right]dx$ $= \int_{-4,66}^{-3,5} \left[-0,32 \cdot x^2 + \frac{10}{11}x + \frac{123}{11}\right]dx$ $= \left[\frac{-0,32}{3} \cdot x^3 + \frac{5}{11}x^2 + \frac{123}{11}x\right]_{-4,66}^{-3,5}$ $= \left(\frac{-0,32}{3} \cdot (-3,5)^3 + \frac{5}{11} \cdot (-3,5)^2 + \frac{123}{11} \cdot (-3,5)\right) - \left(\frac{-0,32}{3} \cdot (-4,66)^3 + \frac{5}{11} \cdot (-4,66)^2 + \frac{123}{11} \cdot (-4,66)\right)$ $= 2,44759...$ $A_2 = 2 \cdot \int_0^{3,5} [f_m(x) - f_u(x)]dx$ $= 2 \cdot \int_0^{3,5} \left[-0,32 \cdot x^2 + 18 - \left(-0,227x^2 + 12,784\right)\right]dx$ $= 2 \cdot \int_0^{3,5} \left[-0,093 \cdot x^2 + 5,216\right]dx$ $= 2 \cdot \left[-\frac{0,093}{3} \cdot x^3 + 5,216x\right]_0^{3,5}$ $= 33,85375$ Aus Symmetriegründen gilt: $A_3 \approx \int_{3,5}^{4,66} [f_m(x) - g_2(x)]dx = A_1 \approx 2,448$ $A_W = 2 \cdot A_1 + A_2 \approx 4,895 + 33,854 = 38,749$ Die weiße Fläche hat einen Inhalt von etwa 38,75 m^2.		10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)	• Nachweis des rechten Winkels: $f_m(x) = -0{,}32 \cdot x^2 + 18$ $f_m{}'(x) = -0{,}64 \cdot x$ $f_m{}'(5) = -0{,}64 \cdot 5 = -3{,}2$. Es gilt nun: $\frac{5}{16} \cdot (-3{,}2) = -1$, womit der rechte Winkel nachgewiesen wäre. • Schnittstellen der Graphen von f_0 und g_s: $-0{,}263 \cdot x^2 + 19 = \frac{5}{16} \cdot x + \frac{135}{16}$ $0{,}263 \cdot x^2 + 0{,}3125x - 10{,}5625 = 0$ $x^2 + 1{,}1882 \cdot x - 40{,}1616 = 0$ $x_{1,2} = -0{,}5941 \pm \sqrt{0{,}5941^2 + 40{,}1616}$ $x_1 \approx 5{,}77$ $(x_2 \approx -6{,}96)$ nicht relevant. Der gesuchte Schnittpunkt hat die Koordinaten $(5{,}77 \mid 10{,}24)$. Länge der Strebe: $s = \lvert P_0 P_1 \rvert$ $\approx \sqrt{(10{,}24 - 10)^2 + (5{,}77 - 5)^2}$ $\approx 0{,}8065...$ Die Strebe ist etwa 81 cm lang.	5	5	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA/AG 1

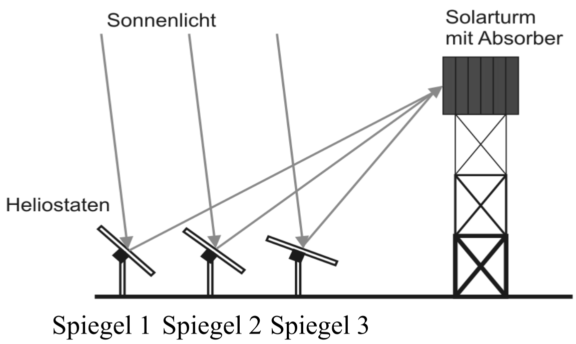
II.1 Solarturmkraftwerk



1982 wurde „Solar One“, ein Sonnenkraftwerk nach dem Turmprinzip, in Barstow (Kalifornien) in Betrieb genommen.

Kraftwerke nach dem Turmprinzip nutzen flache Spiegel (sogenannte Heliostaten), um Sonnenlicht auf einen Turm in der Mitte zu konzentrieren. Dort entsteht aufgrund der hohen Temperatur Wasserdampf, welcher zur Stromerzeugung genutzt wird.

Die Spiegel sind schwenkbar gelagert, so dass die Spiegelflächen dem Stand der Sonne entsprechend ausgerichtet werden können.



Ein Koordinatensystem sei so angelegt, dass der Mittelpunkt des Spiegels 1 die Koordinaten $M_1(-10 \mid -20 \mid 0)$ hat.

Eine Einheit entspricht 1 m in der Realität.

Zu einem bestimmten Zeitpunkt werden die Sonnenstrahlen, die auf den Mittelpunkt von Spiegel 1 treffen, mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 53 \\ 46 \\ 45 \end{pmatrix}$ reflektiert.

An Spiegel 2 werden die Sonnenstrahlen im Mittelpunkt dieses Spiegels so reflektiert, dass die reflektierten Strahlen durch die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 20{,}5 \\ 22{,}5 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, beschrieben werden können.

a) • Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, welche die im Mittelpunkt des Spiegels 1 reflektierten Strahlen beschreibt.

• Bestätigen Sie, dass die in den jeweiligen Mittelpunkten der beiden Spiegel reflektierten Strahlen auf den Punkt $T(96 \mid 72 \mid 90)$ des Turmes treffen. (20P)

Im Folgenden wird ein dritter Spiegel des Solarturmkraftwerks mit den Eckpunkten $A\,(3{,}9 \mid -2{,}5 \mid -1{,}5)$, $B\,(-1{,}1 \mid 4{,}5 \mid -1{,}5)$, $C\,(-3{,}9 \mid 2{,}5 \mid 1{,}5)$ und $D\,(1{,}1 \mid -4{,}5 \mid 1{,}5)$ betrachtet.

b) • Zeigen Sie, dass der Spiegel 3 rechteckig ist und dass sein Mittelpunkt M_3 im Ursprung des Koordinatensystems liegt.

• Im Solarturmkraftwerk befinden sich 1818 gleichartige Spiegel. Berechnen Sie den Gesamtflächeninhalt aller Spiegel. (20P)

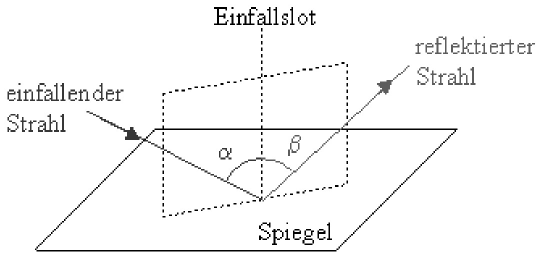
Zur optimalen Energienutzung muss sichergestellt sein, dass möglichst viel Licht ungehindert auf den Turm trifft. Im Folgenden wird exemplarisch überprüft, ob die durch *h* beschriebenen Strahlen ungehindert an Spiegel 3 vorbeilaufen.

c) Geben Sie eine Gleichung in Parameterform für die Ebene *E* an, in der der Spiegel 3 liegt, und bestimmen Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene. (20P)

Zur Kontrolle: $E: 105x_1 + 75x_2 + 148x_3 = 0$

d)
- Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden *h* mit der Ebene *E*. Runden Sie Ihre Angaben auf eine Nachkommastelle.
- Entscheiden Sie, ob der durch *h* beschriebene Strahl ungehindert an Spiegel 3 vorbeiläuft. (20P)

Der Winkel zwischen einfallendem Strahl und Einfallslot (Einfallswinkel α) ist gleich dem Winkel zwischen reflektiertem Strahl und Einfallslot (Ausfallswinkel β). Einfallender Strahl, reflektierter Strahl und Einfallslot liegen in ein und derselben Ebene.
Das Einfallslot ist hierbei eine zur Spiegelfläche senkrecht verlaufende Gerade durch den Punkt, in welchem der einfallende Strahl auf die Spiegelfläche trifft.



$\alpha = \beta$

Der Spiegel 3 wird dem Sonnenstand entsprechend neu ausgerichtet, so dass die im Mittelpunkt $M_3(0 \mid 0 \mid 0)$ reflektierten Strahlen wieder auf den Punkt $T\,(96 \mid 72 \mid 90)$ des Turmes treffen.

e) Zu einem späteren Zeitpunkt hat sich der Sonnenstand verändert: Nun fällt paralleles Sonnenlicht in Richtung $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ auf die Spiegel.

Bestimmen Sie den Einfallswinkel der Sonnenstrahlen, die im Punkt M_3 auf den neu ausgerichteten Spiegel 3 treffen. (20P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	I	II	III
a)	• Die Gerade g verläuft durch den Punkt $M_1(-10\mid -20\mid 0)$ und hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}53\\46\\45\end{pmatrix}$. Damit ergibt sich: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-10\\-20\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}53\\46\\45\end{pmatrix}$ ($r \in \mathbb{R}$). • Setzt man $r = 2$ in die Geradengleichung g ein, so ergibt sich: $\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix}-10\\-20\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}53\\46\\45\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}96\\72\\90\end{pmatrix}$. Setzt man $t = 4$ in die Geradengleichung h ein, so ergibt sich: $\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix}0\\-10\\0\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}24\\20{,}5\\22{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}96\\72\\90\end{pmatrix}$.	20		
b)	• $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-5\\7\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2{,}8\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}5\\-7\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-2{,}8\\-2\\3\end{pmatrix}$, also $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{CD}\rvert = \sqrt{74} \approx 8{,}6$ und $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \lvert\overrightarrow{AD}\rvert = \sqrt{20{,}84} \approx 4{,}6$. Mit der Überprüfung der gegenüberliegenden Seiten auf gleiche Länge und der offensichtlich gegebenen Parallelität kann man also festhalten, dass ein Parallelogramm vorliegt, so dass nur noch ein rechter Winkel nachgewiesen werden muss. Es gilt weiterhin $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 14 - 14 = 0$, also $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$. Demnach ist *ABCD* ein Rechteck. Für den Mittelpunkt gilt: $\overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, was zu zeigen war. • Ein Spiegel hat den Flächeninhalt $A = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{74} \cdot \sqrt{20{,}84}\ \text{m}^2 \approx 39{,}27\ \text{m}^2$. Der Inhalt der Gesamtfläche aller Spiegel beträgt demnach $A_{ges} = 1818 \cdot \sqrt{74} \cdot \sqrt{20{,}84}\ \text{m}^2 \approx 71\,393{,}5\ \text{m}^2$. *Die Fläche kann auch mit dem gerundeten Flächeninhalt errechnet werden:* $A_{ges} = 1818 \cdot 39{,}27\text{m}^2 \approx 71\,392{,}9\ \text{m}^2$.	5	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	Ebenengleichung in Parameterform: Da die Ebene ebenfalls den Koordinatenursprung enthält, ist eine mögliche Parametergleichung: $E: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 3{,}9 \\ -2{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1{,}1 \\ 4{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$. Bestimmung einer Koordinatengleichung: 1. Alternative: (Bestimmung mithilfe des Skalarproduktes) Bestimmung eines Normalenverktors $\vec{n}$: $\begin{pmatrix} 3{,}9 \\ -2{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 0 \wedge \begin{pmatrix} -1{,}1 \\ 4{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\begin{array}{llllll} \text{I} & 3{,}9a & -2{,}5b & -1{,}5c & = & 0 \\ \text{II} & -1{,}1a & +4{,}5b & -1{,}5c & = & 0 \end{array} \Bigg\vert (\text{I} - \text{II})$ $\text{II}' \quad 5a \quad +7b \quad = \quad 0$ Eine Lösung ist: $b = z;\ a = \frac{7}{5}z;\ c = \frac{148}{75}z$ Für $z = 75$ erhält man den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 105 \\ 75 \\ 148 \end{pmatrix}$ und die Koordinatengleichung $E: 105x_1 + 75x_2 + 148x_3 = 0$. 2. Alternative: (Bestimmung mithilfe eines linearen Gleichungssystems) I $\quad x_1 = 3{,}9r - 1{,}1s$ II $\quad x_2 = -2{,}5r + 4{,}5s$ III $\quad x_3 = -1{,}5r - 1{,}5s$ Daraus folgt: II‘ $\ 2{,}5x_1 + 3{,}9x_2 = 14{,}8s \quad (2{,}5 \cdot \text{I} + 3{,}9 \cdot \text{II})$ und III‘ $\ 1{,}5x_1 + 3{,}9x_3 = -7{,}5s \quad (1{,}5 \cdot \text{I} + 3{,}9 \cdot \text{III})$. $7{,}5 \cdot \text{II}' + 14{,}8 \cdot \text{III}'$ liefert: $E: 40{,}95x_1 + 29{,}25x_2 + 57{,}72x_3 = 0$. Multipliziert man mit $\frac{105}{40{,}95} \left(= \frac{100}{39} \right)$, erhält man die Koordinatengleichung $E: 105x_1 + 75x_2 + 148x_3 = 0$.	5	15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>

• Man setze die Geradengleichung h in E ein. Es ergibt sich:

$$105\cdot 24t+75\cdot(-10+20{,}5t)+148\cdot 22{,}5t=0$$

$$\Leftrightarrow 2520t+1537{,}5t+3330t=750 \Leftrightarrow t=\frac{20}{197}$$

Als Ortsvektor des Schnittpunktes S von h und E erhält man nun:

$$\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}0\\-10\\0\end{pmatrix}+\frac{20}{197}\cdot\begin{pmatrix}24\\20{,}5\\22{,}5\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2{,}4\\-7{,}9\\2{,}3\end{pmatrix}.$$

• Anhand der zweiten oder dritten Koordinate des Punktes $S(2{,}4\,|\,-7{,}9\,|\,2{,}3)$ lässt sich begründen, dass S außerhalb des Rechtecks $ABCD$ liegt ($-7{,}9\notin[-4{,}5;4{,}5]$ bzw. $2{,}3\notin[-1{,}5;1{,}5]$) und somit der reflektierte Strahl ungehindert an Spiegel 3 vorbeilaufen kann.

</td><td></td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Aufgrund des Reflexionsgesetzes entspricht die Größe des gesuchten Einfallswinkels der Hälfte des Winkels γ zwischen einfallendem und reflektiertem Strahl.

Der einfallende Strahl liegt auf der Geraden: $e:\vec{x}=t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-3\\-6\end{pmatrix}$.

Der reflektierte Strahl liegt auf der Geraden: $r:\vec{x}=t\cdot\begin{pmatrix}96\\72\\90\end{pmatrix}$.

Um den richtigen Winkel γ zu bestimmen, müssen die Richtungsvektoren vom Scheitel ausgehend, hier also vom Ursprung, betrachtet werden. Vom einfallenden Strahl ist damit der Richtungsvektor mit umgekehrter Richtung zu nehmen, der zur Sonne zeigt. Der Winkel lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$\cos\gamma=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ jeweils die vorher beschriebenen Richtungsvektoren sind.

Es folgt: $\cos\gamma=\dfrac{\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}96\\72\\90\end{pmatrix}}{7\cdot 150}=\dfrac{948}{1050}=\dfrac{158}{175}$.

Damit ergibt sich $\gamma\approx 25{,}46°$.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Für den gesuchten Einfallswinkel ergibt sich also $\alpha = \frac{\gamma}{2} \approx 12,7°$.		5	15
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA/AG 2

II.2 Landschaf

Eine Landschafrasse, die sich durch eine besondere Fellfärbung auszeichnet, gehört zu den bedrohten Nutztierrassen in Deutschland. Zu Anfang des 20. Jahrhunderts machte dieses Landschaf in seinen Verbreitungsgebieten ca. 50 % des Schafbestandes aus. Durch die Entwicklung der 20er und 30er Jahre, nur noch wenige Rassen mit hoher Fleischleistung zu züchten, wurden diese Landschafe systematisch dezimiert. Um diese Schafrasse zu erhalten, entstanden in den letzten Jahren wieder vereinzelt Zuchten dieses Schafes. Die beiden Schafzuchtbetriebe Krause und Meier wurden auf diese Landschafrasse aufmerksam.

In dieser Aufgabe werden nur die weiblichen Schafe betrachtet. Die **Zuchtbetriebe Krause** und **Meier** bieten den Schafen unterschiedliche Zuchtbedingungen, wie beispielsweise Deckalter und Deckrate der Schafe sowie verschiedene Lebensumstände.

Die Schafrasse wird zur Vereinfachung in drei Altersklassen eingeteilt: Jungtiere (J), Erwachsene Tiere (E) und Alttiere (A).

Die Entwicklung der Schafe in den beiden Zuchtbetrieben von Jahr zu Jahr lässt sich in einem vereinfachten Modell beschreiben. Die Zuchtbetriebe gehen hierbei von den folgenden Populationsmatrizen aus:

Zuchtbetrieb Krause **Zuchtbetrieb Meier**

$$K = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

a) Vervollständigen Sie für die beiden Zuchtbetriebe die Entwicklung der Population in den Übergangsgraphen (siehe Anlage 1). (10P)

b) Vergleichen Sie die Zuchtbetriebe Krause und Meier anhand der beiden Populationsmatrizen K und M. (10P)

In den folgenden Aufgabenteilen soll zunächst die Entwicklung der Schafpopulation im **Zuchtbetrieb Krause** untersucht werden. Der Zuchtbetrieb beginnt seine Schafzucht mit 10 Jungtieren (J), 10 erwachsenen Tieren (E) und 10 Alttieren (A) .

c) Berechnen Sie für den Zuchtbetrieb Krause mithilfe der Populationsmatrix K die Anzahl der Schafe jeder Altersklasse nach dem ersten und nach dem zweiten Jahr unter den gleichen Zuchtbedingungen. (10P)

d) Zeigen Sie – unabhängig von den bisherigen Zahlen – mithilfe der Matrix K, dass es eine bestimmte Schafpopulation gibt, die sich in genau gleicher Zusammensetzung jährlich reproduziert und aus einem Gesamtbestand von 76 Schafen besteht. (20P)

Der **Zuchtbetrieb Krause** interessiert sich auch für die langfristige Entwicklung seiner Schafpopulation. Diese soll im nächsten Aufgabenteil untersucht werden.

e) Es gilt: $K^{10} \approx \begin{pmatrix} 0,421 & 0,421 & 0,421 \\ 0,421 & 0,421 & 0,421 \\ 0,158 & 0,158 & 0,158 \end{pmatrix}$.

- Zeigen Sie, dass auch nach zehn Jahren der Gesamtbestand etwa 30 Schafe umfasst.
- Ermitteln Sie die gerundete Matrixpotenz K^{11}.
- Vergleichen Sie die Matrizen K^{10} und K^{11} und beurteilen Sie den festgestellten Sachverhalt im Hinblick auf die langfristige Entwicklung der Population. (25P)

Im Folgenden soll nun die langfristige Entwicklung der Schafpopulation im **Zuchtbetrieb Meier** betrachtet werden. Auch dieser Zuchtbetrieb beginnt seine Schafzucht mit 10 Jungtieren (J), 10 erwachsenen Tieren (E) und 10 Alttieren (A).

Zuchtjahre	0	10
Gesamtzahl der Schafe	30	Prognose 170

f)
- Bestimmen Sie mithilfe der Wertepaare für den Zuchtbetrieb Meier eine Exponentialfunktion vom Typ $S(t) = a \cdot b^t$, die die Entwicklung der Schafe näherungsweise beschreibt. Dabei soll $S(t)$ die Gesamtzahl der Schafe in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren darstellen.
  Hinweis: Runden Sie den Wert für b auf zwei Nachkommastellen.
- Bestätigen Sie mithilfe der Gleichung der Exponentialfunktion S, dass sich nach dieser Prognose nach einem Jahr insgesamt 36 Schafe und nach einem weiteren Jahr 42 Schafe im Zuchtbetrieb befinden. (15P)

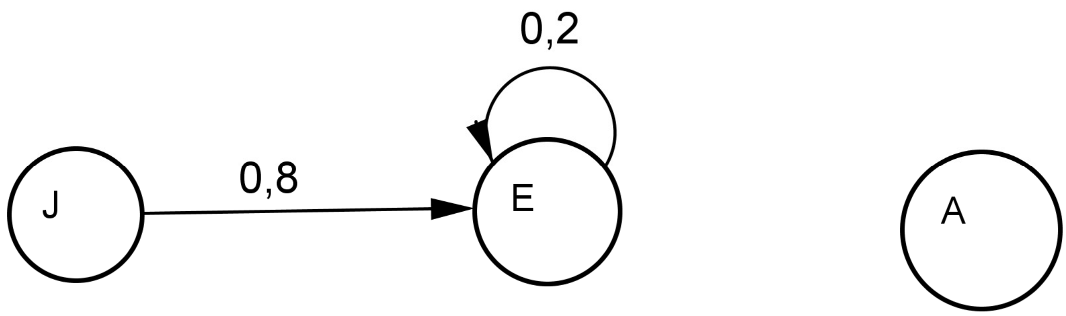
Aufgrund des prognostizierten exponentiellen Wachstums der Schafzucht entschließt sich der Zuchtbetrieb Meier, am Ende eines Zuchtjahres 5 % der erwachsenen Tiere und 10 % der Alttiere zu verkaufen.

g) Entscheiden Sie, welche der folgenden Populationsmatrizen diese Entwicklung berücksichtigt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

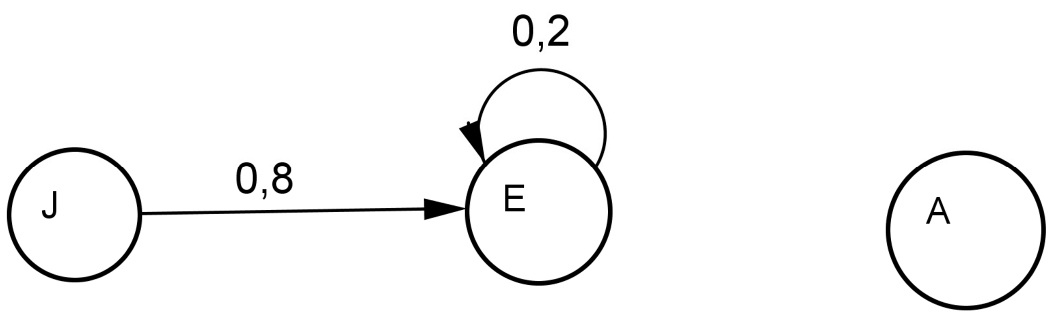
$$M_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 & 0,4 \\ 0,8 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 & 0,4 \\ 0,76 & 0,19 & 0 \\ 0 & 0,36 & 0,36 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,76 & 0,36 \\ 0,8 & 0,19 & 0 \\ 0 & 0,36 & 0,36 \end{pmatrix}$$ (10P)

Anlage zur Aufgabe „Landschaf“

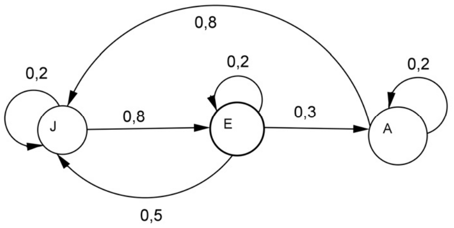
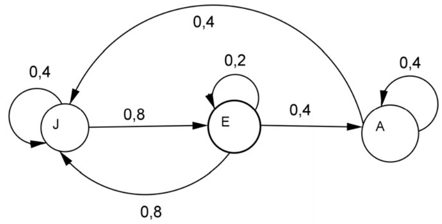
Übergangsgraph: Zuchtbetrieb Krause



Übergangsgraph: Zuchtbetrieb Meier



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	**Übergangsgraphen** Zuchtbetrieb Krause  Zuchtbetrieb Meier 	10		
b)	**Vergleich der Populationsmatrizen** Im Zuchtbetrieb Meier ist der Anteil der Jungtiere und der erwachsenen Tiere, die durchschnittlich ein Junges bekommen, höher, der Anteil der Alttiere niedriger als in Zuchtbetrieb Krause. In beiden Zuchtbetrieben ist die Überlebensrate der Jungtiere gleich. Auch ist der Anteil der erwachsenen Tiere, die in ihrer Altersgruppe verbleiben, gleich hoch. Im Zuchtbetrieb Meier ist die Überlebensrate der erwachsenen Tiere höher. Ebenso verbleibt ein höherer Anteil an Alttieren in ihrer Altersklasse. In keinem Zuchtbetrieb überspringt ein Schaf eine Altersklasse. *Andere gleichwertige Aussagen sind möglich.*		10	
c)	**Berechnung der Populationsentwicklung** $K = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{p_1} = K \cdot \overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{p_2} = K \cdot \overrightarrow{p_1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix}$	10		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

d) **Untersuchung auf stabile Population**

$K \cdot \overrightarrow{p_x} = \overrightarrow{p_x}$

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,8 \\ 0,8 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

LGS

I $\quad 0,2x_1 + 0,5x_2 + 0,8x_3 = x_1$

II $\quad 0,8x_1 + 0,2x_2 = x_2$

III $\quad 0,3x_2 + 0,2x_3 = x_3$

Alternative I:

I' $\quad 0,5x_2 + 0,8x_3 = 0,8x_1 \Leftrightarrow 0,625x_2 + x_3 = x_1$

II' $\quad 0,8x_1 = 0,8x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

III' $\quad 0,3x_2 = 0,8x_3 \Leftrightarrow 0,375x_2 = x_3$

x_3 aus III' in I' eingesetzt ergibt ebenfalls $x_1 = x_2$. Es gilt also:

$x_1 + x_2 + x_3 = 76 \Leftrightarrow x_2 + x_2 + 0,375x_2 = 76$

$2,375x_2 = 76 \Leftrightarrow x_2 = 32$

$x_1 = x_2 = 32$

$x_3 = 0,375x_2 \Leftrightarrow x_3 = 12$

Der gesuchte Populationsvektor lautet $\vec{p}_x = \begin{pmatrix} 32 \\ 32 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Alternative II:

Das LGS hat unendlich viele Lösungen. Mit dem Parameter $t \in \mathbb{N}$ für die Anzahl der Alttiere ergeben sich zunächst unendlich viele Populationsvektoren

$$\overrightarrow{p_x}^* = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}t \\ \frac{8}{3}t \\ t \end{pmatrix}.$$

Die einschränkende Bedingung von zusammen 76 Schafen führt schließlich auf nur einen möglichen Populationsvektor $\overrightarrow{p_x}$:

$\frac{8}{3}t + \frac{8}{3}t + t = 76 \Leftrightarrow t = 12$

Setzt man $t = 12$ in $\overrightarrow{p_x}^*$ ein, so folgt $\overrightarrow{p_x} = \begin{pmatrix} 32 \\ 32 \\ 12 \end{pmatrix}$.

		I	II	III
			15	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

e)

- **Berechnung Gesamtbestand an Schafen**

$$\overrightarrow{p_{10}} = K^{10} \cdot \overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 0,421 & 0,421 & 0,421 \\ 0,421 & 0,421 & 0,421 \\ 0,158 & 0,158 & 0,158 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,63 \\ 12,63 \\ 4,74 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Gesamtbestand an Schafen beträgt demnach 31 Tiere.

- **Berechnung von K^{11}**

$$K^{11} = K^{10} \cdot K$$
$$= \begin{pmatrix} 0,421 & 0,421 & 0,421 \\ 0,421 & 0,421 & 0,421 \\ 0,158 & 0,158 & 0,158 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0,421 & 0,421 & 0,421 \\ 0,421 & 0,421 & 0,421 \\ 0,158 & 0,158 & 0,158 \end{pmatrix}$$

- **Beschreibung und Beurteilung der Potenzen**

Die Elemente der gerundeten Matrixpotenz K^{11} stimmen mit den Elementen der Potenz K^{10} überein. Nach den Gesetzmäßigkeiten zur Matrizenmultiplikation müssen alle weiteren höheren Potenzen mit der gerundeten Matrixpotenz K^{10} übereinstimmen.

Langfristig streben in diesem Modell die Anzahlen der Jungtiere, erwachsenen Tiere und Alttiere bzw. der Gesamtbestand an Schafen gegen feste Werte, d. h. die Anzahl der Schafe ändert sich nicht mehr.

Da die Zeilen der Populationsmatrix jeweils gleiche Elemente erhalten, ergeben sich jeweils immer dieselben Anzahlen an Schafen.

Anzahl Jungtiere	$12,63 \approx 13$
Anzahl erwachsene Tiere	$12,63 \approx 13$
Anzahl Alttiere	$4,74 \approx 5$
Gesamtzahl	≈ 31

$$\overrightarrow{p_{11}} \approx \overrightarrow{p_{12}} \approx \overrightarrow{p_{13}} \approx \ldots \approx \overrightarrow{p_{20}} \approx \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Gesamtzahl der Schafe bleibt konstant 31.

I	II	III
	15	10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)	• **Gleichung der Exponentialfunktion:** $S(t) = a \cdot b^t$ Zwei Wertepaare einsetzen: (0/30) $30 = a \cdot b^0 \Leftrightarrow a = 30$ (10/170) $170 = 30 \cdot b^{10} \Leftrightarrow b \approx 1{,}1894 \approx 1{,}19$ Die Gleichung lautet damit: $S(t) = 30 \cdot 1{,}19^t$ • **Bestätigung der Bestände:** Nach einem Jahr: $S(1) = 30 \cdot 1{,}19^1 = 35{,}7 \approx 36$ Nach zwei Jahren: $S(2) = 30 \cdot 1{,}19^2 = 42{,}483 \approx 42$	5	10	
g)	Die Matrix M_1 kommt nicht in Frage, weil der Anteil der erwachsenen Tiere, die nach einem Jahr im Stadium der erwachsenen Tiere verbleiben, lediglich um 5 % Punkte reduziert wurde. Auch bei den Alttieren wird der „Verbleibeanteil“ nur um 10 % Punkte reduziert. Bei M_3 wird die Reduzierung der erwachsenen Tiere, die aus Jungtieren hervorgegangen sind, nicht berücksichtigt. (*Ein weiterer Fehler ist der Abzug von Neugeborenen bei den erwachsenen Tieren (-5 %) und den Alttieren (-10 %).*) Die Matrix M_2 ist die korrekte Matrix, weil die Übergangsraten (0,8 und 0,2) in die Altersklasse der erwachsenen Tiere um 5 % und die in die Altersklasse der alten Tiere um 10 % reduziert sind.			10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

STOCHASTIK 1

III.1 Telefonieren am Steuer

Einem zu Beginn des Jahres 2010 in der *New York Times* erschienenen Bericht zufolge schätzt die Bundesregierung der Vereinigten Staaten von Amerika, dass zu jedem beliebigen Zeitpunkt etwa 10 % aller Autofahrer in den USA mit ihrem Handy telefonieren.

Die Schätzung der Regierung wird bei den folgenden Aufgaben als zutreffend vorausgesetzt.

a) Man betrachtet eine Stichprobe von 25 Fahrern; diese werden durchnummeriert.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

E_1: Kein Fahrer telefoniert

E_2: Mindestens ein Fahrer telefoniert.

E_3: Genau zwei Fahrer telefonieren.

E_4: Von den ersten 10 telefoniert genau ein Fahrer, von den folgenden 10 telefoniert auch genau ein Fahrer.

E_5: Mehr als vier Fahrer telefonieren.

E_6: Höchstens fünf Fahrer telefonieren. (30P)

Bei einer Untersuchung zu Beginn des Jahres 2010 kam die *AAA* (=*American Automobile Association*) zu dem Ergebnis, dass sich von 2500 befragten Personen 48 % wegen des unsicheren Fahrverhaltens eines Freundes oder Familienmitgliedes sorgen und dass für 19 % von den Personen, die sich sorgen, der Grund ihrer Sorge das Telefonieren am Steuer sei.

b)
- Bestimmen Sie, wie viele der befragten Personen sich sorgen, dass ein Freund oder Familienmitglied wegen Telefonierens am Steuer unsicheres Fahrverhalten zeigt.
- Entscheiden Sie, inwiefern dieses Resultat zur Beurteilung der Schätzung der Regierung herangezogen werden kann. (10P)

Amerikanische Studien zeigen, dass telefonierende Fahrer in ihrem Wagen ein viermal so hohes Unfallrisiko eingehen wie nicht telefonierende Fahrer. Unabhängig davon reduziert die Anwesenheit von erwachsenen Mitfahrern das Unfallrisiko wiederum um 45 %.

c) Bestimmen Sie, um wie viel Prozent bei einem telefonierenden Fahrer, der mit erwachsenen Mitfahrern unterwegs ist, das Unfallrisiko höher ist als bei einem nicht telefonierenden Fahrer ohne Begleitung. (10P)

In einer Radiosendung zu dem Problem erzählt ein Hörer, er habe den Artikel der *New York Times* zum Anlass genommen, einmal selbst Kontrolleur zu spielen, und habe 50 Fahrer genau beobachtet. Der Hörer hat dabei festgestellt, dass gerade mal zwei Fahrer telefoniert haben. Sein Fazit formuliert er wie folgt: „Die Schätzung der Regierung halte ich für maßlos übertrieben. Sie kann nicht stimmen.“

d) Beschreiben Sie, auf welches Argument sich die Aussage des Hörers vermutlich stützt, und beurteilen Sie, ob es Argumente gibt, die die Aussage des Hörers widerlegen, nach denen also die Beobachtung des Hörers dennoch in einen Toleranzbereich zur Schätzung der Regierung fällt. (15P)

e) Bestimmen Sie die Anzahl der Fahrer, die man mindestens überprüfen müsste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % auf mindestens einen telefonierenden Fahrer zu treffen. (15P)

Die Bundesregierung der Vereinigten Staaten von Amerika plant, eine Werbeagentur mit der Entwicklung und Durchführung einer Kampagne zur Bewusstseinsänderung zu beauftragen. Die Kampagne soll aus Werbespots in Fernsehen und Rundfunk, Anzeigen in Zeitschriften, Plakaten sowie Unterrichtsveranstaltungen in den Schulen bestehen. In den Verhandlungen über das Honorar verspricht die Firma, den prozentualen Anteil telefonierender Fahrer von 10 % auf 5 % zu senken. Das Honorar setzt sich aus einem festen Grundbetrag und einer Prämie zusammen, die nur dann gezahlt wird, wenn nach einem Jahr nur noch 5 % der Fahrer telefonieren.
Es muss noch geklärt werden, wie eine Entscheidung darüber erzielt werden kann, ob der Erfolgsfall eingetreten ist. Man einigt sich, an einer noch festzulegenden Stelle zu einem bestimmten Zeitpunkt 50 Fahrer zu testen.

f) Eine vorläufige Entscheidungsvariante sieht vor, die Prämie nur dann auszuzahlen, wenn höchstens 3 Fahrer telefonieren.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Werbeagentur die Prämie <u>nicht</u> erhält, obwohl sie den Anteil telefonierender Fahrer auf 5 % gedrückt hat.
- Zeigen Sie, wie man die Entscheidungsvariante bei gleich bleibendem Stichprobenumfang so wählen kann, dass die entsprechende Irrtumswahrscheinlichkeit, dass die Prämie zu Unrecht <u>nicht</u> gezahlt wird, höchstens 15 % beträgt. (20P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Fahrer telefoniert, beträgt $p = 0{,}1$. • $P(E_1) = 0{,}9^{25} = 0{,}0718$, • $P(E_2) = 1 - P(E_1) = 0{,}9282$, • $P(E_3) = \binom{25}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{23} = 0{,}2659$, • $P(E_4) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^9 \cdot \binom{10}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^9 = 0{,}9^{18} = 0{,}1501$, • $P(E_5) = 1 - P(X \le 4) = 1 - 0{,}9020 = 0{,}0980$, • $P(E_6) = P(X \le 5) = 0{,}9666$.	30		
b)	• $48\% \cdot 19\% = 0{,}48 \cdot 0{,}19 = 0{,}0912 = 9{,}12\%$ der befragten Personen sorgen sich, dass ein Freund oder Familienmitglied wegen Telefonierens am Steuer unsicheres Fahrverhalten zeigt. Dies sind 228 Personen. • Die 9,12 % haben nichts mit den von der amerikanischen Bundesregierung geschätzten 10 % zu tun. Die Ähnlichkeit der Ergebnisse ist rein zufällig. Die amerikanische Bundesregierung macht eine Aussage über Fahrer, die am Steuer telefonieren. Bei dem hier vorliegenden Ergebnis handelt es sich um den Teil der von der AAA befragten Personen, die sich wegen des Fahrverhaltens anderer Sorgen macht. Dies sind zwei völlig verschiedene Dinge.		10	
c)	Bei Anwesenheit eines Mitfahrers multipliziert sich das bestehende Unfallrisiko mit 0,55. Aus $4 \cdot 0{,}55 = 2{,}2$ folgt, dass sich bei einem telefonierenden Fahrer mit Mitfahrern das Unfallrisiko auf das 2,2-fache erhöht, es also um 120 % höher ist als bei einem nicht telefonierenden Fahrer ohne Begleitung. *Andere Lösungen sind denkbar.*		10	
d)	Falls die Schätzung der Regierung stimmt, gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass ein selbsternannter Kontrolleur unter 50 Fahrern genau 2 telefonierende antrifft, $P = \binom{50}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{48} = 0{,}0779$. Sinnvoller ist es, die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass der Kontrolleur unter 50 Fahrern höchstens 2 telefonierende antrifft. Sie beträgt nach der Tabelle für kumulierte Binomialverteilungen 0,1117, also 11,17 %.			

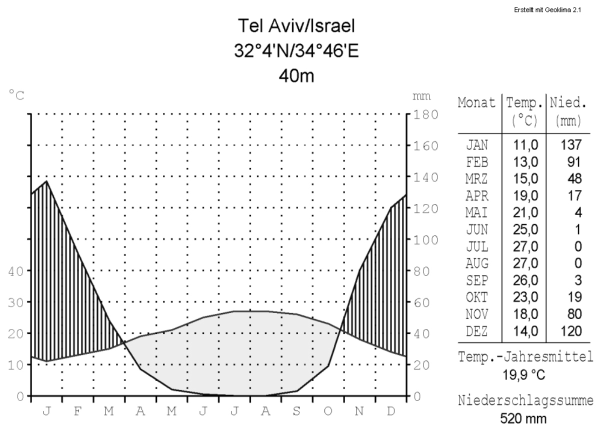
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Das Ergebnis des Kontrolleurs ist also nicht so unwahrscheinlich, dass sich seine Folgerung rechtfertigen ließe. Außerdem ist die Interpretation des Ergebnisses schon deshalb fragwürdig, weil dieser Beurteilung nur ein Test mit sehr geringem Umfang (n=50) zugrunde liegt.		10	5
e)	Soll unter n Fahrern mindestens einer sein, der telefoniert, so bedeutet dies, dass das Gegenereignis (d.h. alle n Fahrer telefonieren nicht) auszuschließen ist. Es muss also gelten: $1-0{,}9^n \geq 0{,}95$ $1-0{,}95 \geq 0{,}9^n$ $0{,}05 \geq 0{,}9^n$ $n \cdot lg\,0{,}9 \leq lg\,0{,}05$ $n \geq \frac{lg\,0{,}05}{lg\,0{,}9} = 28{,}4.$ Es sind also mindestens 29 Personen zu überprüfen.		15	
f)	• $P(Z>3)=1-P(Z\leq 3)=1-0{,}7604$ (Tabelle) $=0{,}2396=23{,}96\,\%$. Damit erhält die Firma mit einer Wahrscheinlichkeit von 23,96 % die Prämie zu Unrecht nicht. • Für die Neuformulierung der Entscheidungsvariante muss gelten: $P(Z>n)=1-P(Z\leq n)\leq 15\%=0{,}15.$ Somit muss gelten: $P(Z\leq n)\geq 0{,}85.$ Der Tabelle entnehmen wir, dass für $n=4$ der Wert von 0,85 zum ersten Mal überschritten wird (0,8964). Bei der Neuformulierung der Entscheidungsvariante muss also lediglich „3 Fahrer“ durch „4 Fahrer“ ersetzt werden. Wir erhalten dann das folgende Ergebnis: Soll die Firma die Prämie erhalten, wenn sich höchstens 4 telefonierende Fahrer ergeben, so beträgt die Irrtumswahrscheinlichkeit, dass die Prämie trotz der Erfüllung der Zusage nicht ausgezahlt wird, $P(Z>4)=1-P(Z\leq 4)=1-0{,}8964=0{,}1036=10{,}36\,\%$.		5	15
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

STOCHASTIK 2

III.2 Wettervorschau

In einigen Gebieten der Erde ist das Wetter stark von großräumigen Wetterlagen und den zugehörigen Winden abhängig. In anderen Gegenden aber erscheint die Wetterabfolge eher zufällig zu sein, da im Wesentlichen lokale und kurzfristige Einflüsse eine Rolle spielen.

Ein Beispiel ist die winterliche Regenperiode in Tel Aviv. Eine Untersuchung über 27 Jahre hat ergeben, dass in der Regenperiode etwa 43 % Tage mit Niederschlag und 57 % Tage ohne Niederschlag waren.



Zunächst soll angenommen werden, dass das Wetter sich völlig zufällig verhält, also das Wetter an jedem Tag unabhängig von den Vortagen ist.

a) Berechnen Sie unter dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit,

- dass an den auf einen bestimmten Tag folgenden nächsten drei Tagen kein Niederschlag fällt.
- dass an den auf einen bestimmten Tag folgenden nächsten sieben Tagen es genau zwei Tage mit Niederschlag gibt.
- dass von den auf einen bestimmten Tag folgenden nächsten vier Tagen höchstens die Hälfte Tage mit Niederschlag sind. (20P)

Die Vorstellung, dass die Wetterabfolge einer Bernoullikette entsprechen soll, ist etwas ungewöhnlich, so dass man an verschiedene Überprüfungsmöglichkeiten denken kann. Eine Möglichkeit ist, für eine Regenperiode (90 Tage) nachzuprüfen, ob die Zahl der Tage ohne Niederschlag im Bereich der zweifachen Standardabweichung um den Erwartungswert herum liegt.

b)
- Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Tage ohne Niederschlag in den 90 Tagen der Regenperiode und den Bereich der zweifachen Standardabweichung.
- Bei der Durchsicht der 27 Jahre wird festgestellt, dass es in sechs Jahren 61 oder mehr Tage ohne Niederschlag und in vier Jahren nur 41 oder weniger Tage ohne Niederschlag gab. Beurteilen Sie, ob dies gegen die Modellierung mit einer Bernoullikette spricht. (25P)

Für die folgenden Aufgabenteile soll eine andere Modellierung zu Grunde gelegt werden. Diese Modellierung geht von der Annahme aus, dass das Wetter an einem beliebigen Tag der Regenperiode ausschließlich von dem Wetter des vorangegangenen Tages abhängt.
Aus den statistischen Daten ergaben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

Auf einen Tag ohne Niederschlag folgt mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % wieder ein Tag ohne Niederschlag, auf einen Tag mit Niederschlag folgt mit einer Wahrscheinlichkeit von 67 % ein weiterer Tag mit Niederschlag.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf einen bestimmten Tag drei Tage ohne Niederschlag folgen werden, wenn

- der bestimmte Tag ein Tag ohne Niederschlag ist,
- der bestimmte Tag ein Tag mit Niederschlag ist. (20P)

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Tage nach einem Tag ohne Niederschlag wieder ein Tag ohne Niederschlag folgt. (15P)

e) Jemand kommt an einem Tag ohne Niederschlag während der Regenperiode in Tel Aviv an. Die Person weiß nicht, wie das Wetter am Vortag war, kennt aber die Statistiken über die Wetterverhältnisse in Tel Aviv. Sie möchte die Wahrscheinlichkeit dafür wissen, dass es auch ein Tag ohne Niederschlag war.

Bestimmen Sie diese Wahrscheinlichkeit. (20P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Es handelt sich nach den Angaben um eine Aufgabe zur Binomialverteilung. • *P*(In den nächsten 3 Tagen fällt kein Niederschlag) = $0{,}57^3 = 0{,}185193$, • *P*(Genau 2 der nächsten 7 Tage sind Tage mit Niederschlag) = $\binom{7}{2} \cdot 0{,}43^2 \cdot 0{,}57^5 \approx 0{,}2336$, • *P*(Von den nächsten 4 Tagen sind höchstens die Hälfte Tage mit Niederschlag) = $\binom{4}{2} \cdot 0{,}43^2 \cdot 0{,}57^2 + \binom{4}{1} \cdot 0{,}43^1 \cdot 0{,}57^3 + 0{,}57^4 \approx 0{,}7845$.	20		
b)	• Der Erwartungswert für die Anzahl der Tage ohne Niederschlag beträgt $90 \cdot 0{,}57 = 51{,}3$. Die zugehörige Varianz ist $90 \cdot 0{,}57 \cdot 0{,}43 = 22{,}059$, also ist die Standardabweichung gerundet 4,7. Der Bereich der zweifachen Standardabweichung ist [41,9;60,7]. • Wenn in 10 von 27 Jahren die Anzahl außerhalb des Bereichs der zweifachen Standardabweichung liegt, so ist dies sicherlich sehr überraschend. Also kann dieses als Indiz gegen die Modellierung angesehen werden. **Alternative:** Mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$ [vgl. Tafelwerk S. 43] liegt die Anzahl der Regentage eines Jahres im 2σ – Intervall. Dass die Anzahl der Regentage an 10 von 27 Jahren außerhalb dieses Intervalls liegt, berechnet sich: $\binom{27}{10} \cdot 0{,}954^{17} \cdot 0{,}046^{10} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-7} \approx 0{,}00000017$. Diese Wahrscheinlichkeit ist sehr klein und kann damit als ein Indiz gegen die Modellierung angesehen werden.	10	5	10
c)	*Hier geht es um bedingte Wahrscheinlichkeiten.* • *P*(Die nächsten 3 Tage sind ohne Niederschlag | Der bestimmte Tag ist ein Tag ohne Niederschlag) = $0{,}75^3 = 0{,}421875$. • *P*(Die nächsten 3 Tage sind ohne Niederschlag | Der bestimmte Tag ist ein Tag mit Niederschlag) = $0{,}33 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}185625$		20	
d)	Hier muss bedacht werden, dass der folgende Tag sowohl ein Tag ohne Niederschlag als auch ein Tag mit Niederschlag sein kann. *P*(Zwei Tage später ist ein Tag ohne Niederschlag | Der jetzige Tag ist ein Tag ohne Niederschlag) = $0{,}75^2 + 0{,}25 \cdot 0{,}33 = 0{,}645$		15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>Aus der Einleitung vor Aufgabenteil c) kanngeschlossen werden, dass es für diesen Fall nur die Übergänge von einem Tag mit Niederschlag auf einen Tag ohne Niederschlag mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,33 und von einem Tag ohne Niederschlag auf einen Tag ohne Niederschlag mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,75 gibt. Somit liegt die gesuchte Wahrscheinlichkeit bei:

P(Der vorangegangene Tag war ein Tag ohne Niederschlag | Der jetzige Tag ist ein Tag ohne Niederschlag) = $\dfrac{0,75}{0,75+0,33} \approx 0,6944$.

<u>Alternative:</u>
Wegen des Hinweises auf die Statistiken sollte auch eine Lösung mit dem Satz von Bayes als richtig anerkannt werden:

P(Der vorangegangene Tag war ein Tag ohne Niederschlag | Der jetzige Tag ist ein Tag ohne Niederschlag) = $\dfrac{0,57 \cdot 0,75}{0,57 \cdot 0,75 + 0,43 \cdot 0,33} \approx 0,7508$.

Statt über eine Formel können die Schüler auch mit einem Baumdiagramm arbeiten.</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>