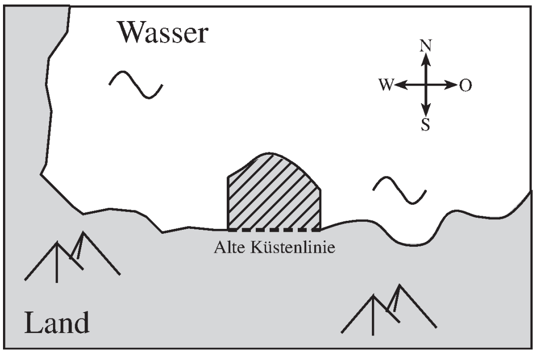
Analysis 1

I.1 Halbinsel



Eine in einen See ragende künstlich angelegte Halbinsel soll neu gestaltet werden. Die Halbinsel ist in Ost-West-Richtung 30 m breit, auf der westlichen

Seite ragt die Halbinsel in Nordrichtung 15 m (Punkt C), auf der östlichen Seite 10 m (Punkt D) in den See (siehe Abbildung in der Anlage).

Ein neuer Praktikant erstellt für den Verlauf der nördlichen Strandlinie die Funktionsgleichung

$$g(x) = -\frac{7}{90}x^2 + \frac{13}{6}x + 15 \text{ für } 0 \le x \le 30 \ .$$

Der Projektleiter zweifelt dieses Ergebnis an und fordert seinen Praktikanten auf, exemplarisch für drei Punkte mit x-Werten aus dem Intervall [5; 25] zu überprüfen, ob der Funktionsgraph von g mit der Strandlinie übereinstimmt. Eine Abweichung der Funktionswerte von den gemessenen Werten (siehe Abbildung in der Anlage) von maximal 1 m soll akzeptiert werden.

a) • Bestätigen Sie durch Rechnung, dass der Zweifel des Projektleiters berechtigt ist.

• Begründen Sie, warum die nördliche Strandlinie nicht auf dem Graphen einer quadratischen Funktion (Parabel) liegen kann (siehe Abbildung in der Anlage). (20P)

Die Planungsabteilung geht davon aus, dass die Strandlinie durch eine Funktion f dritten Grades modelliert werden kann. Zur Erstellung der Funktionsgleichung werden an den beiden Punkten $C(0|15)$ und $D(30|10)$ noch Winkelpeilungen vorgenommen: Am Punkt C hat die Strandlinie einen Winkel von 45° zur Ost-West-Achse, am Punkt D einen Winkel von 116,57° (siehe Abbildung in der Anlage).

b) • Bestätigen Sie mithilfe des gegebenen Winkels, dass die Steigung der Strandlinie im Punkt D den Wert –2 aufweist.

• Zeigen Sie, dass die Koordinaten von D und die Steigung der Strandlinie in diesem Punkt zur Funktion f mit der folgenden Gleichung passen:

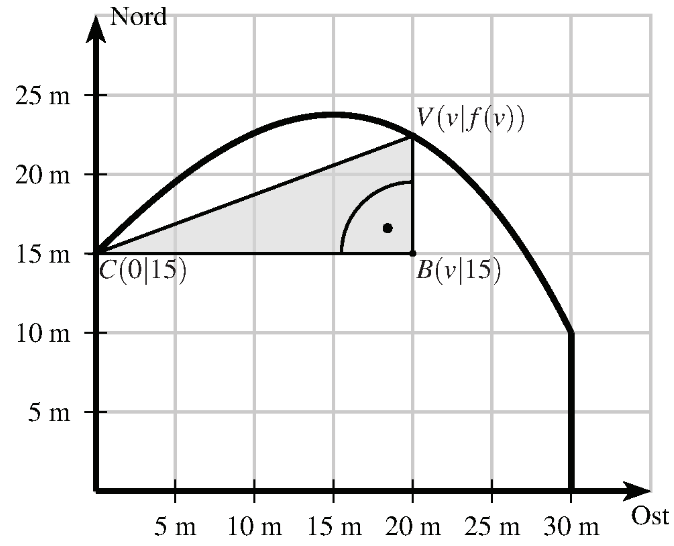
$$f(x) = -\frac{1}{1350}x^3 - \frac{1}{60}x^2 + x + 15 \text{ für } 0 \le x \le 30$$ (15P)

Im Folgenden wird die in Aufgabenteil b) genannte Funktion f genutzt.

c) Berechnen Sie, wie weit die Halbinsel in Nordrichtung in den See ragt. (20P)

Ein Plan sieht vor, dass auf dem Gebiet der Halbinsel eine Fläche in Form eines rechtwinkligen Dreiecks abgeteilt und bepflanzt werden soll, die im Punkt V auf die Strandlinie trifft. Die abgeteilte Dreiecksfläche soll maximal werden.

d) Bestimmen Sie den maximalen Inhalt der Dreiecksfläche und die Koordinaten des zugehörigen Punktes V. (20P)

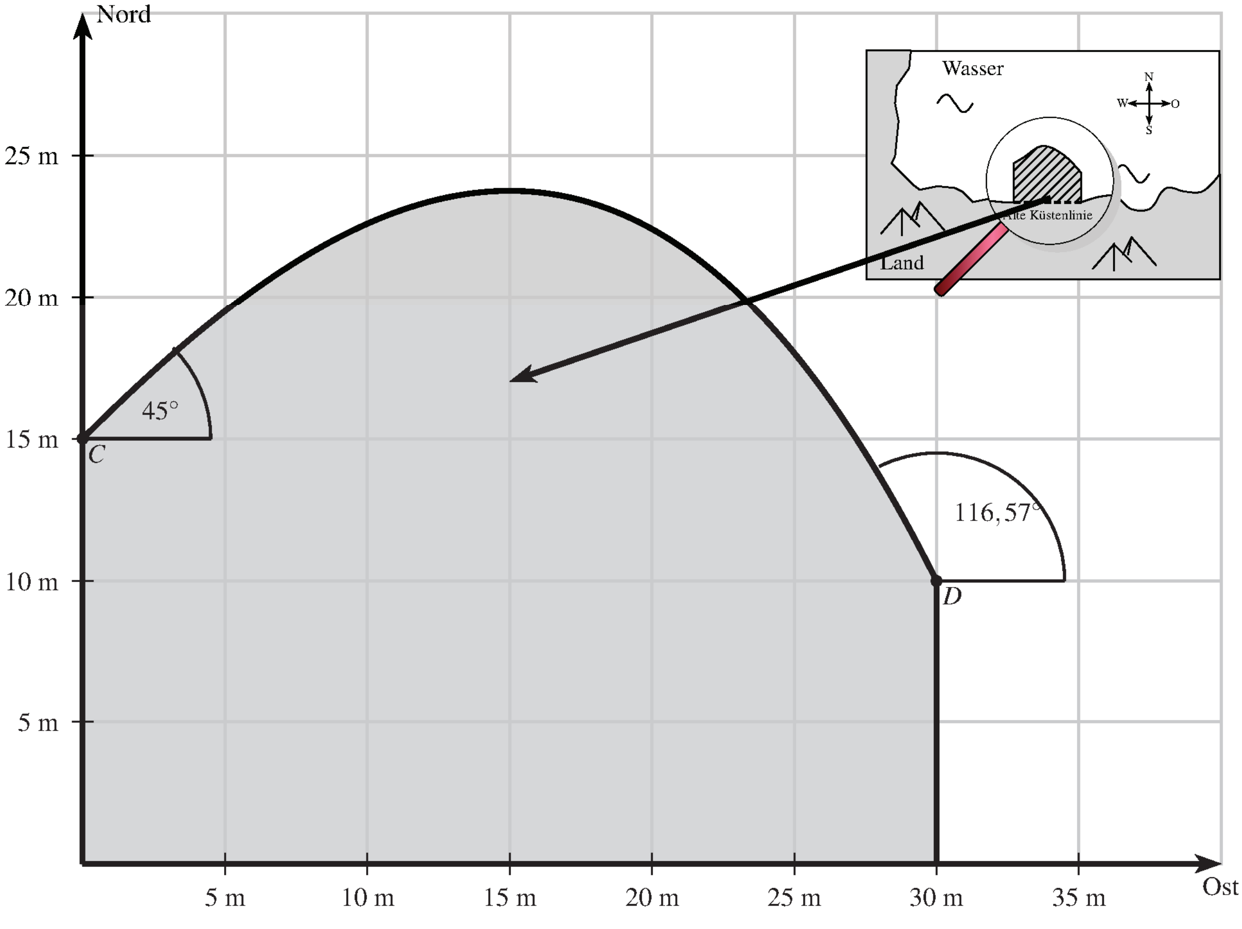


Die von der durch den Graphen der Funktion f gegebenen Strandlinie und der Hypotenuse $\overline{CV}$ des Dreiecks eingeschlossene Fläche soll 40 cm hoch mit Spielsand bedeckt werden.

e) Ermitteln Sie das Volumen des benötigten Sandes. (25P)

Hinweis: Wenn Sie Teilaufgabe d) nicht gelöst haben, rechnen Sie für den Punkt V mit dem unzutreffenden Ersatzwert $V_E\left(19{,}57 \mid f\left(19{,}57\right)\right)$.

Anlage zur Aufgabe „Halbinsel“



Ausschnitt aus der Karte

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• Ablesen von Koordinaten aus der Grafik ergibt näherungsweise z. B. $R(5\|19{,}5)$, $S(15\|24)$ und $T(25\|18)$ Durch Einsetzen der Funktionswerte erhält man hingegen: $g(5) \approx 23{,}9$; $g(10) \approx 28{,}9$; $g(25) \approx 20{,}6$ Abweichungen: $R:\ 23{,}9 - 19{,}5 = 4{,}4$ $S:\ 28{,}9 - 24 = 4{,}9$ $T:\ 20{,}6 - 18 = 2{,}6$. Offensichtlich ist die Abweichung in jedem der drei Fälle größer als 1 m . Die Vermutung des Projektleiters ist also richtig. • Der Graph einer quadratischen Funktion ist stets achsensymmetrisch bezüglich der durch den Scheitelpunkt verlaufenden Parallelen zur y-Achse . Das ist hier offensichtlich nicht gegeben. *Andere Begründungen sind möglich.*	10	10	
b)	• Es gilt $\tan(116{,}57°) \approx -2$. • Es ist $f(30) = -\frac{1}{1350}\cdot 30^3 - \frac{1}{60}\cdot 30^2 + 30 + 15 = 10$ und die Ableitung ist $f'(x) = -\frac{3}{1350}x^2 - \frac{1}{30}x + 1$. Damit ergibt sich $f'(30) = -\frac{3}{1350}\cdot 30^2 - \frac{1}{30}\cdot 30 + 1 = -2$ Die Werte passen also zur Funktion f.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	Berechnung des Hochpunktes: Eine hinreichende Bedingung lautet.: $f'(x)=0 \wedge f''(x)<0$ $f'(x)=-\frac{3}{1350}x^2-\frac{1}{30}x+1$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{15}{2}+\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2+\frac{1350}{3}}=15 \vee x=-\frac{15}{2}-\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2+\frac{1350}{3}}=-30$ $f''(x)=-\frac{6}{1350}x-\frac{1}{30}$ $f''(15)=-\frac{6}{1350}\cdot 15-\frac{1}{30}-0{,}1<0$ $f(15)=-\frac{1}{1350}\cdot 15^3-\frac{1}{60}\cdot 15^2+15+15=23{,}75$ Die zweite Lösung $x=-30$ liegt außerhalb des Definitionsbereichs. Der Graph von f hat einen Hochpunkt bei (15| 23,75); die Halbinsel ragt also in Nordrichtung 23,75 m in den See.	20		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Extremwertberechnung: Hauptbedingung: $A(v)=\frac{1}{2}v\cdot\left(f(v)-15\right)$ Nebenbedingung: $f\left(v\right)=-\frac{1}{1350}v^3-\frac{1}{60}v^2+v+15$ Zielfunktion: $A(v)=\frac{1}{2}v\cdot\left(f(v)-15\right)$ Es ergibt sich somit für die Zielfunktion $A(v)=\frac{1}{2}v\cdot(-\frac{1}{1350}v^3-\frac{1}{60}v^2+v+15-15)=-\frac{1}{2700}v^4-\frac{1}{120}v^3+\frac{1}{2}v^2$ und deren Ableitungen: $A'(v)=-\frac{1}{675}v^3-\frac{1}{40}v^2+v$ und $A''(v)=-\frac{1}{225}v^2-\frac{1}{20}v+1$ Bestimmung der Maximalstelle: $0=-\frac{1}{675}v^3-\frac{1}{40}v^2+v=v\cdot\left(-\frac{1}{675}v^2-\frac{1}{40}v+1\right)$ $\Leftrightarrow v=0\vee-\frac{1}{675}v^2-\frac{1}{40}v+1=0$ $\Leftrightarrow v=0\vee v^2+\frac{135}{8}v-675=0$ $\Leftrightarrow v=0\vee v=-\frac{135}{16}\pm\frac{15\sqrt{849}}{16}$ Damit ergeben sich drei Lösungen: $v_1=0,\ v_2\approx 18{,}879$ und $v_3\approx -35{,}754$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	In dem interessierenden Definitionsbereich kann höchstens $v_2 \approx 18{,}879$ als Lösung infrage kommen, da bei $v_1 = 0$ keine Dreiecksfläche vorhanden ist und $v_3 \approx -35{,}754$ außerhalb des Definitionsbereichs liegt. $A''(v_2) = -\frac{1}{225}v_2^2 - \frac{1}{20}v_2 + 1$ $\approx -\frac{1}{225}\cdot 18{,}879^2 - \frac{1}{20}\cdot 18{,}879 + 1$ $\approx -1{,}5 < 0$ An der Stelle $v_2 \approx 18{,}879$ befindet sich also ein Maximum. Die Flächenberechnung ergibt: $A(v_2) = -\frac{1}{2700}v_2^{\,4} - \frac{1}{120}v_2^{\,3} + \frac{1}{2}v_2^{\,2}$ $\approx -\frac{1}{2700}\cdot 18{,}879^4 - \frac{1}{120}\cdot 18{,}879^3 + \frac{1}{2}\cdot 18{,}879^2$ $\approx 75{,}1$ Die maximale Dreiecksfläche beträgt ungefähr 75,1 m^2. $f\left(v_2\right) = -\frac{1}{1350}v_2^3 - \frac{1}{60}v_2^2 + v_2 + 15$ $\approx -\frac{1}{1350}\cdot 18{,}879^3 - \frac{1}{60}\cdot 18{,}879^2 + 18{,}879 + 15$ $\approx 22{,}954$ Der Punkt *V* hat näherungsweise die Koordinaten $V\left(18{,}88 \middle\vert 22{,}95\right)$.		10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Bestimmung der Fläche zwischen dem Graphen von f und der Hypotenuse im Intervall $0 \le x \le 18{,}88$: Gleichung der Geraden k durch die Punkte C und V mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabenteil d): $k(x) = \frac{22{,}95-15}{18{,}88-0} \cdot x + 15 = \frac{795}{1888} \cdot x + 15$ Dann ergibt sich für das gesuchte Volumen: $V = 0{,}4 \cdot \int_0^{18{,}88} \left(-\frac{1}{1350}x^3 - \frac{1}{60}x^2 + x + 15 - \left(\frac{795}{1888}x + 15 \right) \right) dx$ $= 0{,}4 \cdot \int_0^{18{,}88} \left(-\frac{1}{1350}x^3 - \frac{1}{60}x^2 + \frac{1093}{1888}x \right) dx$ $= 0{,}4 \cdot \left[-\frac{1}{1350} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{1}{60} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1093}{1888} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^{18{,}88}$ $\approx 16{,}905$ Der benötigte Sand hat ein Volumen von ungefähr 16,9 m^3. *Anmerkung 1: Mit den Koordinaten des Ersatzpunktes* $V_E\left(19{,}57 \middle\| f(19{,}57)\right)$ *ergibt sich ein Volumen von ca. 19,2 m³.* *Anmerkung 2: Elementargeometrische Überlegungen können zu einem teilweise anderen Lösungsweg führen.* *Anmerkung 3: Durch unterschiedliches Rundungsverhalten kann es zu geringfügig anderen Ergebnissen kommen. Diese sind (wenn der Weg korrekt ist) ebenfalls als korrekt zu werten.*		15	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Analysis 2

I.2 Smartphones

Die Markteinführung eines neuen Smartphones vom Elektronikhersteller PEAR wird stets aufgeregt erwartet. Zur Modellierung der Entwicklung der täglichen Verkaufszahlen eines neu eingeführten Smartphones schlägt die Planungsabteilung von PEAR die Modellfunktion v vor mit

$$v(t) = 10000 \cdot t \cdot e^{-0{,}02t} \text{ mit } t \geq 0$$

wobei t die Zeit in Tagen seit Beginn der Markteinführung und $v(t)$ die am Tag t verkaufte Anzahl von Smartphones darstellt.

Die folgende Tabelle zeigt, wie viele Smartphones des Modells S2013 nach seiner Markteinführung pro Tag verkauft wurden.

t in Tagen	0	10	30	60
Verkaufszahlen in Stück	0	81 870	164 640	180 720

a) Bestätigen Sie, dass die Funktion v die täglichen Verkaufszahlen des Smartphones S2013 angenähert wiedergibt. (10P)

In der Anlage ist der Graph von v dargestellt.

b)
- Beschreiben Sie kurz den Verlauf des Graphen qualitativ.
- Interpretieren Sie darauf Bezug nehmend die Entwicklung der Verkaufszahlen im Anwendungskontext. (15P)

c)
- Bestätigen Sie, dass gilt: $v'(t) = 10000 \cdot e^{-0{,}02t} \cdot \left(1 - 0{,}02t\right)$.
- Berechnen Sie, an welchem Tag die meisten Smartphones S2013 verkauft werden, und berechnen Sie die entsprechende Verkaufszahl. (20P)

  Hinweis: Da aus der Abbildung deutlich wird, dass der einzige Extrempunkt ein Hochpunkt ist, reicht die Untersuchung der notwendigen Bedingung.

Eine Stammfunktion V von v hat die Gleichung $V(t) = 10\,000 \cdot \left(-50t \cdot e^{-0{,}02t} - 2500 \cdot e^{-0{,}02t}\right)$.

d) • Ermitteln Sie den Wert des Integrals $\int_0^{100} v(t)\, dt$.

• Interpretieren Sie das Integral im gegebenen Anwendungskontext. (20P)

Für die Firma PEAR ist es aus verschiedenen Gründen sinnvoll, den Produktzyklus (d. h. die Zeit vom ersten bis zum letzten verkauften Smartphone) zu begrenzen. Zur Vereinfachung der Prognose der insgesamt in den Verkauf gehenden Smartphones S2013 setzt die Planungsabteilung ab dem Wendepunkt der Verkaufszahlenentwicklung eine lineare Abnahme der täglichen Verkaufszahlen an, d. h. man ersetzt ab dem Wendepunkt der Funktion v den weiteren Verlauf des Funktionsgraphen durch die Wendetangente. Die Koordinaten des Wendepunkts sind gerundet $W(100|135335)$.

e) • Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.

• Zeichnen Sie die Wendetangente in das Koordinatensystem in der Anlage.

• Ermitteln Sie den Zeitpunkt, ab dem nach diesem Modell keine Smartphones mehr verkauft werden.

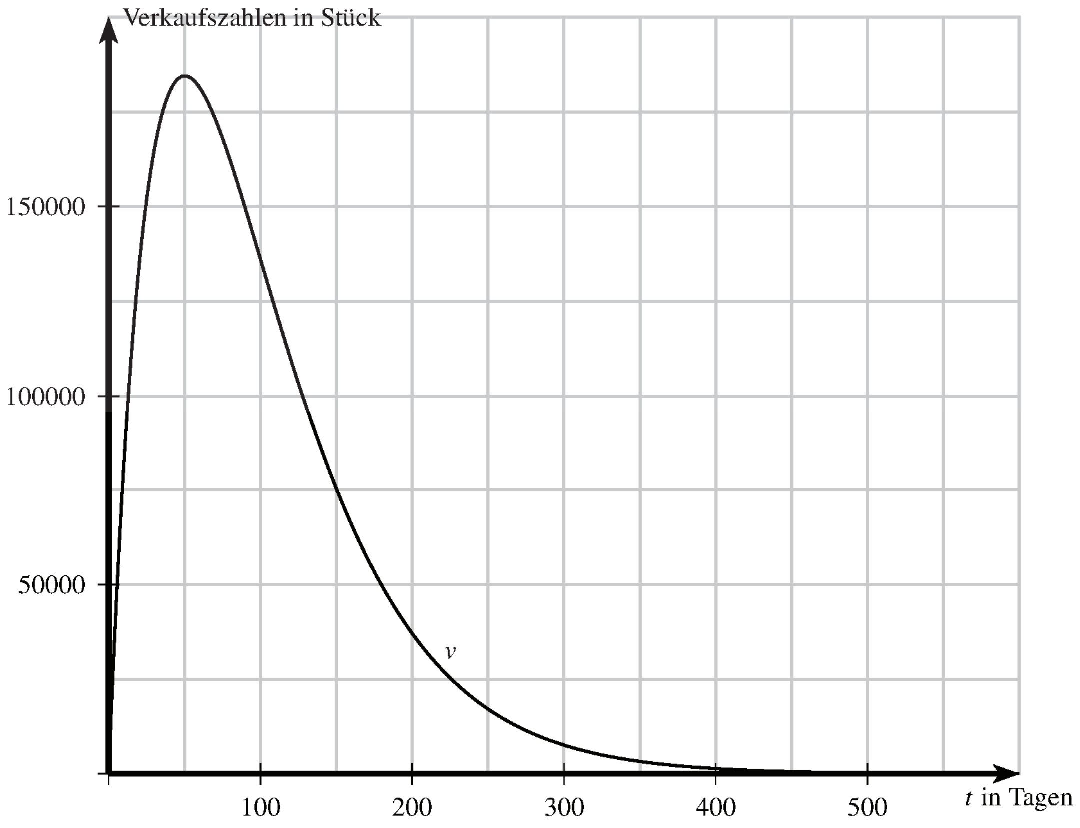
• Bestimmen Sie die Anzahl der Smartphones, die nach diesem Modell ab dem Zeitpunkt $t_w = 100$ insgesamt noch verkauft werden. (25P)

Die Planungsabteilung erwartet, dass sich die Verkaufszahlen des Nachfolgemodells des hier betrachteten Smartphones nach der Verkaufsfunktion w entwickeln, die zu v in folgender Beziehung steht:

$$w(t) = v\left(\frac{t}{2}\right).$$

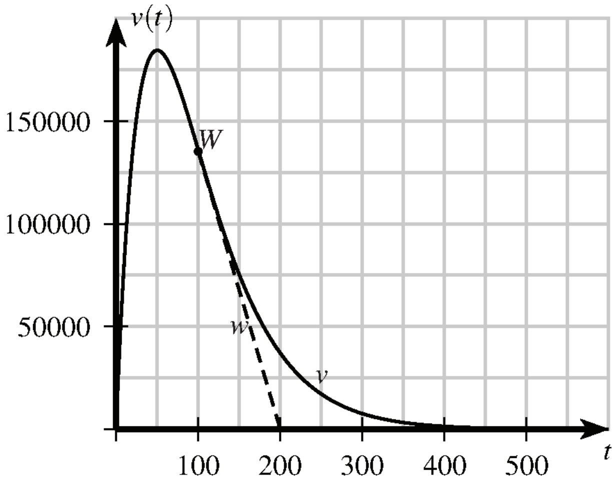
f) Vergleichen Sie den Verlauf des Graphen von w mit dem Verlauf des Graphen von v.
Gehen Sie bei diesem Vergleich auch auf die Lage der Nullstellen, der Hochpunkte und der Wendepunkte sowie auf das jeweilige Verhalten für $t \to \infty$ ein.
Hinweis: Hier wird eine beschreibende Darstellung in Textform gefordert; Rechnungen sind nicht notwendig. (10P)

Anlage zur Aufgabe „Smartphones“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Es ist: $v(0)=0$ $v(10)\approx 81873{,}1$ $v(30)\approx 164643{,}5$ $v(60)\approx 180716{,}5$ Die in der Tabelle angegeben täglichen Verkaufszahlen werden angenähert erreicht.	10		
b)	• Der Graph steigt zunächst bis zu seinem Hochpunkt an, danach fällt er. In der Phase des Fallens wird der Graph bis zum Wendepunkt immer steiler, danach wird er immer flacher. Er nähert sich der t-Achse asymptotisch an. *Zur Erlangung der vollen Punktzahl ist die Verwendung von Fachbegriffen erforderlich.* • Ein neues Smartphone erreicht kurz nach seiner Markteinführung eine maximale Nachfrage. Danach sinken die Verkaufszahlen, bis nahezu kein Smartphone mehr verkauft wird.		15	
c)	• Anwendung der Produkt- und der Kettenregel: $v'(t)=10000\cdot e^{-0{,}02t}+10000t\cdot e^{-0{,}02t}\cdot(-0{,}02)$ $\quad=10000\cdot e^{-0{,}02t}\cdot\left(1+t\cdot(-0{,}02)\right)=10000\cdot e^{-0{,}02t}\cdot\left(1-0{,}02t\right)$ Damit ist bestätigt, dass der angegebene Term richtig ist. • Es ist die Nullstelle von v' zu bestimmen: $v'(t)=0\Leftrightarrow 10000\cdot e^{-0{,}02t}\cdot\left(1-0{,}02t\right)=0$ $\quad\Leftrightarrow 10000\cdot e^{-0{,}02t}=0 \quad\vee\quad 1-0{,}02t=0$ $\quad\Leftrightarrow t=\frac{1}{0{,}02}=50$ $v(50)=10000\cdot 50\cdot e^{-0{,}02\cdot 50}=\frac{500000}{e}\approx 183940$ Die meisten Smartphones S2013, nämlich ca. 183940 Stück, werden am 50. Tag nach der Markteinführung verkauft.	15	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	• Es ist $\int_0^{100} v(t)\,dt = \left[V(t)\right]_0^{100} = \left[10000\cdot\left(-50t\cdot e^{-0{,}02t} - 2500\cdot e^{-0{,}02t}\right)\right]_0^{100}$ $= 10000\cdot\left(-\frac{5000}{e^2}-\frac{2500}{e^2}\right)+25000000$ $= -\frac{75000000}{e^2}+25000000 \approx 14849854$ • Das Integral kann so interpretiert werden, dass nach dem mathematischen Modell in den ersten 100 Tagen nach der Markteinführung etwa 14849854 Smartphones S2013 verkauft werden.		15	5
e)	• Ansatz für die Wendetangente: $w(t) = m\cdot t + n$ $m = v'(100) = 10000\cdot e^{-0{,}02\cdot 100}\cdot\left(1-0{,}02\cdot 100\right) = -\frac{10000}{e^2} \approx -1353$ Einsetzen der Steigung und der Koordinaten des Wendepunktes ergibt mit gerundete Werten: $135335 \approx -1353\cdot 100 + n$ also $n \approx 270635$ $w(t) \approx -1353\cdot t + 270635$ • Zeichnung der Wendetangente: 			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	 II	 III
	• Der Ansatz $-1353 \cdot t + 270635 = 0$ führt zu $t \approx 200$ Wird der Graph der Verkaufszahlenfunktion ab dem Wendepunkt durch die Wendetangente ersetzt, so endet der Verkauf nach ca. 200 Tagen. • Zu berechnen ist ein Integral, das hier als Flächeninhalt eines Dreiecks gedeutet werden kann, sodass die prognostizierte Anzahl der verkauften Smartphones $\frac{100 \cdot 135335}{2} = 6766750$ beträgt. *Der Wert 200 kann für diese Rechnung auch aus der Zeichnung entnommen werden.*		20	5
f)	Der Graph von w ist gegenüber dem Graphen von v um den Faktor 2 in t-Richtung gestreckt. Beide Graphen haben dieselbe Nullstelle. Die Funktionswerte an den Hochpunkten der beiden Graphen sind gleich, jedoch ist die t-Koordinate des Hochpunktes des Graphen von w doppelt so groß wie die t-Koordinate des Hochpunktes des Graphen von v. Analoges gilt für den Wendepunkt. Für $t \to \infty$ zeigen beide Graphen dasselbe asymptotische Verhalten.			10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Lineare Algebra/Analytische Geometrie 1

II.1 Bauernhaus mit Photovoltaikanlage

Die Besitzer eines Bauernhauses möchten eine Photovoltaik-Anlage (PV-Anlage) auf ihrem Dach anbringen lassen. Sie lassen sich zunächst beraten, inwiefern ihr Haus für die Installation so einer Anlage geeignet ist.

In einem kartesischen Koordinatensystem lässt sich die Grundfläche des Bauernhauses durch folgende Eckpunkte beschreiben:

$G_1(0|0|0)$, $G_2(10|3|0)$, $G_3(5{,}5|18|0)$ und $G_4(-4{,}5|15|0)$.

Die Eckpunkte des Dachbodens haben die Koordinaten

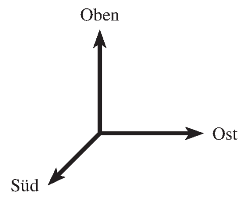
$S_1(0|0|3)$, $S_2(10|3|3)$, $S_3(5{,}5|18|3)$ und $S_4(-4{,}5|15|3)$.

Die Punkte G_1, G_2, G_3, G_4, S_1, S_2, S_3 und S_4 bilden die Eckpunkte eines Quaders.
Die obere Kante des Daches hat die Endpunkte

$D_1(5|1{,}5|7)$ und $D_2(0{,}5|16{,}5|7)$.

Die Koordinatenachsen verlaufen in Südrichtung, in Ostrichtung und senkrecht nach oben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Süd} \\ \text{Ost} \\ \text{Oben} \end{pmatrix}.$$



Die Längeneinheit in allen drei Richtungen beträgt 1m.

a) Vervollständigen Sie das Bauernhaus im Koordinatensystem in der Anlage. (10P)

Die einzelnen Photovoltaik-Elemente sind rechteckig und haben eine Breite von 0,8 m und eine Länge von 1,6 m. Die Besitzer des Bauernhauses möchten 54 dieser Elemente auf ihrem Dach montieren lassen.

b)
- Bestätigen Sie zunächst, dass die Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$ die Form eines Rechtecks hat.
- Zeigen Sie, dass es die Abmessungen der Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$ erlauben, 54 Photovoltaik-Elemente zu montieren. (20P)

c)
- Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E, welche die Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$ enthält.
- Bestimmen Sie auch eine Koordinatengleichung der Ebene E.

  Kontrollergebnis: $E: 80x_1 + 24x_2 + 109x_3 = 1199$ (15P)

Eine Ausrichtung der Hausseite, auf der sich die PV-Anlage befindet, nach Süden verspricht den höchsten Ertrag. Eine Abweichung von bis zu 30° von der Südrichtung wirkt sich nur gering aus.

d) Zeigen Sie, dass die Ausrichtung der Hausseitenfläche $G_2G_3S_3S_2$ nicht zu stark von der Südrichtung abweicht. (15P)

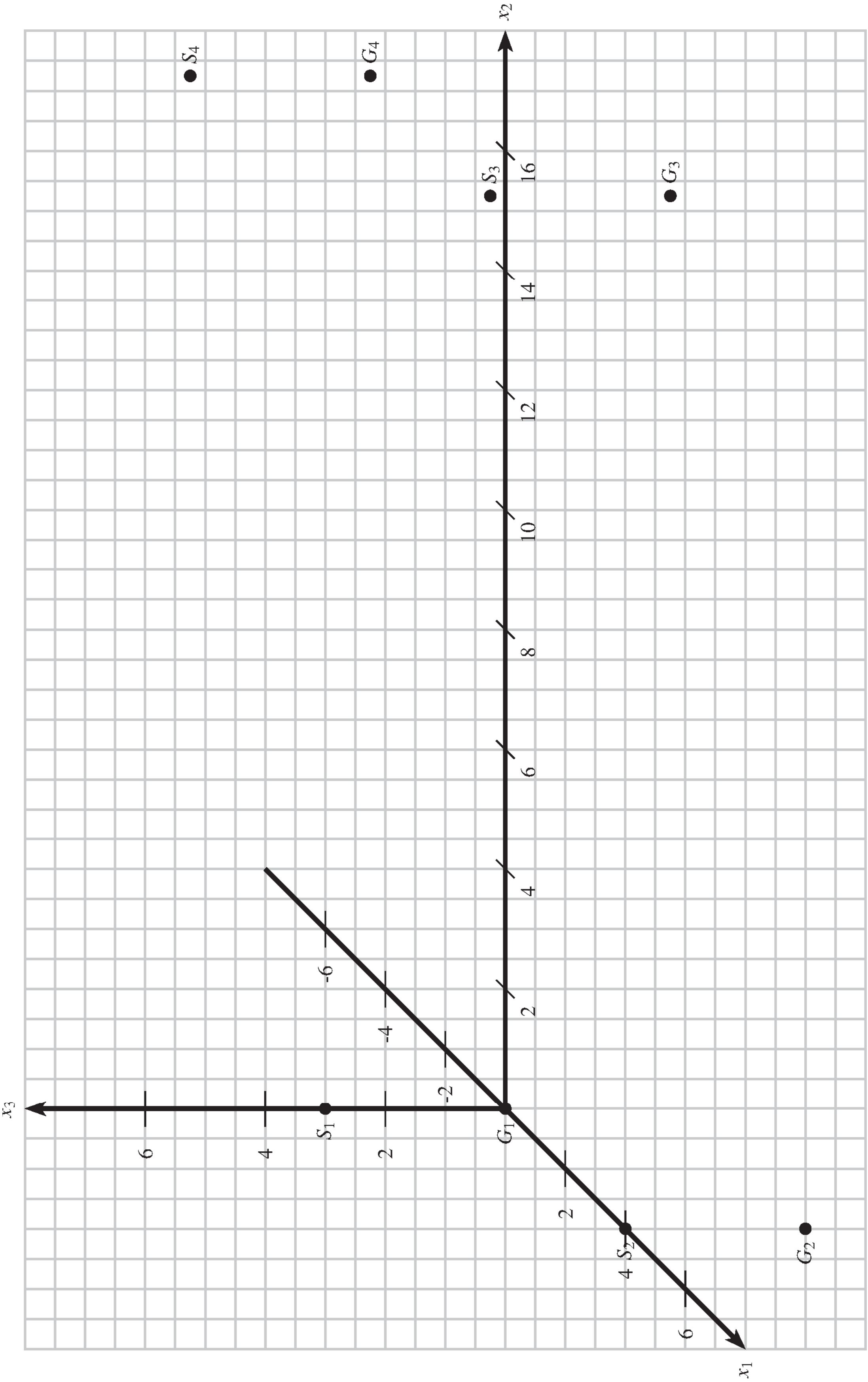
Der Ertrag einer PV-Anlage ist am größten, wenn das Sonnenlicht im rechten Winkel auf die Anlage trifft. Da sich die Richtung des einfallenden Sonnenlichtes im Laufe eines Tages ändert, ist es nicht möglich, dass die Sonnenstrahlen zu jeder Tageszeit senkrecht auf die PV-Anlage treffen. Es wird empfohlen, dass der Neigungswinkel der PV-Anlage gegenüber der x_1x_2-Ebene zwischen 20° und 60° liegt.

e)
- Untersuchen Sie, ob der Winkel zwischen der Ebene E und der x_1x_2-Ebene dieser Empfehlung entspricht.
- Zu einer bestimmten Tageszeit fällt das Sonnenlicht senkrecht auf die Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$. Geben Sie den Vektor an, der die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen beschreibt. Ermitteln Sie, in welchem Winkel die Sonne dann über dem Horizont steht**.** (20P)

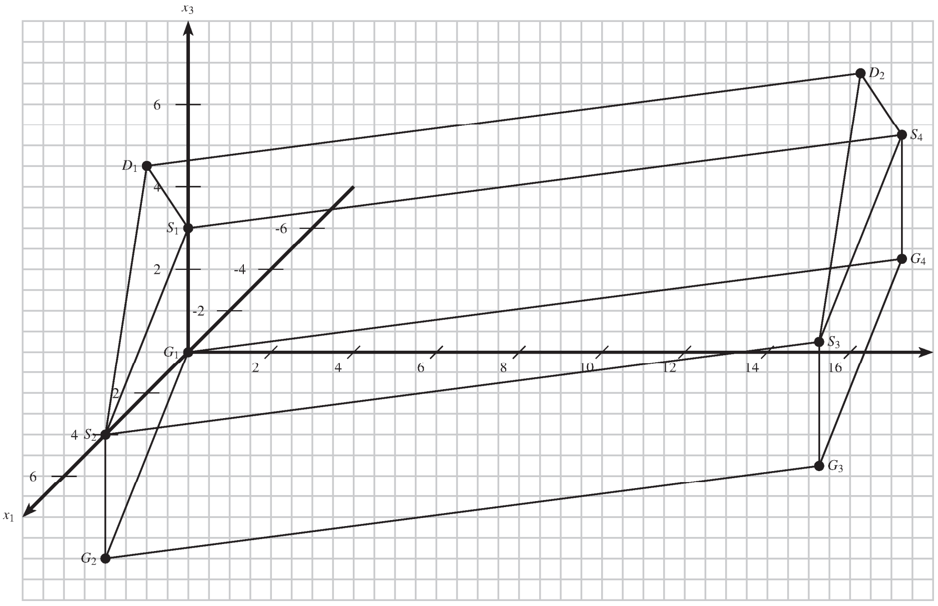
Schon durch kleinflächige Schatten auf der PV-Anlage wird der Ertrag beeinträchtigt. Im Garten steht ein 8 m hoher Mast mit dem Fußpunkt $(9{,}5\,|\,16\,|\,0)$. An einem Wintertag haben die einfallenden Sonnenstrahlen in der Mittagszeit die Richtung $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}$. Die Mastspitze wirft einen Schatten auf die Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$.

f)
- Ermitteln Sie die Koordinaten des Schattens der Mastspitze auf der Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$. Runden Sie Ihre Angaben auf eine Nachkommastelle.
- Die Gegebenheiten des Grundstückes ermöglichen nur eine Versetzung des Mastes in Süd-Richtung.
  Bestimmen Sie, wie weit der Mast mindestens versetzt werden muss, damit bei dem angegebenen Sonnenstand kein Schatten mehr auf das Dach fällt. (20P)

Anlage zur Aufgabe „Bauernhaus mit Photovoltaikanlage“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)		10		
b)	• Durch Subtraktion der entsprechenden Koordinaten erhält man die folgenden Vektoren: $\overrightarrow{D_1S_2} = \begin{pmatrix}5\\1,5\\-4\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{S_3D_2} = \begin{pmatrix}-5\\-1,5\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{S_2S_3} = \begin{pmatrix}-4,5\\15\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{D_1D_2} = \begin{pmatrix}-4,5\\15\\0\end{pmatrix}$ Da jeweils zwei Vektoren kollinear sind, sind die dazugehörigen Seiten parallel. Zudem schließen $\overrightarrow{S_2S_3}$ und $\overrightarrow{S_3D_2}$ einen rechten Winkel ein: $\overrightarrow{S_2S_3} \cdot \overrightarrow{S_3D_2} = -4,5 \cdot (-5) + 15 \cdot (-1,5) + 0 \cdot 4 = 0$ Das Viereck $D_1S_2S_3D_2$ ist also ein Rechteck. • 18 Elemente lassen sich nebeneinander – entlang der Dachkante $\overline{S_2S_3}$ – anbringen: $18 \cdot 0,8 = 14,4 < \lvert\overrightarrow{S_2S_3}\rvert = \sqrt{4,5^2 + 15^2} \approx 15,66$. Es können 3 Reihen von Elementen übereinander angeordnet werden: $3 \cdot 1,6 = 4,8 < \lvert\overrightarrow{S_2D_1}\rvert = \sqrt{5^2 + 1,5^2 + 4^2} \approx 6,58$ Damit ist es möglich, $3 \cdot 18 = 54$ Elemente anzubringen.	10	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	• Als Parameterdarstellung der Ebene ergibt sich z. B.: $E:\vec{x}=\overrightarrow{OS_2}+r\cdot\overrightarrow{S_2S_3}+s\cdot\overrightarrow{S_2D_1}$ $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}10\\3\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5,5-10\\18-3\\3-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}5-10\\1,5-3\\7-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\3\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-4,5\\15\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-5\\-1,5\\4\end{pmatrix}$ • Daraus lässt sich eine Koordinatenform bilden: $x_1=10-4,5r-5s$ $x_2=3+15r-1,5s$ $x_3=3+4s$ Eliminiert man *r* und *s,* erhält man als Koordinatenform: $E:\ 80x_1+24x_2+109x_3=1199$. *Alternative über den Ansatz* $\vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{OS_2}$ *:* Der Normalenvektor des Ebene lässt sich mithilfe des Vektorprodukts bestimmen: $\vec{n}=\begin{pmatrix}-4,5\\15\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\-1,5\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\18\\81,75\end{pmatrix}$ Einsetzen in die Gleichung $\vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{OS_2}$ liefert: $E:\ 60x_1+18x_2+81,75x_3=60\cdot10+18\cdot3+81,75\cdot3=899,25$. Multiplikation mit $\frac{4}{3}$ ergibt die angegebene Koordinatengleichung: $E:\ 80x_1+24x_2+109x_3=1199$		15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>Die Südrichtung ist durch $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ gegeben.
Da der Körper $G_1G_2G_3G_4S_1S_2S_3S_4$ einen Quader bildet, ist $\overrightarrow{G_1G_2}=\begin{pmatrix}10\\3\\0\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene $G_2G_3S_3S_2$.
Es gilt für den Winkel α zwischen diesem Normalenvektor und der Südrichtung:
$$\cos\alpha=\frac{\begin{pmatrix}10\\3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{10^2+3^2}}$$
Es ergibt sich:
$$\alpha\approx 16{,}7^\circ$$
Diese Abweichung liegt deutlich unter der Toleranzgrenze von 30°.</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	• Der Winkel zwischen der Ebene *E* und der x_1x_2-Ebene ergibt sich aus $\cos\alpha = \frac{\left\lvert \begin{pmatrix} 80 \\ 24 \\ 109 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert}{\left\lvert \begin{pmatrix} 80 \\ 24 \\ 109 \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert} = \frac{109}{\sqrt{18857}}$ Also gilt $\alpha \approx 37^\circ$. Die Dachneigung beträgt ca. 37° und liegt damit im angegebenen Bereich 20° bis 60°, was der Empfehlung entspricht. • Die einfallenden Sonnenstrahlen treffen senkrecht auf die Dachfläche, d. h. sie verlaufen in Richtung eines "nach unten" zeigenden Normalenvektors der Ebene *E*, z. B. $\begin{pmatrix} -80 \\ -24 \\ -109 \end{pmatrix}$. *Anmerkung: Gefordert ist lediglich die Angabe eines Vektors ohne weitere Begründung oder Erläuterung.* Die Sonne steht (unter Berücksichtigung des soeben errechneten Winkels) also ca. 90° – 37° = 53° über dem Horizont. *Anmerkung: Wenn der Winkel α nicht (oder falsch) ermittelt wurde, aber deutlich gemacht wird, dass der gesuchte Winkel über dem Horizont der Komplementwinkel des Winkels α ist, wird der zweite Teil als korrekt bewertet.*	5	10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)	• Betrachtet werden die Sonnenstrahlen, welche durch die Spitze des Mastes verlaufen. Diese liegen auf der Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}9{,}5\\16\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\-0{,}3\end{pmatrix}$. Der Schattenpunkt der Mastspitze auf dem Dach ergibt sich als Schnittpunkt von *g* und *E*: $80\cdot(9{,}5-t)+24\cdot16+109\cdot(8-0{,}3t)=1199$ $\Leftrightarrow -112{,}7t=-817 \Leftrightarrow t=\frac{8170}{1127}$ Als Schnittpunkt von *g* und *E* ergibt sich durch Einsetzen von *t* in *g* näherungsweise: $SP(2{,}3\mid 16{,}0\mid 5{,}8)$. • Die Mastspitze des versetzten Mastes lässt sich durch die Koordinaten $(a\mid 16\mid 8)$ beschreiben. Betrachtet werden wieder die Sonnenstrahlen, welche durch den Endpunkt des Mastes verlaufen. Diese liegen auf einer Geraden $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}a\\16\\8\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\0\\-0{,}3\end{pmatrix}$. Damit der Schatten gerade eben nicht mehr auf dem Dach verläuft, muss der Schattenpunkt der Mastspitze auf der Kante $\overline{S_2S_3}$ liegen. Die Punkte der Kante $\overline{S_2S_3}$ lassen sich beschreiben durch $k:\vec{x}=\begin{pmatrix}10\\3\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}5{,}5-10\\18-3\\3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\3\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4{,}5\\15\\0\end{pmatrix}\quad s\in[0;\ 1]$ Der Schnittpunkt von *h* und *k* berechnet sich durch $\begin{pmatrix}a\\16\\8\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\0\\-0{,}3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\3\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4{,}5\\15\\0\end{pmatrix}$ *r* und *s* lassen sich unmittelbar bestimmen: $r=\frac{50}{3}$ und $s=\frac{13}{15}$. Da $\frac{13}{15}\in[0;\ 1]$, liegt der Schnittpunkt tatsächlich auf der Strecke $\overline{S_2S_3}$. *a* ergibt sich durch Einsetzen der Werte von *r* und *s*: $a=\frac{683}{30}\approx 22{,}8$ Der Mast sollte also mindestens ca. 22,8 m – 9,5 m = 13,3 m in Richtung Süden versetzt werden.		5	15
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Lineare Algebra/Analytische Geometrie 2

II.2 Pinguine

Pinguine leben in Kolonien in den kalten Regionen der Südhalbkugel. In einer dieser Kolonien mit etwa 50 000 Tieren finden Forscher 150 tote Tiere, die offensichtlich an einer bisher unbekannten Krankheit gestorben sind. Erkrankte Pinguine kann man daran erkennen, dass sie kurz nach der Infektion ein auffälliges Verhalten zeigen. An dem Tag, an dem 150 tote Tiere gefunden wurden, haben die Forscher 800 kranke Tiere gesichtet.

Zur Beschreibung der Ausbreitung der Krankheit mit einem Modell teilen die Forscher die gesamte Population von 50 000 Pinguinen in drei Gruppen ein: *Gesunde, Kranke* und *Tote*.

Im Vektor $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} G_n \\ K_n \\ T_n \end{pmatrix}$ wird die Verteilung der Gesamtpopulation auf diese drei Gruppen am Tag n (nach Ausbruch der Krankheit) notiert. Die einzelnen Komponenten G_n, K_n und T_n geben jeweils die Anzahl der Pinguine in der betreffenden Gruppe an.

Im Rahmen des Modells gilt der Zusammenhang $\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n$, wobei M die folgende Matrix ist:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}15 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{v}_0$ beschreibt die Population von 50 000 gesunden Pinguinen.

a)
- Erstellen Sie den zu der Übergangsmatrix M gehörenden Übergangsgraphen.
- Interpretieren Sie die Matrixeinträge $m_{11} = 0{,}99$ und $m_{32} = 0{,}3$ vor dem Hintergrund des Sachkontextes.
- Begründen Sie im Sachkontext, warum die Summe der Spalteneinträge der Matrix M jeweils 1 beträgt. (20P)

b)
- Berechnen Sie mithilfe des Modells die Verteilung der Gesamtpopulation von 50 000 Pinguinen für die ersten beiden Tage nach Ausbruch der Krankheit.
- Beurteilen Sie, ob das von den Forschern gewählte Modell die Beobachtungen der im Text beschriebenen Pinguinfunde angemessen beschreibt. (15P)

Aufgrund der schlechten Wetterbedingungen war an einem Mittwoch die Zählung der Tiere nicht möglich. Am darauf folgenden Tag werden insgesamt 1052 kranke und 1574 tote Pinguine gezählt.

c) Bestimmen Sie mithilfe des Modells die Anzahl der gesunden, kranken und toten Tiere für den Mittwoch, an dem die Zählung nicht möglich war. (20P)

d)
- Begründen Sie, dass im Rahmen dieses Modells langfristig alle Pinguine sterben werden.
- Beurteilen Sie, inwiefern es sich bei der Abnahme der Anzahl der lebenden Pinguine um eine exponentielle Abnahme handelt. (15P)

Einige der genesenen Pinguine werden genauer untersucht. Es stellt sich heraus, dass diese gegen die Krankheit immun sind, also nicht wieder erkranken.
In einem erweiterten Modell geht man daher davon aus, dass alle Pinguine nach einer überstandenen Infektion gegen die Krankheit immun sind. Die Gruppe der *immunen* Pinguine wird in das Modell aufgenommen, sodass nun der Vektor

$$\vec{w}_n = \begin{pmatrix} G_n \\ K_n \\ T_n \\ I_n \end{pmatrix}$$

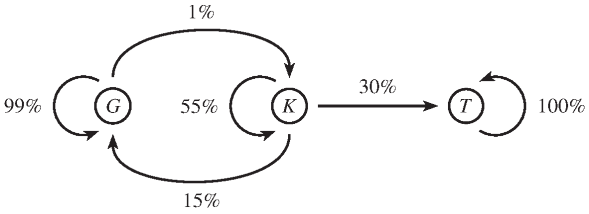
die Verteilung der Gesamtpopulation auf die vier Gruppen am Tag n beschreibt. In der Gruppe der *Gesunden* befinden sich also nur diejenigen gesunden Tiere, die zwar gesund, aber nicht immun sind.

e)
- Geben Sie für das erweiterte Modell eine Übergangsmatrix L an und begründen Sie Ihre Angaben.
- Bestimmen Sie den Anteil der Tiere an der Gesamtpopulation, der nach diesem Modell die Epidemie überlebt. (15P)

Für die Matrix L gilt: $L^{180} \approx \begin{pmatrix} 0{,}164 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}004 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}555 & 0{,}667 & 1 & 0 \\ 0{,}277 & 0{,}333 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) Bestätigen Sie, dass man mithilfe der Matrix $P = \begin{pmatrix} 0{,}027 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}001 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}649 & 0{,}667 & 1 & 0 \\ 0{,}324 & 0{,}333 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ den Bestand der Pinguinpopulation nach etwa einem Jahr näherungsweise berechnen kann. (15P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• Übergangsgraph:  • 99 % der gesunden Tiere sind am nächsten Tag noch gesund. 30 % der erkrankten Tiere sind am nächsten Tag tot. • Die Spaltensumme in der Matrix *M* ist die Summe der Anteile, die von einem bestimmten Zustand in einen beliebigen Zustand (*G*, *K*, *T*) übergehen. Diese Summe muss 1 betragen, da keine Tiere – z. B. durch Zuwanderung oder Geburten – dazukommen.	10	10	
b)	• Mit dem Anfangszustand $\begin{pmatrix} 50000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\vec{v_1} = M \cdot \begin{pmatrix} 50000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49500 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v_2} = M \cdot \begin{pmatrix} 49500 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49080 \\ 770 \\ 150 \end{pmatrix}$ • Somit ergeben sich nach zwei Tagen ungefähr die im Text genannten Werte von 800 kranken und 150 toten Tieren. Die Abweichungen zwischen berechneten und beobachteten Werten betragen nur 3,75 %, das Modell scheint daher angemessen zu sein.	10		5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	Zur Bestimmung der Vortagspopulation muss ein Gleichungssystem gelöst werden: $\begin{pmatrix}0{,}99 & 0{,}15 & 0\\ 0{,}01 & 0{,}55 & 0\\ 0 & 0{,}3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}g\\ k\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47374\\ 1052\\ 1574\end{pmatrix}$ Die ersten beiden Gleichungen lauten: $0{,}99\cdot g+0{,}15\cdot k=47374$ $0{,}01\cdot g+0{,}55\cdot k=1052$ Durch Multiplikation der zweiten Zeile mit 99 ergibt sich $0{,}99\cdot g+0{,}15\cdot k=47375$ $0{,}99\cdot g+54{,}45\cdot k=104148$ Durch Subtraktion und Division erhält man $k=1045{,}561694...$ und durch Einsetzen in die erste Zeile $g=47694{,}10681...$. Nun kann man mithilfe der dritten Zeile $0{,}3\cdot k+t=1574 \Leftrightarrow t=1574-0{,}3k$ die Zahl der toten Tiere bestimmen: $t=1260{,}3314917...$ Am Mittwoch gab es ca. 47 694 gesunde, 1046 kranke und 1260 tote Pinguine. *Runden Prüflinge die Werte immer ab oder rechnen sie mit den ungerundeten Werten weiter, so ist die volle Punktzahl zu geben. Werden die Ergebnisse in den Antwortsätzen nicht gerundet, so führt dies zu einem Abzug von einem Punkt.*		20	
d)	• Da das System abgeschlossen ist (also beispielsweise keine Geburten oder Zuwanderungen stattfinden), täglich 30 % der erkrankten Pinguine sterben und stets Neuerkrankungen stattfinden, reduziert sich die Population der lebenden Tiere jeden Tag und wird aussterben. • Täglich sterben 30 % der erkrankten Tiere. Dies legt eine exponentielle Abnahme nahe. Jedoch unterliegt die Anzahl der erkrankten Tiere Schwankungen, da kranke Tiere gesunden und gesunde Tiere erkranken können. Die Abnahme entspricht daher nur näherungsweise einer exponentiellen Entwicklung.		5	10

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

- Es ergibt sich die Matrix

$$L=\begin{pmatrix}0{,}99 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}01 & 0{,}55 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}3 & 1 & 0\\ 0 & 0{,}15 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

  Begründung: Kein Tier geht jetzt mehr von der Gruppe der *Kranken* in die Gruppe der *Gesunden*, sondern der Anteil der *Kranken*, die innerhalb eines Tages genesen, findet sich in der Gruppe der *Immunen* wieder. Alle Tiere aus der Gruppe der *Immunen* sind im gegebenen Modell auch einen Tag später noch in dieser Gruppe.

- Von der Gruppe der *Gesunden* wechselt in jedem Zeitschritt ein fester Anteil zur Gruppe der *Kranken*; die Anzahl der *Gesunden* nimmt also zugunsten der Anzahl der *Kranken* ab. Die Anzahl der *Kranken* wiederum nimmt zugunsten der Anzahl der *Immunen* und der Anzahl der *Toten* ab; die Gesamtanzahl der Population verteilt sich langfristig also ausschließlich auf die *Immunen* und die *Toten*. Von den erkrankten Pinguinen sterben 30 %, während 15 % gegen die Krankheit immun werden. Es sterben somit doppelt so viele kranke Tiere, wie immun werden. Damit wird ein Drittel der Pinguine die Epidemie überleben.

  Sollte sich die Lösung der Prüflinge auf die Angaben im nachfolgenden Aufgabenteil beziehen, ist dies nur bei vollständiger Argumentation als korrekt zu bewerten.

</td><td>5</td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

$$L^{360}=L^{180}\cdot L^{180}\approx\begin{pmatrix}0{,}164 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}004 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}555 & 0{,}667 & 1 & 0\\ 0{,}277 & 0{,}333 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}164 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}004 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}555 & 0{,}667 & 1 & 0\\ 0{,}277 & 0{,}333 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\approx\begin{pmatrix}0{,}027 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}001 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}649 & 0{,}667 & 1 & 0\\ 0{,}324 & 0{,}333 & 0 & 1\end{pmatrix}=P$$

Da man mithilfe der Matrix L^{180} den Bestand der Pinguinpopulation nach 180 Tagen berechnen kann, kann man mithilfe von $L^{360}\approx P$ den Bestand der Pinguinpopulation nach etwa einem Jahr (welches meistens 365 Tage hat) näherungsweise berechnen.

</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

Stochastik 1

III.1 Ventilschäden

Im Jahr 1955 verfügte eine Kunstflugstaffel in Amarillo, Texas, über fünf Nachbauten der berühmten Fokker Dr1-III. Dieses Flugzeug hat einen 7-Zylinder-Motor, und da jeder Zylinder ein Auslassventil hat, sind bei einer Maschine 7 Auslassventile eingebaut.

Die Ersatzventile liefert eine örtliche Firma in Kisten mit je 50 Ventilen; die Erfahrung zeigt, dass 95% der gelieferten Ventile nach dem Einbau funktionsfähig sind. (Die Anzahl der funktionsfähigen Ventile sei binomialverteilt.)

Wenn ein Ventil defekt ist, lässt sich der Motor zwar anwerfen, aber er läuft dann mit geringerer Leistung. Bei zwei defekten Ventilen läuft der Motor gar nicht und lässt sich nicht einmal anwerfen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass in einer Kiste

- … alle Ventile funktionsfähig sind.
- … genau drei Ventile defekt sind.
- …weniger als 45 Ventile funktionsfähig arbeiten. (20P)

Der Mechaniker merkt, dass einer der Motoren weniger leistet. Kurz darauf lässt sich der Motor nicht einmal mehr anwerfen. Der Mechaniker nimmt an, dass nunmehr genau zwei Ventile defekt sind. Er tauscht zwei Ventile im Motor aus, die er zufällig auswählt, und zwar durch Ventile, die erwiesenermaßen in Ordnung sind.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis:
Der Motor läuft jetzt wieder, aber mit geringerer Leistung. (20P)

Auslassventile sind hoch belastet. Ihre mittlere Lebensdauer beträgt nach aller Erfahrung 80 Stunden.
Die Lebensdauer ist normalverteilt mit einer Standardabweichung von 18 Stunden.
Deswegen werden alle Ventile in regelmäßigen Abständen ersetzt, und zwar jeweils nach 40 Flugstunden.

c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach dem Einbau funktionsfähiges Ventil noch vor Ablauf des Wartungsintervalls ausfällt. (15P)

Die Piloten sind mit ihren Maschinen jeweils eine Stunde in der Luft, bevor sie wieder landen (und gegebenenfalls die Hilfe des Mechanikers erhalten). Berechtigterweise möchte kein Pilot erleben, dass bei seiner Maschine während seiner Flugstunde unterwegs der Motor unrund zu laufen beginnt. Man einigt sich darauf, dass die Piloten bereit sind, ein solches Defekt-Risiko einzugehen, wenn es in keiner Betriebsstunde 1 % überschreitet.

d)
- Begründen Sie, dass die gefährlichste Flugstunde die letzte Stunde vor der Wartung ist.
- Bestimmen Sie die Ausfallswahrscheinlichkeit für ein Ventil während dieser Stunde. (20P)

Die Mechaniker werden neuerdings auch von einer zweiten Firma mit Ventilen beliefert; die Ventile dieser Firma sind erfahrungsgemäß zu 97 % funktionsfähig. Die Firma liefert die Ventile in Kisten zu 70 Stück. Die Inhalte von je einer Kiste der ersten und der zweiten Firma werden von den Mechanikern zusammengetan; aus dieser „Mischkiste“ wird das nächste benötigte Ventil zufällig herausgenommen und beim Einbau verwendet. Nach dem Einbau wird es als defekt erkannt.

e)
- Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel für die Merkmalspaare
  funktionsfähiges Ventil - defektes Ventil und
  Ventil von Firma 1 - Ventil von Firma 2,
  ob die beiden Merkmalspaare stochastisch unabhängig sind.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das defekte Ventil aus der Lieferung der Firma 2 kommt. (25P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Sei X die Anzahl der funktionsfähigen Ventile. - Alle Ventile sind in Ordnung: $P(X=50)=0{,}95^{50}\approx 0{,}0769$ - Genau drei Ventile sind defekt: $P(X=47)=\binom{50}{47}\cdot 0{,}95^{47}\cdot 0{,}05^{3}\approx 0{,}2199$ - Weniger als 45 Ventile arbeiten einwandfrei: Mit der Tabelle ergibt sich: $P(X<45)=P(X\leq 44)\approx 1-0{,}9622=0{,}0378$	10	10	
b)	Dieses Ereignis wird dadurch realisiert, dass genau eins der beiden ausgebauten Ventile defekt ist. $P(\text{Der Motor läuft jetzt wieder, aber mit geringerer Leistung.})$ $=\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6}$ $=\frac{10}{21}$ $\approx 0{,}4762$ Die Wahrscheinlichkeit, dass der Motor wieder läuft, jedoch nur mit geringerer Leistung, beträgt ca. 47,6 %. *Ein anderer Weg führt über einen hypergeometrischen Ansatz:* $P(\text{Der Motor läuft jetzt wieder, aber mit geringerer Leistung.})=\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{7}{2}}=\frac{10}{21}$	15	5	
c)	Die Zufallsvariable L gibt die Lebensdauer des Ventils an. $P(L<40)=\Phi\left(\frac{40-80}{18}\right)\approx\Phi(-2{,}22)=1-\Phi(2{,}22)\approx 0{,}0132$ Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ventil noch vor Ablauf des Wartungsintervalls ausfällt, beträgt ca. 1,3 %.		15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>

- Argumentation aus dem Sachkontext: Nach der Wartung sind die Ventile neu, ihr Verschleiß also noch nicht gegeben; da das Ausfallsrisiko mit dem Verschleiß steigt und der Verschleiß mit der Betriebsdauer, ist das Ausfallsrisiko (pro Flugstunde) am Ende der Einsatzzeit am größten.

  Argumentation aus der Mathematik: Je näher der Wartungstermin kommt, desto näher rückt auch der Termin des Endes der mittleren Lebensdauer.
  Das in den Berechnungen benötigte negative Argument $\frac{t-80}{18}$ der
  Φ-Funktion wird damit betragsmäßig kleiner, und damit wird der Wert der Φ-Funktion größer.

  Anmerkung: Es wird lediglich eine Begründung gefordert.

- Die Zufallsvariable L gibt die Lebensdauer des Ventils an:

  Ausfall eines Ventils während der 40. Stunde:

  $$P(39 \leq L \leq 40) = \Phi\left(\frac{40-80}{18}\right) - \Phi\left(\frac{39-80}{18}\right)$$
  $$\approx \Phi(-2{,}22) - \Phi(-2{,}28) \approx 0{,}002$$

  Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ventil in der 40. Stunde ausfällt, beträgt ca. 0,2 %.

</td><td></td><td>15</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

e)

- Vierfeldertafel:

	f	$\overline{f}$	
A	$\frac{19}{48}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{5}{12}$
B	$\frac{679}{1200}$	$\frac{7}{400}$	$\frac{7}{12}$
	$\frac{577}{600}$	$\frac{23}{600}$	1

- A : Das Ventil stammt von der Firma 1.

  B : Das Ventil stammt von der Firma 2.

  f : Das Ventil ist funktionsfähig.

  $\overline{f}$: Das Ventil ist defekt.

  Zu prüfen ist, ob die Gleichung $P(A)\cdot P(f)=P(A\cap f)$ erfüllt wird.

$$P(A)=\frac{5}{12} \qquad P(f)=\frac{577}{600}$$

$$P\left(A\cap f\right) \quad =\frac{19}{48}\approx 0{,}3958$$

$$P(A)\cdot P(f)=\frac{5}{12}\cdot\frac{577}{600}=\frac{577}{1440}\approx 0{,}4007$$

Die Ergebnisse sind verschieden, aber fast gleich. Es liegt also im strengen Sinne keine stochastische Unabhängigkeit vor, näherungsweise ist dies aber doch der Fall.

Es ist

$$P(B\,|\,\overline{f})=\frac{P(B\cap\overline{f})}{P(\overline{f})}=\frac{\frac{7}{400}}{\frac{23}{600}}=\frac{21}{46}\approx 0{,}4565$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ventil aus der Lieferung der Firma 2 stammt, unter der Bedingung, dass es defekt ist, beträgt ca. 45,65 %.

		I	II	III
e)			10	15
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Stochastik 2

III.2 Wassertaxis

Viele Urlaubsinseln im Indischen Ozean sind nur mit Wasserflugzeugen, den sogenannten „Wassertaxis“ zu erreichen.

Bei der Fluggesellschaft WT ist für jedes ihrer Flugzeuge ein Team von fünf Personen (A, B, C, D, E) fest verantwortlich. Wie die meisten Flugzeuge werden die Wassertaxis von zwei Piloten gesteuert. Die Passagiere und Flugzeuge werden am Boden von drei Personen betreut.

Von der Flugleitung werden die monatlichen Einsatzpläne zufällig festgelegt. Es wird für jeden Tag zufällig bestimmt, wer von den 5 Personen an welchem Tag als Pilot fliegt und wer als Bodenpersonal arbeitet. Dabei sind alle 5 Personen gleichberechtigt.

a) Geben Sie die möglichen Pilotenteams an. (10P)

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass am zweiten Tag zwei komplett andere Personen als Piloten im Einsatz sind als am ersten Tag. (10P)

Obwohl die Einteilung der Teammitglieder nach dem Zufallsprinzip erfolgt, gibt es immer wieder Diskussionen um die Arbeitsverteilung. Um die Situation zu beurteilen, lässt die Unternehmensleitung einige Punkte untersuchen.

c)
- Bestätigen Sie, dass die zufällige Einteilung eines bestimmten Teammitgliedes als Pilot durch die Flugleitung als Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}4$ beschrieben werden kann.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein bestimmtes Teammitglied innerhalb der nächsten 30 Tage genau 5-mal als Pilot eingesetzt wird.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmtes Teammitglied mehr als 25-mal innerhalb der nächsten 50 Tage als Pilot eingesetzt wird.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Teammitglied innerhalb der nächsten 11 Tage mindestens einmal als Pilot eingesetzt wird. (35P)

Ein älteres Teammitglied meint, dass er mit 28 Einsätzen in den letzten hundert Tagen viel zu selten als Pilot geflogen war. Er behauptet, dass bei der Verteilung der Flugeinsätze geschummelt wurde und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er zum Einsatz kam, geringer als $p = 0{,}4$ war. Nehmen Sie an, dass eine Binomialverteilung vorliegt.

d)
- Beurteilen Sie seine Behauptung mittels eines Hypothesentests zum Signifikanzniveau von 5 % ausgehend von der Nullhypothese $H_0: p \geq 0{,}4$.
- Beurteilen Sie, welche Schlüsse er ziehen könnte, wenn er 35-mal innerhalb von 100 Tagen eingesetzt worden wäre. (20P)

Zur Qualitätssicherung hat die Geschäftsführung der WT eine Umfrage ihren Fluggästen durchführen lassen:

52% aller Fluggäste bleiben der Fluglinie treu, egal ob sie zufrieden oder unzufrieden sind.
Von den Zufriedenen wollen 8% die Fluglinie wechseln.
Bei den Unzufriedenen liegt der Anteil derjenigen, die der Fluglinie treu bleiben, bei 11 %.

Betrachten Sie die genannten relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten.

e) Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Fluggast

- der Fluglinie treu bleibt, wenn er zufrieden ist.
- zufrieden ist.
- der Fluglinie treu bleibt und zufrieden ist. (25P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Es gibt zehn mögliche Pilotenkombinationen: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE	10		
b)	$P(\text{Am zweiten Tag fliegen zwei komplett andere Personen als am Vortag.}) = \frac{3}{10}$	10		
c)	Sei X die Anzahl der Einsätze als Pilot. • Es liegt bei jeder Einteilung ein Bernoulli-Experiment vor, weil o es genau zwei Ausgänge gibt (Person hat Flugdienst/Person hat keinen Flugdienst) und o die Auswahl eines Piloten laut Text jeden Tag per Zufall entschieden wird. Die Wahrscheinlichkeit der Auswahl ist konstant $p = 0{,}4$, weil jeder Pilot in vier von zehn möglichen Pilotenkombinationen auftritt. • Es gilt: $P(X=5)=\binom{30}{5}\cdot 0{,}4^5\cdot 0{,}6^{25}\approx 0{,}41\%$ • $P(X>25)=1-P(X\leq 25)\approx 1-0{,}9427=0{,}0573=5{,}73\%$. • $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-(1-0{,}4)^{11}\approx 0{,}9964=99{,}64\%$	5	30	
d)	• Einseitiger Hypothesentest: $H_0: p\geq 0{,}4 \quad H_1: p<0{,}4$ Dabei sind $n=100,\ \mu=np=100\cdot 0{,}4=40$ und $\sigma=\sqrt{40\cdot 0{,}6}=\sqrt{24}\approx 4{,}9>3$ Die Laplace-Bedingung ist also erfüllt. Es ergibt sich der folgende Annahmebereich: $[40-1{,}64\cdot 4{,}9;\ 100]\approx[31{,}96;\ 100]$ Weil er weniger als 32 Einsätze hatte, wird die Nullhypothese verworfen. Er hat also vermutlich recht. • Wenn er 35 Einsätze geflogen hätte, könnte er keine Schlüsse in seinem Sinne ziehen.		10	10

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

- P(Der Fluggast bleibt treu, wenn er zufrieden ist.)
$= 1 - P$(Der Fluggast wechselt, wenn er zufrieden ist.)
$= 1 - 0{,}08$
$= 92\%$

- Sei x die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Dann ergibt sich aus den Angaben der Aufgabenstellung die folgende Vierfeldertafel:

<table>
<tr><th></th><th>treu</th><th>wechseln</th><th></th></tr>
<tr><td>zufrieden</td><td>$0{,}92x$</td><td>$0{,}08x$</td><td>x</td></tr>
<tr><td>unzufrieden</td><td>$0{,}11 \cdot (1-x)$</td><td>$0{,}89 \cdot (1-x)$</td><td>$1-x$</td></tr>
<tr><td></td><td>0,52</td><td>0,48</td><td>1</td></tr>
</table>

Es muss dann gelten: $0{,}92x + 0{,}11 \cdot (1-x) = 0{,}52$

Diese Gleichung hat die Lösung $x = \frac{41}{81} \approx 0{,}506$

Es gilt also P(Der Fluggast ist zufrieden.) $\approx 50{,}6\%$

Alternativ kann man die Gleichung $0{,}08x + 0{,}89 \cdot (1-x) = 0{,}48$ *verwenden. Auch ist eine anders entwickelte Vierfeldertafel möglich.*

- P(Der Fluggast bleibt treu und ist zufrieden.)
$= 0{,}92x$
$= 0{,}92 \cdot \frac{41}{81}$
$\approx 0{,}466$

</td><td></td><td>10</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>