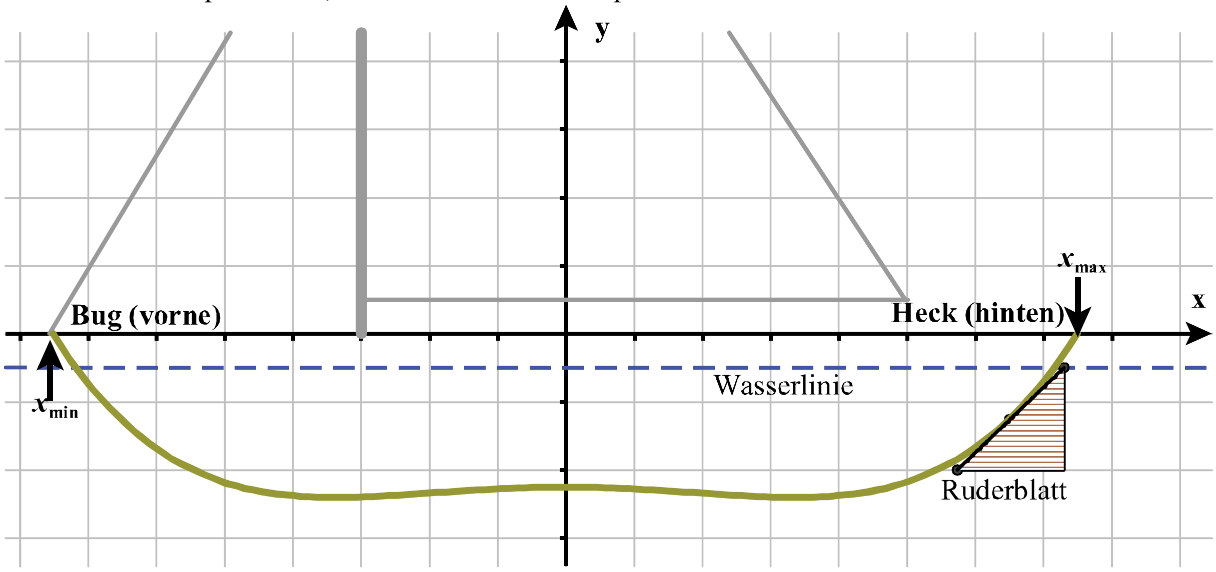
Analysis 1

I.1 Schiffsrumpf

Der Segler Piet Meyer möchte sich eine neue Jacht für das Hochseesegeln bauen lassen. Dazu trifft er sich mit seinem Schiffskonstrukteur, um dessen Entwurf für die Rumpfform von Meyers neuem Schiff zu diskutieren.
Der Konstrukteur stellt für die Seitenansicht des Schiffes die folgende Funktion f auf:

$$f(x) = \frac{1}{6750}x^4 - \frac{1}{75}x^2 - 4{,}5 \quad \text{für} \quad x \in [x_{min}; x_{max}] \text{ (siehe Skizze)}$$

Eine Einheit entspricht 1 m, eine Kästchenseite entspricht hier 2 m in der Realität.



a) • Bestätigen Sie, dass der Graph der Funktion f symmetrisch zur y-Achse ist.
   • Zeichnen Sie den Graphen von f in das beigefügte Koordinatensystem.
   • Geben Sie die Länge des Schiffes an. **(20P)**

   Hinweis: Das Deck des Schiffes liegt auf der x-Achse.

Der Rumpf eines Schiffes ist allerdings nicht komplett unter Wasser. Es ragt ein gewisser Teil aus dem Wasser heraus. Die Seitenansicht dieses Teils nennt man *Freibord*. Wir gehen davon aus, dass die Wasserlinie parallel zur oben eingezeichneten x-Achse liegt.

b) Bestimmen Sie den maximalen Tiefgang, wenn das Freibord um $h = 1\text{ m}$ über die Wasserlinie herausragt. **(20P)**

c) Zeigen Sie, dass in der Seitenansicht des Rumpfes eine Fläche von etwa 90 m² unterhalb der Wasserlinie liegt, wenn das Freibord wieder 1 m über die Wasserlinie hinausragt. **(25P)**

   Hinweis: Ersetzen Sie in Ihrer Gleichung x^2 durch z.

In dem Punkt $(13 \mid f(13))$ wird ein Ruderblatt in Form eines rechtwinkligen Dreiecks befestigt. Die Hypotenuse des Dreiecks soll dabei tangential zum Rumpf verlaufen, d.h. den Rumpf im angegebenen Befestigungspunkt berühren, und soll genau bis zur Wasserlinie reichen.

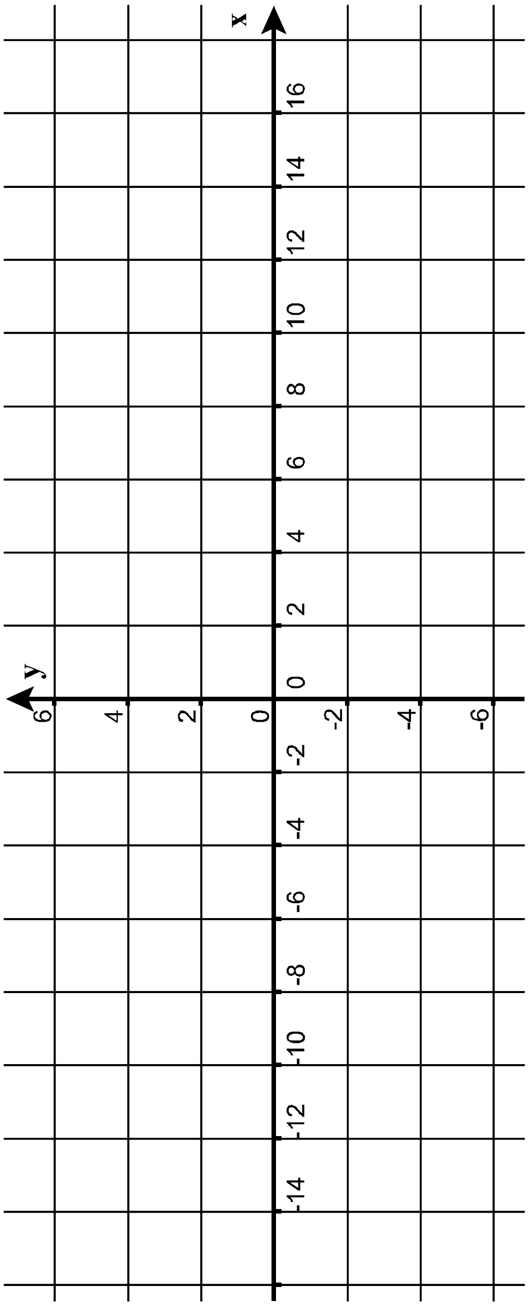
d)
- Zeigen Sie, dass die Gleichung dieser Tangente in guter Näherung $g(x) = 0{,}96x - 15$ lautet.
- Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangente mit der Wasserlinie und berechnen Sie die Fläche in der Seitenansicht des Ruderblattes, wenn das Ruderblatt 3 m hoch ist. **(25P)**

Die maximale Geschwindigkeit, die ein Schiff der obigen Bauart durch Windkraft erreichen kann, hängt von der Länge des Schiffes entlang der Wasserlinie ab. Eine Faustformel zur Berechnung der maximalen Geschwindigkeit v in km/h ist für ein Einrumpfschiff

$$v_E = 4{,}5 \cdot \sqrt{\text{Länge des Schiffes in m entlang der Wasserlinie}}$$

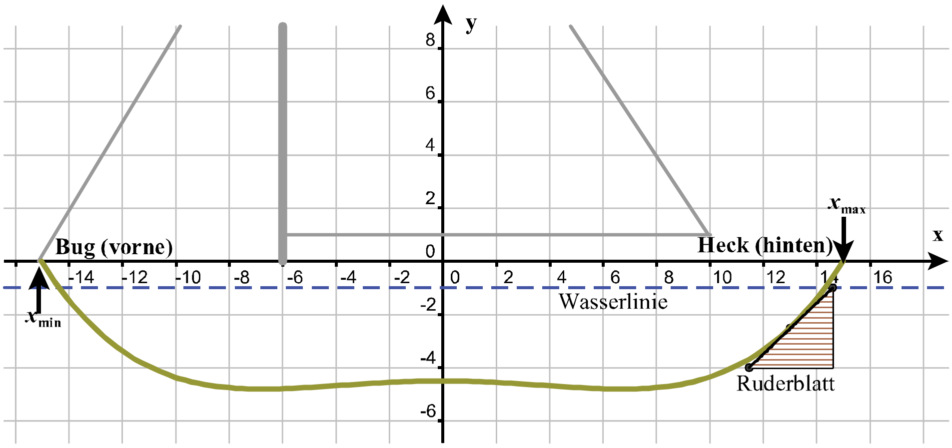
e) Berechnen Sie, wie schnell Herr Meyer mit der obigen Konstruktion eines Einrumpfschiffes maximal sein kann und wie lange er auf einer Regattastrecke von 500 Seemeilen mindestens unterwegs sein wird (1 Seemeile ≈ 1852 m). **(10P)**

Anlage zur Aufgabe „Schiffsrumpf“



(x und y in Meter)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Achsensymmetrie liegt vor, wenn $f(-x)=f(x)$ gilt. Da eine Funktion mit nur geraden Exponenten vorliegt, ist diese Bedingung erfüllt. • Graph:  • <u>Angabe der Grenzen</u>: Aus dem Graphen entnimmt man eine Länge des Schiffes von 30 m. *Hinweis: Wegen des Operators „angeben" ist keine Rechnung nötig, möglich ist z.B.:* Es sind die Lösungen für die biquadratische Gleichung $f(x)=0$ zu suchen. Es sei $z:=x^2$ und damit $\frac{1}{6750}z^2-\frac{1}{75}z-4{,}5=0$. Hieraus erhält man die Lösungen $z_1=225$ und $z_2=-135$. Damit ergibt sich $x_{max}=15$ und $x_{min}=-15$. Und das Schiff ist $2\cdot 15\text{ m}=30\text{ m}$ lang.	15	5	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>Ermittlung der Tiefpunkte (diese bestimmen den maximalen Tiefgang):
Die volle Punktzahl kann ebenfalls erreicht werden, wenn über die Wertetabelle argumentiert wird.
Es ist $f'(x)=\frac{2}{3375}x^3-\frac{2}{75}x$
Notwendige Bedingung:
$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{3375}x^3-\frac{2}{75}x=0 \Leftrightarrow x\left(\frac{2}{3375}x^2-\frac{2}{75}\right)=0$
Dies ist der Fall für $x_1=0$ sowie $x_2=\sqrt{45}$ und $x_3=-\sqrt{45}$.
Der Graph zeigt, dass bei x_1 ein relatives Maximum vorliegt, bei x_2 und x_3 jeweils ein Minimum.
Es kann auch mit der zweiten Ableitung argumentiert werden.
Es sind damit $(\sqrt{45}\,|-4{,}8)$ sowie $(-\sqrt{45}\,|-4{,}8)$ die gesuchten Tiefpunkte.
Da das Schiff 1 m aus dem Wasser herausragt, hat es einen maximalen Tiefgang von 3,8 m.</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Da die gesuchte Fläche oben mit der Wasserlinie begrenzt wird, wäre zunächst die Gleichung $f(x)=-1$, also $\frac{1}{6750}x^4-\frac{1}{75}x^2-3{,}5=0$ zu lösen:
Ersetzt man x^4 durch z^2 und x^2 durch z und multipliziert die Gleichung mit 6750, so ist dann $z^2-90z-23625=0$ zu lösen.
Es ergeben sich für z die Lösungen $z_1\approx 205{,}16$ und $z_2\approx -115{,}16$.
Da $z=x^2$, kann z_2 nicht verwendet werden.
Damit ist $x_1\approx 14{,}32$ und $x_2\approx -14{,}32$ (was auch aus Symmetriegründen gilt).
Es ist für die Längsschnittsfläche das Integral $A=\int_{-14{,}32}^{14{,}32}(-1-f(x))dx$ zu lösen.
Aus Symmetriegründen kann man ebenfalls rechnen:
$A=2\cdot\left(\int_0^{14{,}32}(-1-f(x))dx\right)$
$=2\cdot\left(\int_0^{14{,}32}\left(-\frac{1}{6750}x^4+\frac{1}{75}x^2+3{,}5\right)dx\right)$
$=2\cdot\left(\left[-\frac{1}{33750}x^5+\frac{1}{225}x^3+3{,}5x\right]_0^{14{,}32}\right)$
$\approx 90{,}66$
Die Längsschnittsfläche ist damit etwa 90 m² groß.</td><td></td><td>15</td><td>10</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>• <u>Tangentengleichung</u>: Es ist g von der Form $g(x) = mx + b$.
Dann ist die Steigung $m = f'(13) \approx 0{,}96$.

Man hat des weiteren die Gleichheit $g(13) = f(13) \approx -2{,}52$. Damit erhält man $-2{,}52 = 0{,}96 \cdot 13 + b$ und $b = -15$.

Somit ist $g(x) = 0{,}96x - 15$.

• <u>Schnittpunkt mit der Wasserlinie</u>: Es ist die Gleichung $0{,}96x - 15 = -1$ zu lösen. Es ist hierbei $x \approx 14{,}6$. Also $S(14{,}6 \mid -1)$.

<u>Fläche des Ruderblattes</u>: Man benötigt neben der Höhe des Ruderblattes noch die Breite. Für diese berechnet man zunächst den Schnittpunkt der Tangentengleichung mit der Tiefenlinie von –4 m. Es ist
$0{,}96x - 15 = -4 \Leftrightarrow x \approx 11{,}5$.

Die Breite ergibt sich dann zu $14{,}6 - 11{,}5 = 3{,}1$. Die Ruderblattfläche ist dann $A_R = \frac{3 \cdot 3{,}1}{2} \approx 4{,}7\ \text{m}^2$ groß.

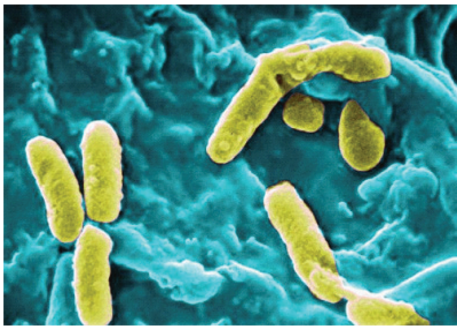
Alternative Berechnungen sind möglich.</td><td></td><td>15</td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Nach Teilaufgabe c) ist die Länge des Schiffes entlang der Wasserlinie
etwa $2 \cdot 14{,}32 = 28{,}64$.

Die gegebene Formel ergibt: $v_{\max} = 4{,}5\sqrt{28{,}64} \approx 24{,}08$,
das Schiff ist also maximal $24{,}08\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ schnell.

Damit wird für eine Regattastrecke von 500 Seemeilen (≈ 926 km) mindestens die Zeit $t = \frac{s}{v_E} = \frac{926}{24{,}08} = 38{,}4..$, also circa 40 Stunden benötigt.</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

Analysis 2

I.2 Bakterieninfektion



Die meisten Infektionen verlaufen in der Regel harmlos und so gut wie unbemerkt.
Das Immunsystem mit seinen körpereigenen Abwehrkräften sorgt dafür, dass Bakterien, die etwa über die Atemwege eindringen, schon nach wenigen Stunden erfolgreich bekämpft sind.

Für eine bestimmte leichte Infektion entwickelt sich die Bakterienanzahl unbehandelt gemäß der Funktion

$$f(t) = 75 \cdot e^{0{,}076 \cdot t - 0{,}002 \cdot t^2} \text{ mit } t \geq 0,$$

wobei t in Stunden gemessen wird.

a)
- Geben Sie den Anfangsbestand der Bakterienkultur an.
- Zeigen Sie, dass f keine Nullstelle besitzt, dafür aber langfristig gegen Null geht, und interpretieren Sie diesen Sachverhalt im Kontext der Aufgabe.
- Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem rechnerisch noch genau ein Bakterium vorhanden ist. **(25P)**

b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die maximale Anzahl der Bakterien erreicht ist, und geben Sie diese maximale Anzahl an. **(20P)**

c) Zeichnen Sie den Graphen von f in das beigefügte Koordinatensystem. **(10P)**

d)
- Bestätigen Sie, dass nach etwa 3 Stunden die Wachstumsgeschwindigkeit maximal ist.
- Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Bestand am schnellsten abnimmt, und geben Sie die Wachstumsgeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt an. **(20P)**

Kontrollergebnisse:
$f'(t) = (5{,}7 - 0{,}3t) \cdot e^{0{,}076 \cdot t - 0{,}002 \cdot t^2}$, $f''(t) = \left(0{,}0012t^2 - 0{,}0456t + 0{,}1332\right) \cdot e^{0{,}076t - 0{,}002t^2}$

Zu- und Abnahme der Bakterienanzahl werden durch den Exponenten $0{,}076 \cdot t - 0{,}002 \cdot t^2$ im Funktionsterm festgelegt.

e) Begründen Sie, warum der Faktor 0,002 gelegentlich auch als *Immunfaktor* und der Faktor 0,076 auch als *Infektionsfaktor* bezeichnet werden. **(10P)**

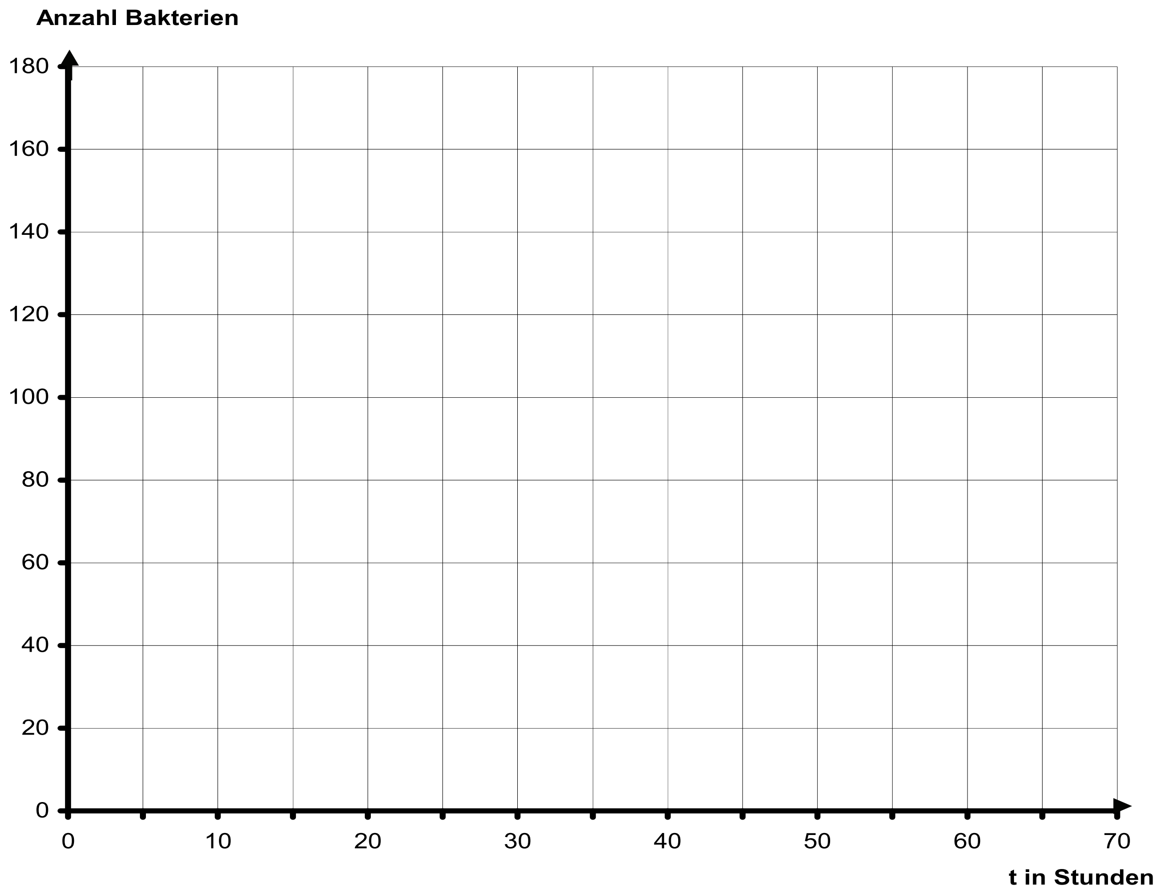
Es heißt, man könne durch viel frisches Obst und Vitamine das Immunsystem unterstützen, um so die Bakterien schneller bekämpfen zu können und damit den Immunfaktor zu erhöhen.
Um das zu überprüfen, ist bei einer Person, die zusätzlich in der kalten Jahreszeit Vitamine zu sich genommen hat, eine Messung der Bakterienanzahl vorgenommen worden.

Zeit t in Stunden	0	20	30
Bakterienanzahl	75	46	8

Dabei wird das Wachstum – ähnlich wie oben – modelliert durch den Term: $g(t) = 75 \cdot e^{0{,}076 \cdot t - c \cdot t^2}$.

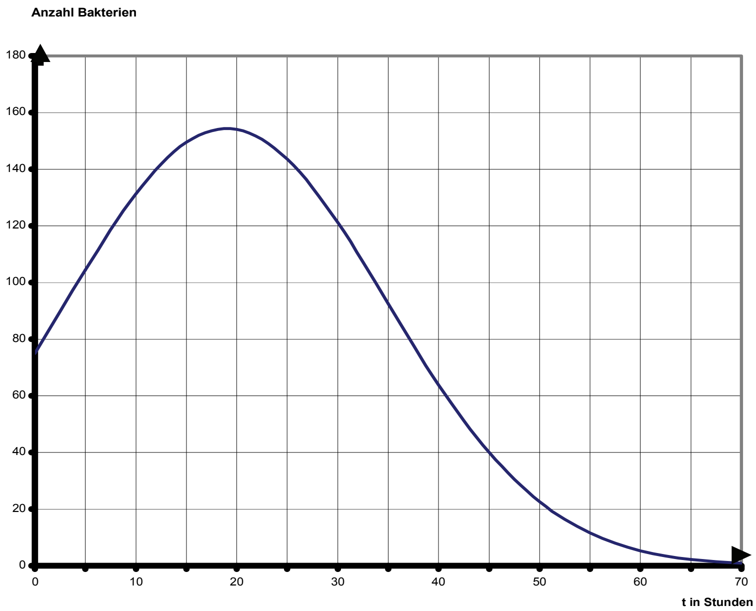
f) Bestimmen Sie durch einen geeigneten Messpunkt einen auf drei Nachkommastellen gerundeten Näherungswert für c und bestätigen Sie seine Gültigkeit auch für die anderen Messpunkte. **(15P)**

Anlage zur Aufgabe „Bakterieninfektion“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Der Anfangsbestand ergibt sich für $t=0$, also: $f(0)=75\cdot 1=75$ Bakterien. • Da die e-Funktion keine Nullstelle besitzt, hat auch f keine Nullstelle. Durch Einsetzen immer größerer Werte für t erhält man Funktionswerte, die immer stärker gegen Null gehen, so dass $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=0$. Das bedeutet im Kontext der Aufgabe, dass die Bakterien vom Immunsystem bekämpft sind. Irgendwann sinkt der Bestand unter 1. • Der Zeitpunkt zu dem genau ein Bakterium existiert, ergibt sich aus der Gleichung: $f(t)=1$, also: $75\cdot e^{0{,}076t-0{,}002t^2}=1 \Leftrightarrow e^{0{,}076t-0{,}002t^2}=\frac{1}{75} \Leftrightarrow 0{,}076t-0{,}002t^2=-\ln(75)$. Daraus ergibt sich die quadratische Gleichung: $0{,}002t^2-0{,}076t-\ln(75)=0$. Die Nullstellen sind: $t\approx -31{,}1971$ und $t\approx 69{,}1971$. Nach ca. 69 Stunden existiert nur noch ein Bakterium.	15	10	
b)	Die maximale Anzahl meint das Maximum der Funktion: $f'(t)=75(0{,}076-0{,}004t)e^{0{,}076t-0{,}002\cdot t^2}=(5{,}7-0{,}3t)e^{0{,}076t-0{,}002\cdot t^2}=0$, woraus sich $t=19$ ergibt. Aus $f''(t)=(0{,}0012t^2-0{,}0456t+0{,}1332)e^{0{,}076t-0{,}002\cdot t^2}$ zu $f''(19)=-0{,}3\cdot e^{0{,}722}\approx -0{,}62<0$ oder einer geeigneten verbalen Begründung und $f(19)=75\cdot e^{0{,}722}\approx 154{,}4$ ergibt sich: $\left(19 \mid 75\cdot e^{0{,}722}\right)$ ist ein Hochpunkt. Die maximale Bakterienanzahl beträgt damit 155, der Zeitpunkt ist nach 19 Stunden erreicht.	5	15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>
</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit ergibt sich aus dem Wendepunkt der Funktion.
Aus $f''(t) = \left(0{,}0012t^2 - 0{,}0456t + 0{,}1332\right) \cdot e^{0{,}076t - 0{,}002t^2}$,
folgt $0{,}0012t^2 - 0{,}0456t + 0{,}1332 = 0$. Also: $t_1 = 19 - \sqrt{250} \approx 3{,}2$ und
$t_2 = 19 + \sqrt{250} \approx 34{,}8$.

Der Betrag der Tangentensteigungen ist für beide Wendepunkte gleich, am Wendepunkt an der Stelle 3,2 (also nach etwa 3 Stunden) ist die Steigung positiv, an der Stelle 34,8 negativ (siehe z.B. Skizze). Das bedeutet, dass der Bestand am linken Wendepunkt maximal wächst, am rechten Wendepunkt mit der entsprechenden maximalen Geschwindigkeit abnimmt.

(Andere Begründungen sind ebenfalls anzuerkennen.)

Als *Wachstumsgeschwindigkeit* ergibt sich beim rechten Wendepunkt $W_2(34{,}8|93{,}7)$:
$f'(t_2) \approx (5{,}7 - 0{,}3 \cdot 34{,}8)e^{0{,}076 \cdot 34{,}8 - 0{,}002 \cdot (34{,}8)^2} \approx -5{,}92$
mit der Einheit Bakterien pro Stunde.</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>*Anstieg* heißt im Modell Vermehrung der Bakterien, reguliert durch den Term $0{,}076 \cdot t$, dies macht die Bezeichnung *Infektionsfaktor* sinnvoll.

Abfallen hingegen bedeutet im Modell Absterben der Bakterien durch das Immunsystem und wird durch den Term $-0{,}002 \cdot t^2$ beherrscht, was die Bezeichnung *Immunfaktor* plausibel macht.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)	Zu dem Messpunkt (20 | 46) gehört die Gleichung: $g(20) = 75 \cdot e^{0,076 \cdot 20 - c \cdot 400} \overset{!}{=} 46 \Leftrightarrow e^{1,52 - c \cdot 400} = 0,6133 \Leftrightarrow 1,52 - 400c = \ln(0,6133)$ $\Leftrightarrow c = \frac{1,52 - \ln(0,6133)}{400} \approx 0,005$ Damit ergibt sich $g(t) = 75 \cdot e^{0,076 \cdot t - 0,005 \cdot t^2}$. Einsetzen liefert: $g(0) = 75$, $g(20) \approx 46,41$, $g(30) \approx 8,15$. Damit sind alle drei Messpunkte bestätigt.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA/AG 1

II.1 Spaßbad

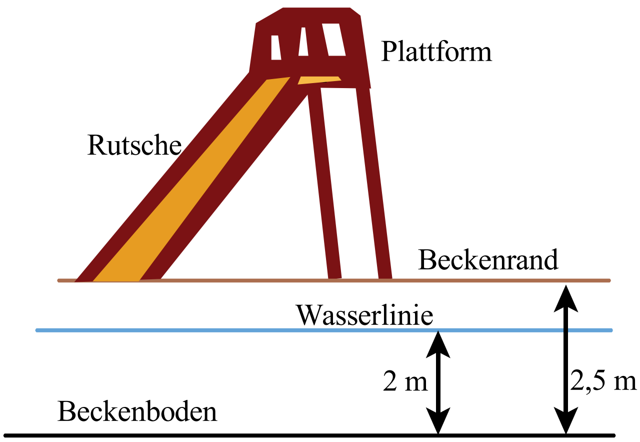
Betrachten Sie ein Schwimmbecken mit 2 m Wassertiefe und einer Beckenrandhöhe <u>oberhalb</u> der Wasserlinie von 0,50 m (siehe nebenstehende Abbildung).

In 4,5 m Höhe über dem Beckenrand befindet sich eine waagerechte viereckige Plattform *ABCD*, von der eine Rutsche abgeht.

Die Eckpunkte *A*, *B* und *C* der Plattform haben die Koordinaten

$A\,(12|12|h)$, $B(20|13|h)$ und
$C\,(19{,}5|17|h)$.

Im betrachteten Koordinatensystem (1 LE ≙ 1 m) hat der Beckenboden die Höhe $x_3 = 0$.



a) • Berechnen Sie die Höhenkoordinate *h* der Plattform.

• Bestätigen Sie, dass das Dreieck *ABC* ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel in *B* ist.

• Berechnen Sie die Koordinaten der vierten Ecke *D* der Plattform, wenn die Plattform rechteckig sein soll. **(20P)**

• Zeichnen Sie die Plattform in das beiliegende Koordinatensystem ein.

Die Plattform soll mit einer Antirutschmatte ausgelegt werden.

b) Berechnen Sie zu diesem Zweck den Flächeninhalt der Plattform. **(10P)**

Von der Plattform aus führt eine ebene rechteckige Rutsche *BFGE* in das Becken.
Die Rutsche beginnt mit der Startlinie $\overline{BE}$, wobei *E* Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist.

Die beiden Ränder $\overline{BF}$ und $\overline{EG}$ der Rutschfläche verlaufen senkrecht zur Plattformkante $\overline{AB}$ und enden in der Höhe $x_3 = 2{,}5$ (also in der Höhe des Beckenrandes). Der Punkt *F* hat außerdem die Koordinate $x_2 = 5$.

c) Berechnen Sie zunächst die Koordinaten von *E*. **(5P)**

d) Begründen Sie inhaltlich, warum die beiden Ränder der Rutsche senkrecht zur Plattformkante $\overline{AB}$ verlaufen sollten. **(10P)**

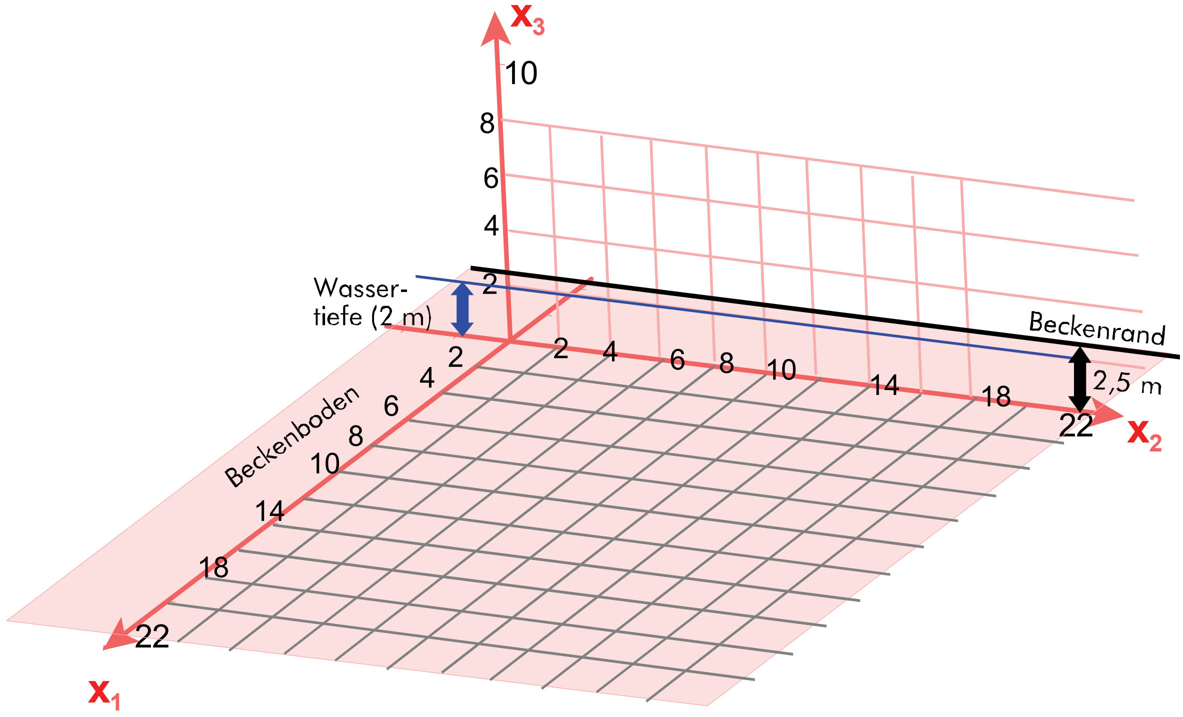
e) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte *F* und *G*.

Zur Kontrolle: F $(21|5|2{,}5)$ und G $(17|4{,}5|2{,}5)$ **(15P)**

f) Zeichnen Sie zusätzlich zur Plattform die betrachtete Rutschfläche in das beiliegende Koordinatensystem ein. **(20P)**

g) Ermitteln Sie den Neigungswinkel der Rutschfläche zur Wasseroberfläche des Beckens. **(20P)**

Anlage zur Aufgabe „Spaßbad“



Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

- <u>Höhenkoordinate</u>:
Die Höhenkoordinate h setzt sich zusammen aus der Beckenrandhöhe (2,5 m) und dem über den Beckenrand hinausgehenden Teil.
Daraus folgt nach dem Aufgabentext: $h = 2{,}5 + 4{,}5 = 7$.
Somit gilt : $A(12|12|7)$, $B(20|13|7)$ und $C(19{,}5|\ 17|\ 7)$.
- <u>Rechter Winkel bei B</u>:
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}20\\13\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}12\\12\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}19{,}5\\17\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}20\\13\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}5\\4\\0\end{pmatrix}$
Damit ist $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 8 \cdot (-0{,}5) + 1 \cdot 4 = 0$ und daher befindet sich bei B der rechte Winkel.
- <u>Herleitung des Punktes D</u>:
Um D zu berechnen geben wir hier zwei Wege an:
(i) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}19{,}5\\17\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-8\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11{,}5\\16\\7\end{pmatrix}$
(ii) $\vec{d} = \vec{c} + (\vec{a} - \vec{b}) =$
(19,5\|17\|7) + [(12\|12\|7)–(20\|13\|7)] = (19,5\|17\|7) + (–8\|–1\|0)
D hat die Koordinaten $D(11{,}5|16|7)$.

Hinweis: Punkte für die graphische Darstellung siehe f)</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\begin{pmatrix}8\\1\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix}-0{,}5\\4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0{,}25+16} = \sqrt{16{,}25}$.
Flächeninhalt der Plattform: $\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{65 \cdot 16{,}25} = 32{,}5\left(\mathrm{m}^2\right)$.
Die Plattform hat einen Flächeninhalt von 32,5 m².</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Koordinaten von E:
$\vec{e} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \frac{(32|25|14)}{2}$, also hat E die Koordinaten E (16\|12,5\|7).</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>Ein freier Bewegungsablauf führt zur kürzesten Verbindung.

Würden die beiden Ränder nicht senkrecht zur Plattform verlaufen, käme man beim Hinunterrutschen ständig mit den Seitenverkleidungen der Rutsche in Berührung.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td><u>Bestimmen der Koordinaten von F und G:</u>

Die Strecke $\overline{BF}$ soll senkrecht sein zur Strecke $\overline{AB}$:
Da die Koordinaten x_2 und x_3 von F bekannt sind, gilt

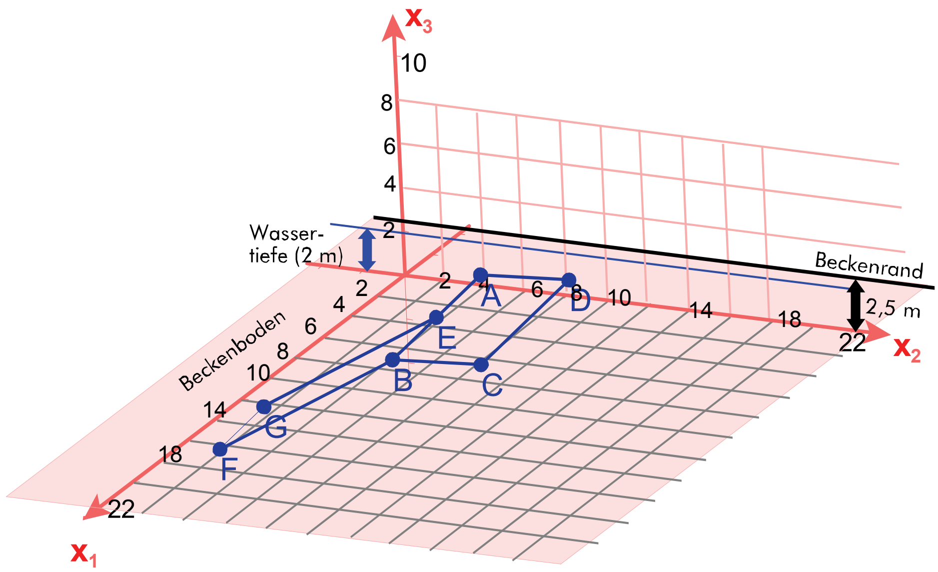
$\left(\vec{f}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\left((x\,|\,5\,|\,2{,}5)-(20\,|\,13\,|\,7)\right)\cdot\left((20\,|\,13\,|\,7)-(12\,|\,12\,|\,7)\right)=$

$(x-20\,|\,-8\,|\,-4{,}5)\cdot(8\,|\,1\,|\,0)=8x-160-8-0=8x-168$.

Das Skalarprodukt muss Null ergeben, also $8x-168=0$ und damit $x=21$.

$\rightarrow F\,(21|5|2{,}5)$

(i) Möglicher Ansatz zur Bestimmung von G:
$\vec{g}=\vec{e}+\vec{f}-\vec{b}$, also
$\vec{g}=(16|12{,}5|7)+(21|5|2{,}5)-(20|13|7)$
$\rightarrow G\,(17|4{,}5|2{,}5)$

(ii) Weiterer möglicher Lösungsweg:
$\vec{g}=\vec{b}+\left(\vec{e}-\vec{b}\right)+\left(\vec{f}-\vec{b}\right)$, also
$\vec{g}=(20|13|7)+((16|12{,}5|7)-(20|13|7))+((21|5|2{,}5)-(20|13|7))$
$\vec{g}=(20|13|7)+(-4|-0{,}5|0)+(1|-8|-4{,}5)=(17|4{,}5|2{,}5)$</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>a)
f)</td><td>
</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
g)	Sei E_1 die Ebene, in der die Rutsche liegt, und E_2 sei die Ebene der Wasseroberfläche, die parallel zur x_1-x_2-Ebene verläuft. Den gesuchte Schnittwinkel bekommt man über die Normalenvektoren der beiden Ebenen. Normalenvektor zu E_2 ist $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eine Parameterform der Ebene E_1 ist z.B. E_1: $\vec{x} = \overrightarrow{E} + \lambda \cdot \overrightarrow{EG} + \mu \cdot \overrightarrow{EB}$. Die Vektoren lauten: $\vec{e} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12,5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 \\ 12,5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -4,5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 20 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 \\ 12,5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $I \quad x_1 = 16 + 1 \cdot \lambda + 4 \cdot \mu$ $II \quad x_2 = 12,5 - 8 \cdot \lambda - 0,5 \cdot \mu$ $III \quad x_3 = 7 - 4,5 \cdot \lambda$ $I - 8 \cdot II = I' \quad x_1 - 8 \cdot x_2 = -84 + 65 \cdot \lambda + 0\mu$ $III = II' \quad x_3 = 7 - 4,5 \cdot \lambda$ $I' \cdot 4,5 + 65 \cdot II' \quad 4,5 \cdot x_1 - 36x_2 + 65 \times_3 = 77$ Damit ist $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 9 \\ -72 \\ 130 \end{pmatrix}$ Winkel zwischen den Normalenvektoren der beiden Ebenen: $\cos\alpha = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 9 \\ -72 \\ 130 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 9 \\ -72 \\ 130 \end{pmatrix} \right\|} \approx \frac{130}{148,9} \approx 0,873$ und damit $\alpha \approx 29,2°$. Ein Benutzer der Rutsche gleitet also im Winkel von fast 30° ins Wasser.			20
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA/AG 2

II.2 Fischzucht

Fischliebhaber haben einen Teich gepachtet, um Fische zu züchten. Sie haben sich über die Entwicklung der Fische informiert und Folgendes in Erfahrung gebracht:
Nur die Altfische **(A)** legen Eier, aus denen sich ein Teil im ersten Jahr zu Jungfischen **(J)** entwickelt. Jeder Altfisch erzeugt auf diesem Wege im Durchschnitt 45 Jungfische.
Aus 10 % der Jungfische werden im zweiten Jahr Fische mittleren Alters **(M)**, der Rest verstirbt oder wird gefressen.
Aus den Fischen mittleren Alters werden im darauf folgenden Jahr Altfische.

Die Überlebensrate der Fische mittleren Alters beträgt 20 %. Von den Altfischen überleben 50 % und verbleiben in ihrer Klasse.

Somit ergibt sich eine Übergangsmatrix folgender Form:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad \text{bezogen auf den Populationsvektor} \begin{bmatrix} J \\ M \\ A \end{bmatrix}$$

a) Geben Sie für den oben beschriebenen Sachverhalt die Übergangsmatrix A mit den entsprechenden Zahlenwerten an und zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen. **(15P)**

Die Züchter setzen im ersten Jahr 5000 Jungfische und 1000 Fische mittleren Alters aus.

b) Bestätigen Sie, dass der Bestand nach drei Jahren aus 9000 Jungfischen, 900 Fischen mittleren Alters und 100 Altfischen besteht. **(15P)**

Dieser Bestand (siehe Teilaufgabe b)) soll im Folgenden als Startpopulation gelten. Die Züchter beschließen, ab jetzt die Altfische nach der Eiablage abzufischen. Dies gilt für die folgenden Teilaufgaben, falls keine anderslautenden Angaben vorliegen.

Die zugehörige Übergangsmatrix hat die Form $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{bmatrix}$

Für eine Matrix dieser Form gilt: $B^3 = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_2 \cdot v & 0 & 0 \\ 0 & a_1 \cdot a_2 \cdot v & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \cdot a_2 \cdot v \end{bmatrix}$

c) • Ermitteln Sie B^3 für die Fischpopulation und bestimmen Sie mit deren Hilfe den Bestand nach 3, 6 und 18 Jahren.

• Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der langfristigen Entwicklung der Population. **(20P)**

d) Nach einigen Jahren befinden sich
3870 Jungfische,
215 Fische mittleren Alters und
86 Altfische
im Teich.
Ermitteln Sie die Vorjahrespopulation. **(10P)**

Die Fischzüchter möchten erreichen, dass der Bestand im 3-Jahres-Zyklus stabil bleibt. Hierzu soll die Vermehrungsrate v der Altfische gesteigert werden. Dies wollen die Züchter erreichen, indem sie einen Teil der Eiablage in einem geschützten Zuchtbecken verwahren, um mehr Jungfische zu erhalten.

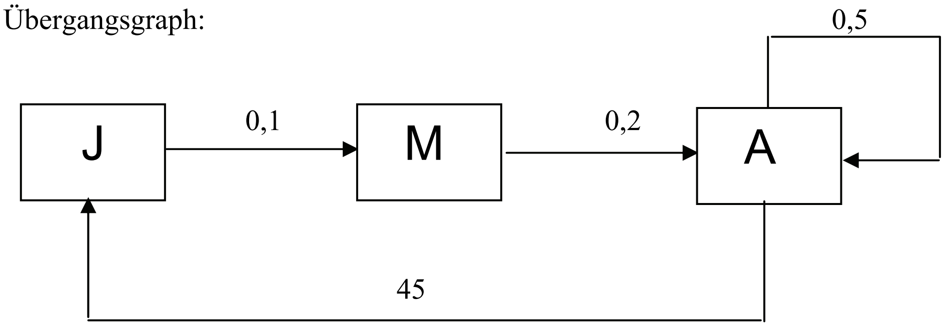
e) Ermitteln Sie, bei welcher Vermehrungsrate v die Startpopulation im 3-Jahres-Zyklus stabil bleiben würde. **(10P)**

Die Versuche mit dem Zuchtbecken wurden wieder eingestellt, weil sie aufwändig und von wenig Erfolg gekrönt waren. Die Fischzüchter würden nun gerne einen Bestand haben, der sich jährlich reproduzieren soll. Sie sind bereit, dafür auf das Abfischen eines Teils der Altfische zu verzichten. Ein erfahrener Züchter sagt ihnen, dass sie trotzdem 80 % der Altfische nach der Eiablage abfischen können, wenn sie eine geeignete Startpopulation haben.

f) Begründen Sie, dass die Überlebensrate der Altfische für die weiteren Berechnungen dann $a_3 = 0{,}1$ beträgt und geben Sie die neue Übergangsmatrix C an. **(10P)**

g) Zeigen Sie, dass es für die neue Übergangsmatrix C eine Population mit 9000 Jungfischen gibt, welche sich jährlich reproduzieren würde. **(20P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Übergangsmatrix: $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 45\\ 0{,}1 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5\end{bmatrix}$ Übergangsgraph: 	10	5	
b)	Anfangsbestand: $\vec{p}_0=\begin{bmatrix}5000\\ 1000\\ 0\end{bmatrix}$ $\vec{p}_1=A\cdot\vec{p}_0=\begin{bmatrix}0\\ 500\\ 200\end{bmatrix}$, $\vec{p}_2=A\cdot\vec{p}_1=\begin{bmatrix}9000\\ 0\\ 200\end{bmatrix}$, $\vec{p}_3=A\cdot\vec{p}_2=\begin{bmatrix}9000\\ 900\\ 100\end{bmatrix}$ Nach drei Jahren existieren 9000 Jungfische, 900 Fische mittleren Alters und 100 Altfische.	15		
c)	Form der 3. Potenz gegeben: $a_1\cdot a_2\cdot v=0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 45=0{,}9\ \Rightarrow\ B^3=0{,}9\cdot E$. Eine aufwändigere Lösung wäre, B^3 wie folgt zu berechnen: $B\cdot B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 45\\ 0{,}1 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & 45\\ 0{,}1 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 4{,}5\\ 0{,}02 & 0 & 0\end{bmatrix}=B^2$ $B\cdot B^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 45\\ 0{,}1 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 4{,}5\\ 0{,}02 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}9 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}9 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}9\end{bmatrix}=B^3=0{,}9\cdot E$ $\vec{p}_3=B^3\cdot\vec{p}_0=0{,}9\cdot E\cdot\vec{p}_0=\begin{bmatrix}8100\\ 810\\ 90\end{bmatrix}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	$\vec{p}_6 = B^6 \cdot \vec{p}_0 = \left(B^3\right)^2 \cdot \vec{p}_0 = 0{,}9^2 \cdot E \cdot \vec{p}_0 = 0{,}81 \cdot E \cdot \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} 7290 \\ 729 \\ 81 \end{bmatrix}$ $\vec{p}_{18} = B^{18} \cdot \vec{p}_0 = \left(B^3\right)^6 \cdot \vec{p}_0 = 0{,}9^6 \cdot E \cdot \vec{p}_0 = 0{,}5314 \cdot E \cdot \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} 4783 \\ 478 \\ 53 \end{bmatrix}$ Leichte Abweichungen bei der letzten Lösung können durch Rundungen entstehen. Interpretation der Lösungen: Die Population stirbt aus, da sie im 3-Jahres-Zyklus um 10 % abnimmt, bzw. $0{,}9^n$ konvergiert gegen 0.		10	10
d)	Ansatz: $\vec{P}_{aktuell} = B \cdot \vec{P}_{Vorjahr}$ $\begin{bmatrix} 3870 \\ 215 \\ 86 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 45 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ I Anzahl der Altfische: $45x_3 = 3870 \Rightarrow x_3 = 86$ III Anzahl der Fische mittleren Alters: $0{,}2\, x_2 = 86 \Rightarrow x_2 = 430$ II Anzahl der Jungfische: $0{,}1\, x_1 = 215 \Rightarrow x_1 = 2150$.		10	
e)	<u>Lösungsvariante 1:</u> Für eine Matrix, die im 3-Jahres-Zyklus stabil bleibt gilt: $a_1 \cdot a_2 \cdot v = 1$ und damit $v = \dfrac{1}{a_1 \cdot a_2} = \dfrac{1}{0{,}1 \cdot 0{,}2} = 50$. Bei einer Vermehrungsrate von 50 Jungfischen pro Altfisch würde der Bestand im 3-Jahres-Zyklus stabil bleiben. <u>Lösungsvariante 2:</u> Mit $a_1 = 0{,}1$ und $a_2 = 0{,}2$ gilt: $\begin{bmatrix} 0{,}02 \cdot v & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}02 \cdot v & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}02 \cdot v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5000 \\ 1000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 1000 \\ 0 \end{bmatrix}$ $I: \quad 100 \cdot v = 5000 \quad \Rightarrow \quad v = 50$ $II: \quad 20 \cdot v = 1000 \quad \Rightarrow \quad v = 50$ $III: \quad 0 = 0$		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)	Wenn von den überlebenden Altfischen 80 % abgefischt werden, so verbleiben 20 %, von denen – wie bekannt – 50 % überleben. Also überleben 10 % der ursprünglichen Altfische. Damit lautet $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 45 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix}$.	5	5	
g)	$\vec{p}_0 = C \cdot \vec{p}_0$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 45 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9000 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9000 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 45x_3 = 9000 \\ 900 = x_2 \\ 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = x_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = 200 \\ x_2 = 900 \\ 0{,}2x_2 - 0{,}9x_3 = 0 \end{matrix}$ Somit ergibt sich eine Startpopulation von $p_0 = \begin{bmatrix} 9000 \\ 900 \\ 200 \end{bmatrix}$. Es müssen also einmalig noch 100 Altfische zusätzlich ausgesetzt werden, um eine sich jährlich reproduzierende Startpopulation zu erhalten. *Andere Lösungsvarianten sind denkbar.*		10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

STOCHASTIK 1

III.1 Achtung! Fahrkartenkontrolle!

Die Erfahrung zeigt, dass in Großstädten ca. 5 % der Fahrgäste in U-Bahn, S-Bahn und Bus keine Fahrkarte gekauft haben, also so genannte Schwarzfahrer sind.

Es werden 30 Fahrgäste unabhängig voneinander kontrolliert.

Für die zufällige Anzahl der angetroffenen Schwarzfahrer verwenden Sie bitte die Binomialverteilung.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

E_1: Unter den 30 Fahrgästen befindet sich kein Schwarzfahrer.

E_2: Unter den 30 Fahrgästen befindet sich mindestens ein Schwarzfahrer.

E_3: Bei der Kontrolle trifft der Kontrolleur auf mehr als drei Schwarzfahrer.

E_4: Bei der Kontrolle trifft der Kontrolleur auf weniger als fünf Schwarzfahrer.

E_5: Frühestens bei der 20. und spätestens bei der 30. Kontrolle wird mindestens ein Schwarzfahrer aufgespürt. **(30P)**

Ein Kontrolleur führt am Tag etwa 400 Kontrollen durch.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Schwarzfahrer, auf die er treffen wird. **(5P)**

c) Ermitteln Sie die Anzahl der Fahrgäste, die der Kontrolleur mindestens überprüfen müsste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens einen Schwarzfahrer anzutreffen. **(10P)**

Am Hauptbahnhof führt der Verkehrsverbund regelmäßig ganztägige Kontrollen durch, bei denen jeder Fahrgast kontrolliert wird, der dort ein-, aus- oder umsteigt. Der Einsatzplan wird dabei so gestaltet, dass im Jahresdurchschnitt alle fünf Wochen eine Kontrolle durchgeführt wird, wobei nur an Arbeitstagen (Montag bis Freitag) kontrolliert wird.
Ein notorischer Schwarzfahrer, der an jedem Arbeitstag auf der Hinfahrt am Hauptbahnhof umsteigen muss (auf der Rückfahrt wird er von einem Arbeitskollegen im PKW mitgenommen), spart immer die Fahrkarte für 2,50 € und zahlt, wenn er erwischt wird, das erhöhte Beförderungsentgelt von 50 €.

d)
- Begründen Sie, dass es sich für diesen Schwarzfahrer auf Dauer zumindest finanziell lohnen würde, ohne gültigen Fahrausweis zu fahren. (Eine mögliche Strafanzeige bei wiederholtem Schwarzfahren soll nicht berücksichtigt werden.)
- Bestimmen Sie, wie oft mindestens kontrolliert werden müsste, damit dieser Schwarzfahrer auf Dauer kein Geld spart. **(20P)**

Ein Kontrolleur kostet den Verkehrsverbund pro Achtstundenschicht durchschnittlich 100 € und kontrolliert am Hauptbahnhof in dieser Zeit erfahrungsgemäß 400 Fahrgäste. An einem Kontrolltag werden 80 Kontrolleure eingesetzt, die alle am Hauptbahnhof an diesem Tag ein-, aus- oder umsteigenden Fahrgäste kontrollieren.
An einem Kontrolltag werden 1520 Schwarzfahrer erwischt.

e)
- Berechnen Sie, ob sich der Einsatz der Kontrolleure an diesem Tag finanziell für die Verkehrsgesellschaft gelohnt hat.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 32000 kontrollierten Fahrgästen höchstens 1520 keinen Fahrschein haben, wenn man wieder mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % rechnet, dass ein Fahrgast Schwarzfahrer ist.
- Interpretieren Sie das Ergebnis. **(20P)**

f) Ein Schwarzfahrer, der bei einer Kontrolle entdeckt worden ist, entlädt seinen Ärger in Beschwerden über die Unzuverlässigkeit der Bahn. Er sagt, wenn die Bahn pünktlicher und zuverlässiger wäre, würde es auch nicht so viele Schwarzfahrer geben. Der Kontrolleur entgegnet, die Bahn sei in der Regel pünktlich. Er verweist darauf, dass die sorgfältig geführten Statistiken der Bahn besagen, dass es lediglich in 2 % aller Fälle zu Unregelmäßigkeiten komme. Der Schwarzfahrer wirft ein, das sei ja wohl Unsinn, da es allein bei seinen letzten 50 Fahrten mindestens dreimal zu Unregelmäßigkeiten gekommen sei.

Beurteilen Sie diesen Streit mit Hilfe der Berechnung geeigneter Wahrscheinlichkeiten. **(15P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	$P(E_1)=0{,}95^{30}\approx 0{,}2146$, $P(E_2)=1-P(E_1)=1-0{,}95^{30}\approx 0{,}7854$, $P(E_3)=1-P(X\le 3)$ $=1-0{,}95^{30}-30\cdot 0{,}95^{29}\cdot 0{,}05-\binom{30}{2}\cdot 0{,}95^{28}\cdot 0{,}05^2-\binom{30}{3}\cdot 0{,}95^{27}\cdot 0{,}05^3$ $\approx 0{,}0608$ $P(E_4)=P(X\le 4)$ $=\binom{30}{0}\cdot 0{,}95^{30}+\binom{30}{1}\cdot 0{,}95^{29}\cdot 0{,}05$ $+\binom{30}{2}\cdot 0{,}95^{28}\cdot 0{,}05^2+\binom{30}{3}\cdot 0{,}95^{27}\cdot 0{,}05^3$ $+\binom{30}{4}\cdot 0{,}95^{26}\cdot 0{,}05^4$ $\approx 0{,}9844$ Das Ereignis E_5 kann auch so formuliert werden: Die Kontrollen 1 bis 19 ergeben keinen Schwarzfahrer, und die Kontrollen 20 bis 30 mindestens einen. Die Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Teilereignisse müssen miteinander multipliziert werden. $P(E_5)=0{,}95^{19}\cdot\left(1-0{,}95^{11}\right)\approx 0{,}1627$	10	20	
b)	$E=n\cdot p=400\cdot 0{,}05=20$.	5		
c)	Die Wahrscheinlichkeit, unter n Fahrgästen mindestens einen Schwarzfahrer anzutreffen, beträgt: $1-0{,}95^n$. Somit erhalten wir die Ungleichung: $1-0{,}95^n\ge 0{,}90$. Umformungen liefern $0{,}1\ge 0{,}95^n$ $\log 0{,}1\ge n\cdot\log 0{,}95$ $\frac{\log 0{,}1}{\log 0{,}95}\le n$ $n\ge 44{,}89$. Der Kontrolleur müsste somit mindestens 45 Fahrgäste überprüfen.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	Wir ermitteln den Erwartungswert $E(F)$ der Fahrkosten, den ein regelmäßiger Schwarzfahrer hat. Die Kontrolle ein Mal in fünf Wochen bedeutet eine Kontrollwahrscheinlichkeit von 0,04. Also: $E(F) = 50€ \cdot 0{,}04 = 2$ € . Der Schwarzfahrer „spart“ also im Mittel pro Fahrt 0,5 €. Es muss für den Grenzfall die folgende Gleichung gelten. $50 \cdot p = 2{,}5$ $p = 0{,}05$ Die Wahrscheinlichkeit einer Kontrolle sollte also größer sein, es müsste mindestens alle vier Wochen kontrolliert werden.	5	15	
e)	Der Einsatz hat 8 000 € gekostet und 76 000 € Einnahmen erbracht. Der Einsatz war also lohnend. Bei diesen Größen kann hier nur mit der Normalverteilung genähert werden. Der Erwartungswert beträgt 1600. Die Varianz beträgt 1520, die Streuung also: $V = \sqrt{1520} \approx 38{,}99$. Damit liegt der tatsächliche Wert um die $\frac{80}{\sqrt{1520}} \approx 2{,}05$ -fache Streuung unterhalb des Erwartungswertes. Aus dem Tafelwerk ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(X \le 1520) = \Phi(-2{,}05) = 1 - \Phi(2{,}05) \approx 1 - 0{,}9798 \approx 2\%$. <u>*Oder formalistischer gerechnet:*</u> $P(X \le 1520) = P\left(\frac{X - 1600 + 0{,}5}{38{,}99} \le \frac{1520 - 1600 + 0{,}5}{38{,}99}\right)$ $\approx \phi(-12{,}30) \approx 2\%$ *Ob die Schüler mit dem Korrektursummanden – also mit 79,5 statt mit 80 – rechnen, soll keinen Einfluss auf die Punktzahl haben.* *Man kann dieses Ergebnis auch so lesen, dass die Nullhypothese, dass 5 % oder mehr Fahrgäste schwarzfahren, auf einem Signifikanzniveau von ca. 2 % abgelehnt werden kann, auch wenn es problematisch ist, im Nachhinein Alternativhypothesen und ein Signifikanzniveau festzulegen.* <u>*Bemerkung:*</u> *Schülerantworten können hier natürlich sehr unterschiedlich ausfallen. Wesentlich ist, dass das Ergebnis Zweifel an der bisherigen Annahme, dass 5% der Fahrgäste schwarzfahren, statistisch begründet. Vermutlich ist die Quote geringer.*	10		10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Grundsätzlich widerlegen die Erfahrungen eines einzelnen Fahrers nicht die Ergebnisse langfristiger statistischer Ermittlungen, die in diesem Fall besagen, dass Unregelmäßigkeiten eine Wahrscheinlichkeit von 0,02 aufweisen. Man könnte aber versuchen, das (behauptete) Ergebnis des Fahrgastes im Nachhinein zur Ablehnung der Behauptung der Bahn (als Nullhypothese) zu verwenden: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrgast bei 50 Fahrten mindestens drei Unregelmäßigkeiten erlebt, beträgt $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0{,}9216 = 0{,}0784 > 5\ \%$. Diese Rechnung besagt, dass die Erfahrungen des Fahrgastes nicht als signifikantes Ergebnis (nicht mal auf dem 5 %-Niveau) gegen die Behauptung der Bahn angesehen werden kann. Man kann sie allenfalls als ein Indiz gegen die Behauptung der Bahn deuten.			15
	Insgesamt 100 BWE	30	45	25

STOCHASTIK 2

III.2 Umfrage

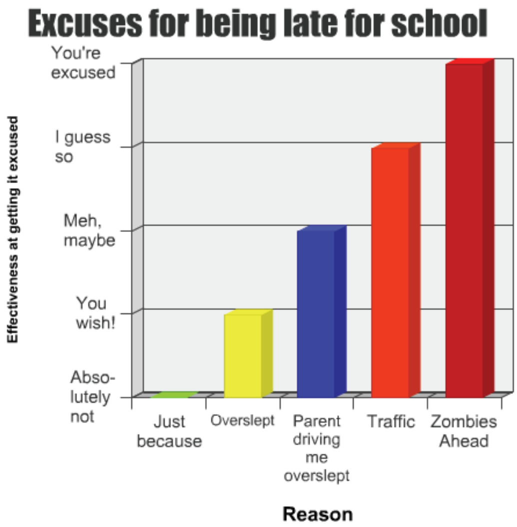
Auf einem Tutandentreffen wird von dem Tutor und seinen Tutanden – 5 Jungen und 5 Mädchen – das leidige Thema der Verspätungen diskutiert.

Anlass ist ein Zeitungsartikel, in dem steht, dass aufgrund einer Umfrage unter Schülerinnen und Schülern 70 % der männlichen Oberstufenschüler mehr als einmal im Schuljahr zu spät kommen.

Kann man so etwas überhaupt mit einer Umfrage herausfinden?

Die Schüler geben zu bedenken, sie würden wohl nicht ehrlich antworten.

Klar ist, dass man unterschiedlich vorgehen sollte, je nachdem, ob man die Jungen dieser Kleingruppe fragt oder ob man eine große Umfrage startet.



Für die große Umfrage wird ein in der Statistik für die Untersuchung heikler Ja-Nein-Fragestellungen bekanntes Verfahren diskutiert, das Anonymität sichern soll: Jede befragte Person führt dabei – bevor sie auf die eigentliche Frage antwortet – zunächst ein Bernoulli-Zufalls-Experiment durch. Je nach Ausgang dieses Experimentes antwortet die befragte Person auf die eigentliche Frage wahrheitsgemäß oder sie lügt. Außer ihr weiß dann niemand, ob sie die Wahrheit gesagt hat oder nicht.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Person wahrheitsgemäß antworten soll, nennen wir hier W-Wahrscheinlichkeit, die Wahrscheinlichkeit, dass sie lügen soll, nennen wir entsprechend L-Wahrscheinlichkeit.
In unserem Fall lautet die eigentliche Frage: „Kommst du häufiger als einmal im Schuljahr zu spät?“ Dann wird verdeckt eine Kugel aus einer Urne mit insgesamt vier Kugeln gezogen, wobei eine der Kugeln mit einem L und die drei übrigen mit einem W beschriftet sind. Ist es eine Kugel mit L, so soll er bei der Antwort lügen, ist es eine Kugel mit W, so soll er die Wahrheit sagen.
Die W-Wahrscheinlichkeit beträgt hier also 75 % .
Damit ist eine Form von Anonymität gewahrt, und man kann hoffen, dass sich alle Befragten an die Spielregel halten. Auf die gestellte Frage würden nämlich zwei Gruppen mit „JA“ antworten: von den 75 %, die die Wahrheit sagen, antworten die Zuspätkommer mit JA und von den 25 %, die lügen, antworten die Pünktlichen mit „JA“. Die anderen Befragten antworten mit „NEIN“.

a) Nehmen Sie nun an, dass der eingangs erwähnte Zeitungsartikel zutreffend ist, und bestimmen Sie mit einem Baumdiagramm oder einer Vierfeldertafel, mit welcher Prozentzahl an „JA“-Antworten man unter diesen Annahmen rechnen kann. **(20P)**

Bei der praktischen Durchführung mit großem Stichprobenumfang ergibt sich überraschenderweise gerade ein 70%-iger JA-Anteil. Wenn man nun diese relative Häufigkeit wegen der Größe der Stichprobe auf die Gesamtheit der Jungen überträgt und damit als Wahrscheinlichkeit auffasst, so kann man einen Schätzwert für den prozentualen Anteil der Schüler, die mehr als einmal im Schuljahr zu spät kommen, berechnen.

b) Ermitteln Sie, wie hoch dieser Schätzwert unter der Annahme ist, dass alle gemäß der Spielregel geantwortet haben. **(15P)**

c) Begründen Sie, dass es auf diese Weise nahezu unmöglich ist, dass in 90 % der Fälle JA-Antworten gegeben werden. **(10P)**

Es wird diskutiert, welchen Einfluss die W-Wahrscheinlichkeit (s. oben) auf die Güte der Ergebnisse und die Anonymität hat.

In einer Veröffentlichung eines selbsternannten Datenschützers wird vorgeschlagen, die W-Wahrscheinlichkeit für das Geben einer wahrheitsgemäßen Antwort als 0,5 zu wählen (z.B. Münzwurf).

d) Beurteilen Sie den Vorschlag des Datenschützers. **(15P)**

e) Beurteilen Sei nun allgemein, welche Auswirkungen eine Veränderung der W-Wahrscheinlichkeit auf die Anonymität und die Aussagekraft des Ergebnisses hat, indem Sie für die W-Wahrscheinlichkeit die Werte 0 oder 1 in der Nähe betrachten. **(20P)**

In einer kleinen Gruppe, wie zum Beispiel der Tutandengruppe mit fünf Jungen und fünf Mädchen, ist die Wahrung der Anonymität natürlich noch viel schwieriger. Dafür schlagen die Mädchen folgendes Modell vor: Jedes Mädchen wählt zufällig einen Jungen aus, der dann verspricht, ehrlich zu antworten. Die Befragung wird so durchgeführt, dass niemand mitbekommt, wer wen gefragt hat; es kann also auch sein, dass manche der Jungen mehrfach oder auch gar nicht befragt wurden. Bei der Durchführung gibt es genau 3 JA-Antworten.

f)
- Beschreiben Sie, welche Rückschlüsse auf diese Gruppe man daraus ziehen kann, und begründen Sie, warum man zum Beispiel nicht entscheiden kann, ob die Mehrheit der Jungen mehr als einmal im Schuljahr zu spät kommt.
- Bestimmen Sie dazu die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass es genau 3 JA-Antworten gibt, wenn genau zwei oder genau vier der Jungen mehr als einmal im Schuljahr zu spät kommen. **(20P)**

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>Wahrheit</td><td>Lüge</td><td></td></tr>
<tr><td>JA</td><td>0,525</td><td>0,075</td><td>0,6</td></tr>
<tr><td>NEIN</td><td>0,225</td><td>0,175</td><td>0,4</td></tr>
<tr><td></td><td>0,75</td><td>0,25</td><td></td></tr>
</table>
Man kann mit 60% JA-Antworten rechnen.</td><td>20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>Wahrheit</td><td>Lüge</td><td></td></tr>
<tr><td>JA</td><td>$0,75p$</td><td>$0,25(1-p)$</td><td>0,7</td></tr>
<tr><td>NEIN</td><td>$0,75(1-p)$</td><td>$0,25p$</td><td>0,3</td></tr>
<tr><td></td><td>0,75</td><td>0,25</td><td></td></tr>
</table>
Aus der JA-Zeile bzw. aus der NEIN-Zeile erhält man eine lineare Gleichung mit der Lösung $p = 0,9$. Diese praktische Durchführung legt den Schluss nahe, dass 90 % aller Jungen mehr als einmal im Jahr zu spät kommen.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Eine analoge Überlegung wie in Teil b) führt auf $p = 1,3$. Einfacher ist die Argumentation über die Tatsache, dass nach der Spielregel selbst bei $p = 1$ höchstens 75 % JA-Antworten möglich sind.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Wenn die Hälfte lügt und die Hälfte die Wahrheit sagt, erhält man stets mit 50 % Wahrscheinlichkeit die Antwort „Ja“, unabhängig davon, wie viele Schüler wirklich zu spät kommen. Die Aussagekraft der Umfrage ist also verloren gegangen, allerdings ist die Anonymität bestmöglich gewahrt.</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Wenn die Wahrscheinlichkeit für wahrheitsgemäße Antworten nahe Null oder nahe Eins ist, so steigt die Aussagekraft der Umfrage, denn der Ausgang des vorgeschalteten Experimentes ist mehr oder weniger bekannt bzw. stark zu vermuten, aber die Anonymität geht entsprechend weitgehend verloren.
Anmerkung: Die Schüler müssen die Aspekte nicht vollständig aufführen, sollten aber eine in sich stimmige – möglichst mit Beispielrechnungen untermauerte – Antwort geben, die beide Extremfälle berücksichtigt.</td><td>5</td><td>5</td><td>10</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Es muss mindestens einen Jungen geben, der mehr als einmal im Schuljahr zu spät kommt, und es können nicht alle 5 sein. Es handelt sich hier um ein Ziehen mit Zurücklegen, also um eine Binomialverteilung mit Umfang fünf. Für genau 2 Jungen, die häufiger zu spät kommen, ist $p = 0{,}4$ und damit $P(3 \text{ JA-Antworten} \mid p = 0{,}4) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}2304$ und für genau 4 Jungen, die häufiger zu spät kommen, ist $p = 0{,}8$ und damit $P(3 \text{ JA-Antworten} \mid p = 0{,}8) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}2048$. Beide Wahrscheinlichkeiten sind annähernd gleich groß, so dass es nicht möglich ist, auf die Anzahl der Jungen zu schließen, die häufiger zu spät kommen.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20