Analysis 1

I.1 Cityräder

Die Firma SafeBike ist ein Hersteller von Fahrrädern für den Fachhandel und stellt in Serienfertigung ein Cityfahrrad her.

Der Geschäftsleitung von SafeBike werden für eine geplante Wirtschaftlichkeitsprüfung von den zuständigen Abteilungen die folgenden Daten übermittelt:

Die wöchentlichen Gesamtkosten in Euro (€) für die Herstellung der Fahrräder hängen von der zu produzierenden Menge x in Stück ab.

Die wöchentlichen Fixkosten betragen 8 000 €. Bei einer Produktion von 10 Fahrrädern entstehen Gesamtkosten von 12 500 € und bei einer Produktion von 100 Stück entstehen 48 000 € Gesamtkosten. Bei einer Produktion von 42 Fahrrädern ist die Kostensteigerung am geringsten.
Die Firma SafeBike kann nicht mehr als 100 Fahrräder pro Woche fertigen.

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

a)
- Bestimmen Sie zu den vorgegebenen Daten die Gleichung einer kubischen Kostenfunktion.
- Begründen Sie, dass die ganzrationale Funktion mit möglichst kleinem Grad, die alle obigen Eigenschaften berücksichtigt, eine Funktion 3. Grades sein muss.
- Geben Sie eine wesentliche Eigenschaft an, die Kostenfunktionen aus betriebswirtschaftlichen Gründen haben müssen. (15P)

Die Fahrräder werden zum Preis von 520 € an die Fachhändler verkauft. Im Weiteren wird davon ausgegangen, dass SafeBike alle Fahrräder, die sie produziert, auch absetzt.

Verwenden Sie für alle weiteren Rechnungen die Gesamtkostenfunktion *K* mit der Funktionsgleichung:

$$K(x) = 0{,}057 \cdot x^3 - 6{,}9 \cdot x^2 + 510 \cdot x + 8000\,.$$

b) Geben Sie die Gleichung der Erlösfunktion E und einen aus wirtschaftlicher Sicht sinnvollen Definitionsbereich an. Zeichnen Sie den Graphen von E in das Koordinatensystem in der Anlage ein. (10P)

Die möglichen Produktionsmengen, bei denen das Unternehmen SafeBike Gewinn macht, bilden die so genannte Gewinnzone, die von der Gewinnschwelle bis zur Gewinngrenze reicht.

c) Ermitteln Sie, bei welchen Produktionsmengen Gewinn erzielt wird. (10P)

d)
- Bestimmen Sie die Produktionsmenge, bei der der Gewinn maximal ist, und geben Sie den so erzielbaren Maximalgewinn an.
- Begründen Sie allgemein, dass Erlösfunktion E und Kostenfunktion K an der Stelle mit maximalem Gewinn die gleiche Steigung haben. (20P)

Für eine Werbeaktion sollen die Fahrräder einer Produktionswoche möglichst günstig angeboten werden, aber auch in dieser Woche soll **kein Verlust** auftreten. Diese Preisuntergrenze entspricht dem Minimum der Stückkostenfunktion k . Die Stückkostenfunktion ist definiert durch $k(x)=\dfrac{K(x)}{x}$.

e) • Ergänzen Sie im Koordinatensystem den Graphen der Erlösfunktion E_1 mit minimalem Preis, zu dem eine verlustfreie Produktion möglich ist. Ermitteln Sie aus dem Graphen den Term der Erlösfunktion E_1 und geben anschließend den minimalen Preis an.

• Bestimmen Sie das Minimum der Stückkostenfunktion k und vergleichen Sie ihn mit dem Wert, den Sie aus dem Graphen bestimmt haben. (25P)

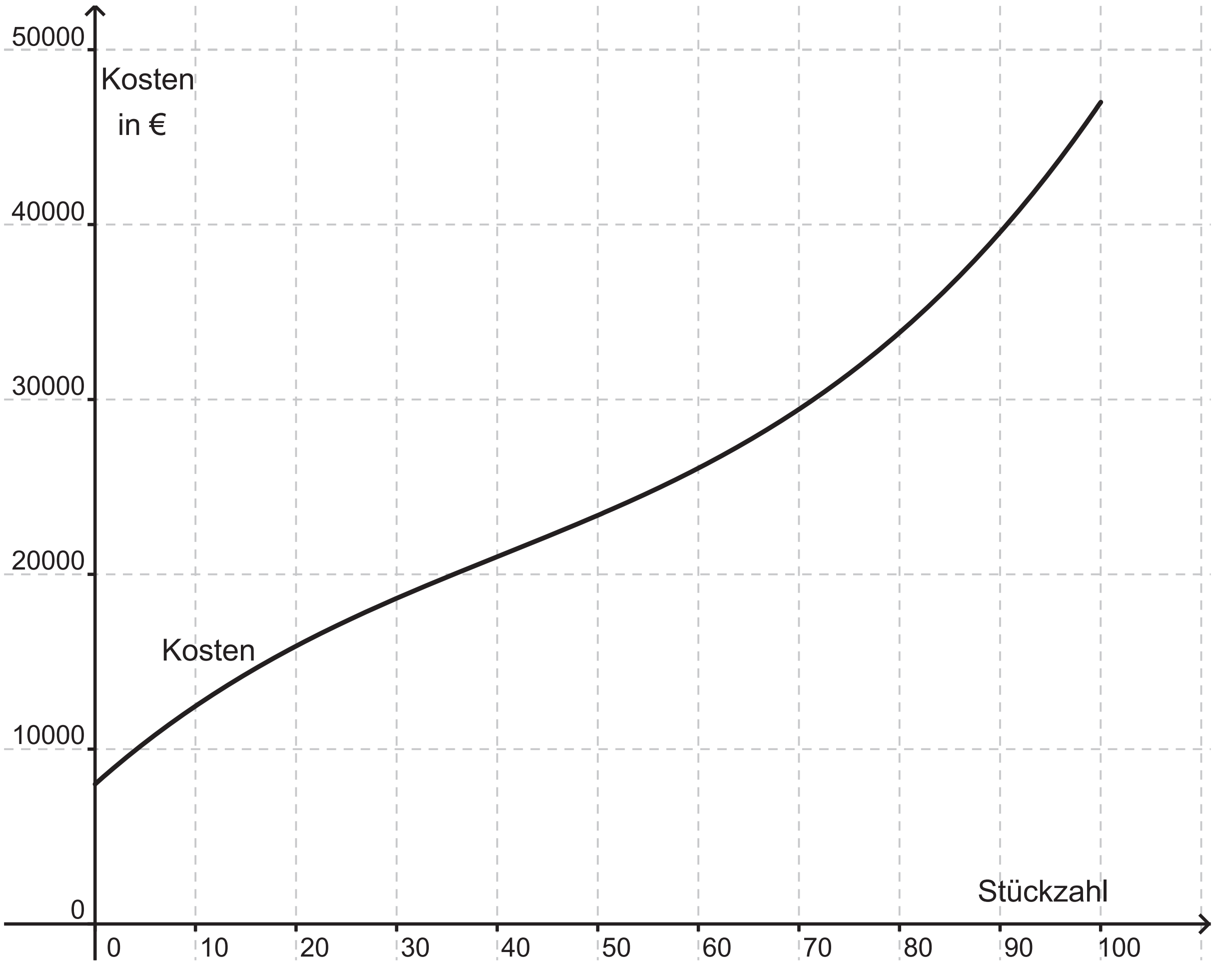
Die Cityräder haben bislang eine Achtgangschaltung. Für die neue Saison bringt der zuliefernde Hersteller eine Zehngangschaltung auf den Markt, die aber mit Mehrkosten von 32 Euro pro Fahrrad verbunden ist. Die Montage der neuen Schaltung verlangt genauso viel Aufwand wie die bisher eingebaute Schaltung. Es gibt zurzeit so viele Beschäftigte bei SafeBike, dass 80 Stück pro Woche gefertigt werden können.

f) • Entscheiden Sie, welche der drei Kostenfunktionen die neue Situation wiedergibt. Beschreiben Sie für die anderen beiden Funktionen, warum sie nicht zutreffen können.

$$K_1(x)=0{,}057\cdot x^3-6{,}9\cdot x^2+510\cdot x+8032$$
$$K_2(x)=0{,}057\cdot(x+32)^3-6{,}9\cdot(x+32)^2+510\cdot(x+32)+8000$$
$$K_3(x)=0{,}057\cdot x^3-6{,}9\cdot x^2+542\cdot x+8000$$

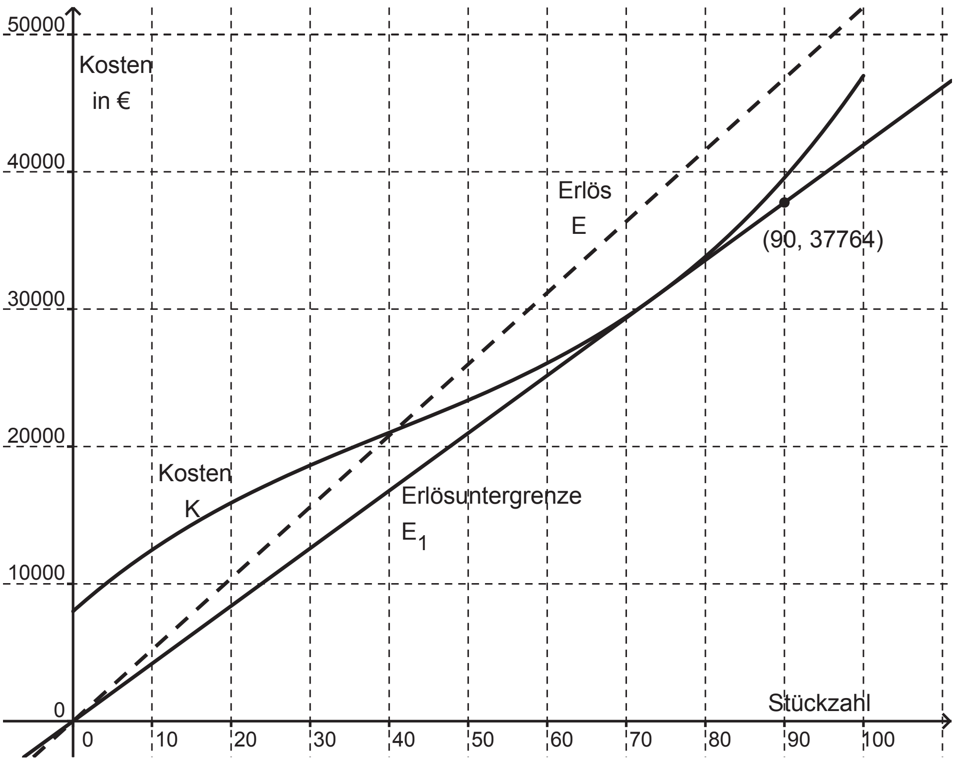
• Untersuchen Sie, wie hoch der neue Preis sein muss, damit bei einer Fertigung von 80 Stück ein Maximum der Gewinnfunktion vorliegt. (20P)

Anlage zur Aufgabe „Cityräder"



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Ansatz: Eine kubische Funktion mit 8000 als absolutem Glied. $k(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+8000$ $k''(x)=6\cdot a\cdot x+2\cdot b$ Preis bei 10 Stück $k(10)=12500$ Preis bei 100 Stück $k(100)=48000$ Minimale Kostensteigerung bei 42 Stück $k''(42)=0$ Daraus ergibt sich das Gleichungssystem: $\left\| \begin{matrix} k(10)=12500 \\ k''(42)=0 \\ k(100)=48000 \end{matrix} \right\| \Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} a=\frac{5}{144} \\ b=\frac{-35}{8} \\ c=\frac{8825}{18} \end{matrix} \right\|$ Damit ist die Gleichung der Kostenfunktion: $K(x)=\frac{5\cdot x^3}{144}-\frac{35\cdot x^2}{8}+\frac{8825\cdot x}{18}+8000$. • Die Funktion enthält einen Wendepunkt, deshalb muss sie mindestens dritten Grades sein. Da der Graph drei Punkte enthält und eine vierte Eigenschaft erfüllt (Vorliegen einer Wendestelle) reicht eine kubische Funktion aus. • Eine Kostenfunktion ist im gesamten Definitionsbereich monoton wachsend. (Die Benennung des positiven y-Achsenabschnitt oder der Nicht-Negativität im Definitionsbereich wären nur mit Teilpunkten zu bewerten.)	5	10	
b)	$E(x)=520\cdot x,\ 0\le x\le 100$ Graphik in e)	10		
c)	Ansatz: Entweder ist der Gewinn gleich Null oder Kosten und Erlös sind gleich. $G(x)=520\cdot x-\left(0{,}057\cdot x^3-6{,}9\cdot x^2+510\cdot x+8000\right)$ $G(x)=0\Rightarrow x\approx -30{,}97 \vee x\approx 40{,}72 \vee x\approx 111{,}30$ Im Intervall [0;40,72] wird Verlust gemacht, im Intervall [40,72;100] wird Gewinn gemacht, die linke und die rechte Nullstelle liegen außerhalb des Definitionsbereiches.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	• Maximaler Gewinn: Es werden die Stellen mit waagerechter Tangente berechnet. $G'(x) = -0{,}171 \cdot x^2 + 13{,}8 \cdot x + 10$ $G'(x) = 0 \Rightarrow x \approx -0{,}718 \vee x \approx 81{,}42$ Die linke Stelle liegt nicht im Definitionsbereich. Da der Graph von G' eine nach unten geöffnete Parabel ist, liegt an der rechten Stelle ein Vorzeichenwechsel von + zu – vor, also hat der Gewinn dort ein Maximum: $G(81{,}42) \approx 7790$. • An der Stelle mit maximalem Gewinn haben die Erlös- und die Kostenfunktion dieselbe Steigung, weil $G'(x) = 0 \wedge G(x) = E(x) - K(x) \Rightarrow E'(x) - K'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) = K'(x)$ *Alternativ:* An der Gewinnschwelle ist die Steigung der Kostenfunktion kleiner als die der Erlösfunktion, der Gewinn wird größer. Irgendwann steigt die Erlösfunktion genauso wie die Kostenfunktion, hier vergrößert sich der Gewinn nicht mehr, er ist maximal. Bis zur Gewinngrenze nimmt die Steigung der Kostenfunktion über die Steigung der Erlösfunktion hinaus zu, zur Gewinngrenze hin nimmt der Gewinn ab.		10	10
e)	• Graphische Darstellung:  			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Aus dem Graphen kann die Steigung der Erlösfunktion, also der Preis pro Stück, abgelesen werden. Die abgelesene Steigung muss ungefähr den Wert $p=\frac{37764}{90}=419,6$ annehmen und damit $E_1(x)=419,6\cdot x$.

Die Preisuntergrenze liegt bei ca. 419,60 €/Rad.

• Gesucht ist das Minimum der Stückkostenfunktion.
$k(x)=\frac{K(x)}{x}$
$k(x)=0,057\cdot x^2-6,9\cdot x+510+\frac{8000}{x}$
$k'(x)=0,114x-6,9-\frac{8000}{x^2}$
$k'(x)=0 \qquad \Rightarrow x\approx 73,51$
$k(73,51)\approx 419,62$.

An dieser Stelle liegt ein Minimum vor, denn es gilt:
$k'(73)\approx -0,079<0$ und $k'(74)\approx 0,075>0$.

Das Minimum ist $k(73,51)\approx 419,62$.

Die Preise stimmen überein, beide Wege führen zur langfristigen Preisuntergrenze.</td><td>10</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>• Die Kostenfunktion K_3 ist die richtige, da 32 € pro Stück hinzukommen. Bei K_1 wird einmalig 32 hinzugerechnet, bei K_2 werden 32 € zur Anzahl x dazugerechnet, was sinnlos ist.

• Der Preis p ist unbekannt, der Gesamterlös ist dann $p\cdot x$. An der Stelle mit maximalem Gewinn ist die Steigung der Gewinnfunktion gleich Null. Es gilt also:
$G_p(x)=\left(p\cdot x-K_3(x)\right)$
$G_p'(80)=0 \Leftrightarrow p=532,4$

Vorzeichenwechsel bei der ersten Ableitung:
$G_{532,4}{}'(70)>0;\ G_{532,4}{}'(90)<0$

$p=K_3{}'(80)=532,4$

Bei einem Stückpreis von 532,40 € wäre bei genau 80 Rädern pro Woche der Gewinn maximal.</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

Analysis 2

I.2 Feuerbohnen

Die Feuerbohne ist eine schnell wachsende und dekorativ blühende Bohnenart. Sie eignet sich zur Untersuchung des Wachstumsverhaltens und wird in vielen Klassenstufen gern für Versuche verwendet. In einer 5. Klasse wird besprochen, dass Pflanzen zum Wachsen Erde, Wasser, Wärme und Licht benötigen. Es soll nun untersucht werden, welchen Einfluss das Licht auf das Bohnenwachstum hat. Dazu werden die Bohnen durch einen Pappkarton verdunkelt.

Für die Beurteilung der Ergebnisse wird gleichzeitig ein **Kontrollversuch** durchgeführt, in dem die Pflanze Licht zum Wachsen hat. Die Höhe der Pflanzen wird jeden Tag um 14 Uhr gemessen.

Für die **Kontrollpflanze** ergibt sich folgendes Protokoll.

t in Tagen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h in cm	1	1,8	3,8	5,7	8	9,5	13	19	24	30

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

a)
- Bestimmen Sie mithilfe einer exponentiellen und einer quadratischen Regression jeweils eine Funktion, die die Höhe der Pflanze in Anhängigkeit von der Wachstumszeit nach Beobachtungsbeginn beschreibt. Runden Sie die auftretenden Parameter auf drei Stellen nach dem Komma.
- Entscheiden Sie begründet, welche Funktion den Sachverhalt in diesem Zeitraum besser beschreibt. (10P)

b) Bei der exponentiellen Modellierung wird die Wachstumsgeschwindigkeit durch die Funktion v mit der Gleichung $v(t) = 0{,}370 \cdot e^{0{,}360 \cdot t}$ beschrieben. Bestätigen Sie den Term durch eine Rechnung und geben Sie die Wachstumsgeschwindigkeit (mit der zugehörigen Einheit) für $t = 5$ an. (10P)

Beim Bohnenwachstum **des Versuches ohne Licht** kann man ein erstaunliches Längenwachstum beobachten, welches sich biologisch damit begründet, dass Pflanzen dem Licht entgegenwachsen und sich in diesem Fall lange farblose Triebe bilden. Leider sind an einigen Tagen Messfehler aufgetreten, so dass sich nur folgende Werte sinnvoll auswerten lassen:

t in Tagen	1	5	7	8	9	10
h in cm	1	18	34	49	63	72

c) • Stellen Sie die Werte im Koordinatensystem der Anlage 1 dar.

- Das Wachstum soll für die ersten Tage durch eine Exponentialfunktion c modelliert werden. Bestimmen Sie den Funktionsterm, indem Sie die Messwerte des ersten und des siebten Tages verwenden. Notieren Sie wichtige Zwischenschritte.
  Geben Sie die Bedeutung der in dem Funktionsterm auftretenden Parameter an.
  Beurteilen Sie, wie gut die Funktion c das Längenwachstum beschreibt, indem Sie für den fünften und den achten Tag die Längen berechnen und mit den Messdaten vergleichen.
- Bestimmen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit, die sich nach diesem exponentiellen Modell am fünften Tag ergibt. Vergleichen Sie diese mit der bereits berechneten Wachstums-geschwindigkeit der Kontrollpflanze. (15P)

d) • Mit Beginn des siebten Tages soll das Modell des beschränkten Wachstums angewendet werden. Bestätigen Sie, dass die Funktion d mit der Gleichung $d(t) = 140 - 298,7 \cdot e^{-0,1480 \cdot t}$ ein mögliches Modell für die Höhe der Pflanze darstellt, das zu den Daten des siebten und zehnten Tages passt.

- Untersuchen Sie, ob die Höhen am achten und am neunten Tag in dem Modell um weniger als 3 % von den gemessenen Werten abweichen.
- Berechnen Sie, wann die Pflanze 95 % ihrer maximalen Höhe erreicht. (15P)

Ein Oberstufenkurs erhält die Aufgabe, die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze ohne Licht zu modellieren. Eine Gruppe „bastelt“ die Funktion v_1 mit $v_1(t) = 4,75 \cdot e^{-0,45 \cdot t} \cdot t^2$.
Auf dieses Ergebnis beziehen sich die folgenden Aufgabenteile, außerdem kann davon ausgegangen werden, dass die Pflanze zum Zeitpunkt Null auch die Höhe Null hat.

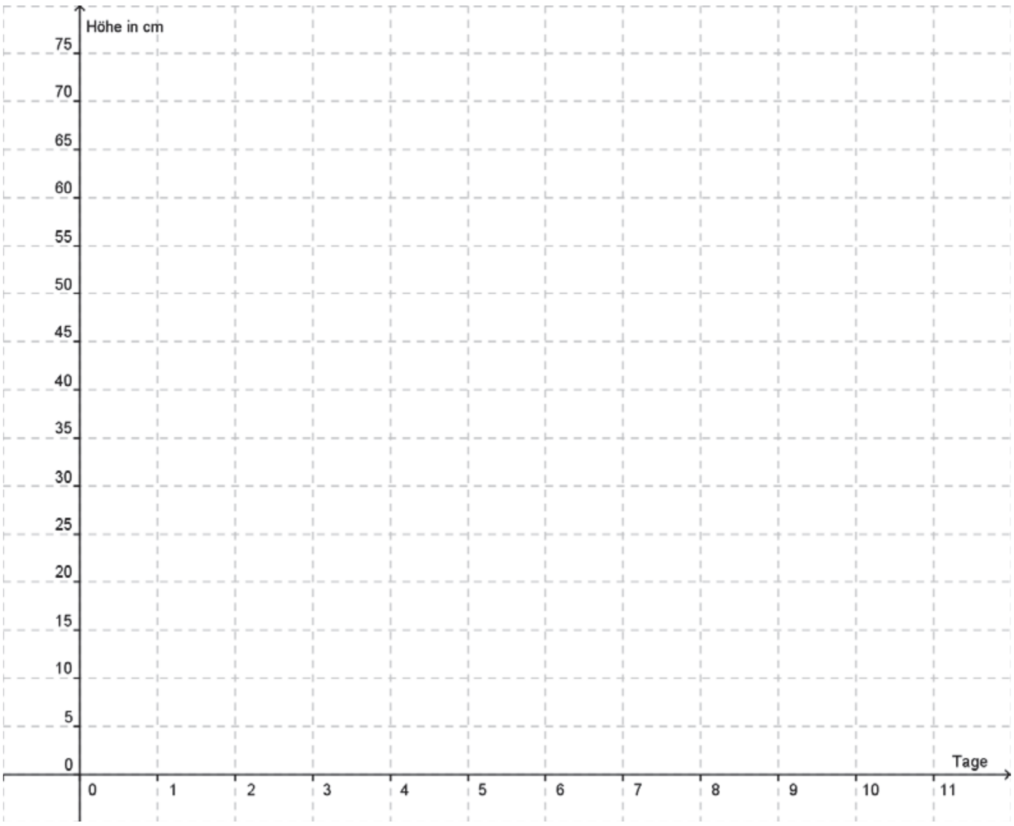
e) • Skizzieren Sie den Graph der Funktion v_1 (Anlage 2).

- Bestimmen Sie die erste Ableitung von v_1 nachvollziehbar ohne CAS und fassen Sie den Term so weit wie möglich zusammen.
- Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem die Pflanze besonders schnell wächst. (20P)

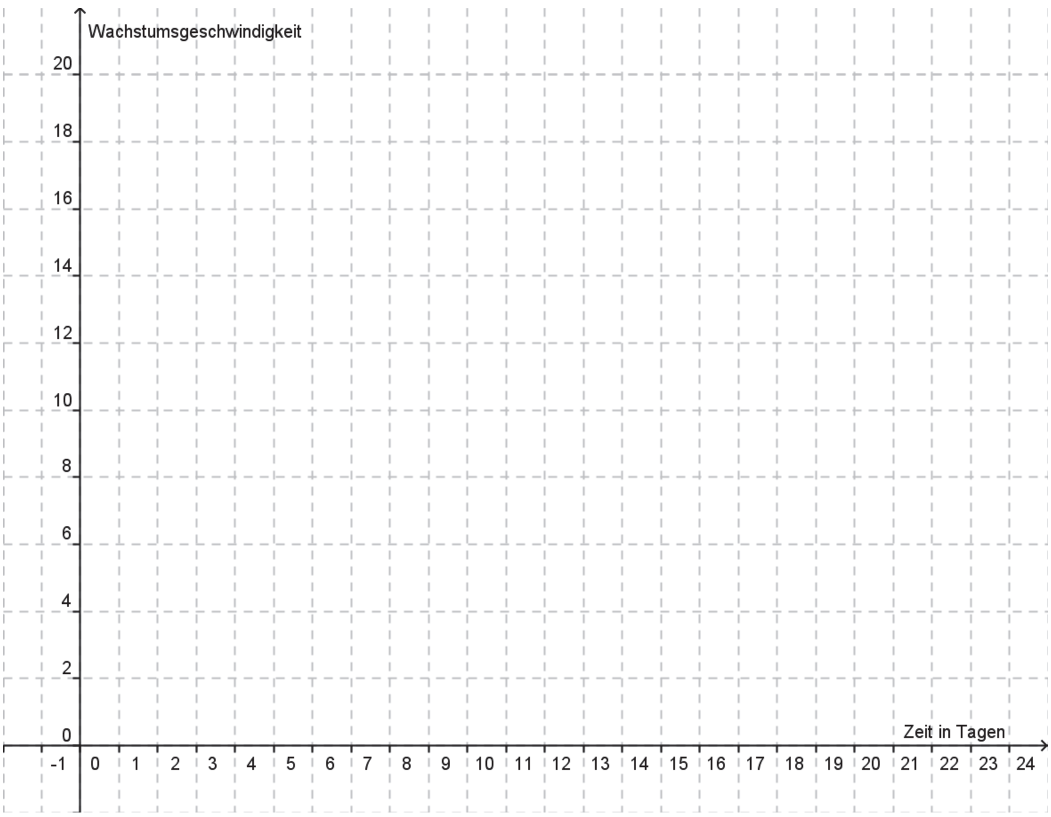
f) Bestimmen Sie die Höhe der Pflanze am vierten Tag sowie ihre maximal erreichbare Höhe H_{max}. (10P)

g) Betrachtet man die Messdaten, so stellt man fest, dass die maximale Wachstumsgeschwindigkeit zwischen dem siebten und dem achten Tag erreicht wird. Die Funktion v_1 soll dieser Beobachtung angepasst werden. Dies soll durch Veränderung des Faktors 0,45 im Exponenten geschehen.
Setzen Sie deshalb verschiedene Werte anstatt des Faktors 0,45 ein und
beschreiben Sie, wie sich dies auf die Lage des Maximums auswirkt.
Begründen Sie anschließend den Zusammenhang. (20P)

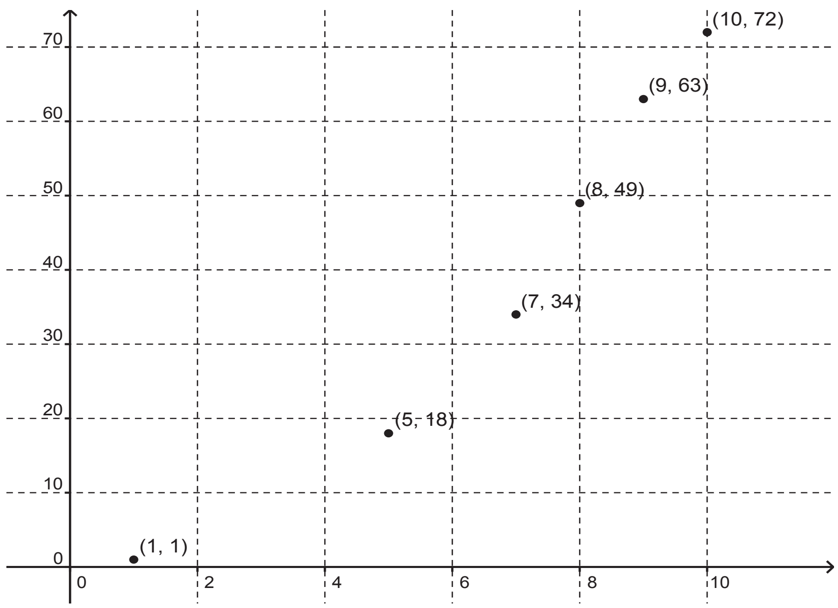
Anlage 1 zur Aufgabe „Feuerbohnen“



Anlage 2 zur Aufgabe „Feuerbohnen“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Die exponentielle Regression liefert $e(t)=1,027\cdot e^{0,360\cdot t}$, die quadratische Funktion ist $q(t)=0,336\cdot t^2-0,570\cdot t+1,778$, wobei t die Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn ist und $e(t)$ und $q(t)$ jeweils die Höhe der Pflanze angibt. *Bemerkung: Wenn man den Ansatz $e(t)=a\cdot e^{b\cdot t}$ logarithmiert, sind $\hat{a}$ = ln(a) und b Parameter für eine lineare Regression , die man für den Datensatz lösen kann. Diesen Weg gehen viele CAS-Systeme, und er liegt auch der angegebenen Lösung zu Grunde. Wenn man aber stattdessen $e(t)=a\cdot e^{b\cdot t}$ direkt anpasst, kommt man zu der Lösung: $e(t)=1.771\cdot e^{0,286\cdot t}$.* • Die quadratische Funktion trifft die Punkte ziemlich gut, der Scheitelpunkt liegt allerdings etwa bei einem Tag, d.h. die Pflanze wäre vorher größer. Die Exponentialfunktion e ist monoton steigend und beschreibt das Wachstum bis zum achten Tag gut, ab dem neunten Tag liegt der Graph der Funktion aber deutlich über den Messpunkten. Insgesamt passt die quadratische Funktion in dem Beobachtungszeitraum besser.	5	5	
b)	Die Wachstumsgeschwindigkeit wird mit der 1. Ableitung der Funktion e berechnet: $v(t)=e'(t)=1,027\cdot 0,360\cdot e^{0,360\cdot t}\approx 0,370\cdot e^{0,360\cdot t}$. Es ergibt sich $v(5)=2,24$ (cm/Tag).		10	
c)	• Graphische Darstellung: 			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

• Der Ansatz für die Exponentialfunktion lautet $c(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$.
Mit den gegebenen Messdaten ergeben sich die Gleichungen
$1 = a \cdot e^{b \cdot 1}$ und $34 = a \cdot e^{b \cdot 7}$.
Die erste Gleichung wird z.B. nach a aufgelöst und in die zweite eingesetzt:
$34 = \frac{1}{e^b} \cdot e^{7b} = e^{6b}$, damit folgt $6b = \ln 34$.
Die Ergebnisse lauten $b \approx 0{,}588$ und $a \approx 0{,}556$. Also ist
$c(x) = 0{,}556 \cdot e^{0{,}588 \cdot x}$,
wobei 0,556 die Höhe der Pflanze zum Zeitpunkt Null ist und $e^{0{,}588} \approx 1{,}8$ den Wachstumsfaktor darstellt.
Für den fünften bzw. achten Tag ergeben sich die Längen $c(5) \approx 10{,}5$ cm und $c(8) \approx 61{,}4$ cm. Man kann also eine erhebliche Abweichung bei diesem Modell feststellen.

• Die Wachstumsgeschwindigkeit berechnet man mit der 1. Ableitung
$c'(x) = 0{,}327 \cdot e^{0{,}588 \cdot x}$,
es ergibt sich
$c'(5) \approx 6{,}18$,
das entspricht einer etwa 2,8-fachen Wachstumsgeschwindigkeit im Vergleich zur Kontrollpflanze.

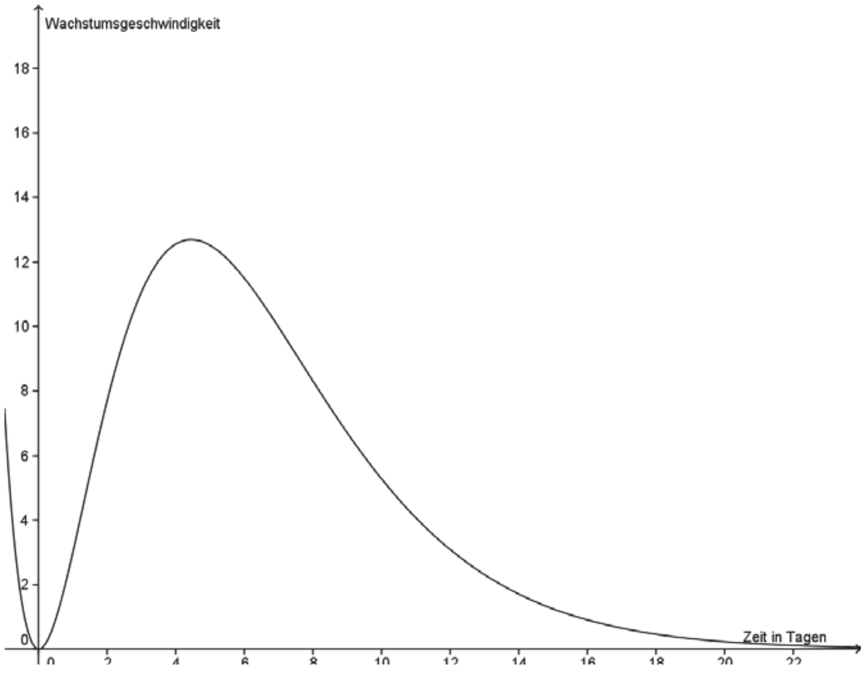
</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

• $d(7) = 34$, $d(10) = 72$. Damit ist die Gleichung bestätigt.
• Mit dem Modell ergeben sich für den achten und den neunten Tag die Höhen
$d(8) \approx 48{,}58$ und $d(9) \approx 61{,}16$.
Eine 3 %ige Abweichung ergibt für den achten Tag $0{,}97 \cdot 49 \approx 47{,}53$ und für den neunten Tag $0{,}97 \cdot 63 \approx 61{,}11$. Damit ist die Abweichung geringer als 3 %.
• Die maximale Höhe beträgt 140 cm. Gesucht ist die Lösung der Gleichung
$140 - 298{,}7 \cdot e^{0{,}1480 \cdot t} = 140 \cdot 0{,}95$.
Mit dem Rechner erhält man $t \approx 25{,}4$.

</td><td>10</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

- Graphische Darstellung:



-

$v_1{}'(t) = 4,75 \cdot (-0,45) \cdot e^{-0,45 \cdot t} \cdot t^2 + 4,75 \cdot e^{-0,45 \cdot t} \cdot 2 \cdot t$
$= e^{-0,45 \cdot t} \cdot (-2,1375 \cdot t^2 + 9,5 \cdot t)$
$= e^{-0,45 \cdot t} \cdot t \cdot (-2,1375 \cdot t + 9,5)$

- Den Zeitpunkt des maximalen Wachstums ermittelt man mit der ersten Ableitung $v_1{}'(t) = 0$. Man erhält zwei Lösungen $t = 0$ oder $t = \frac{40}{9}$ Weitere Untersuchungen z.B. mit der 2.Ableitung ergeben

$v_1{}''(0) = 9,5$ und $v_1{}''(4,44) \approx -1,29$,

also ist das Wachstum zum Zeitpunkt t = 4,44 besonders hoch.
Das Maximum kann auch mit dem Graphen begründet werden.
</td><td>5</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

Die Höhe der Pflanze nach vier Tagen beträgt $\int_0^4 v_1(t)\,dt \approx 28,08$ (cm), die maximal erreichbare Höhe ist $\int_0^\infty v_1(t)\,dt \approx 104,25$ (cm).

Anmerkung: Für den zweiten Teil sind auch Lösungen zu akzeptieren, in denen die obere Grenze biologisch sinnvoll gewählt wurde.
</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>g)</td><td>Wird der Faktor im Exponenten größer, so verschiebt sich das Maximum nach links, wird er kleiner, so verschiebt es sich nach rechts.

Dies lässt sich z.B. mit dem Verlauf des Graphen der Exponentialfunktion erklären, die schneller abfällt, wenn der Betrag des Faktors größer ist.

Eine Begründung über die Berechnung der 1. Ableitung ist ebenfalls möglich:

Mit dem Ansatz $v_2(t) = 4,75 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot t^2, a > 0$ folgt für die 1. Ableitung

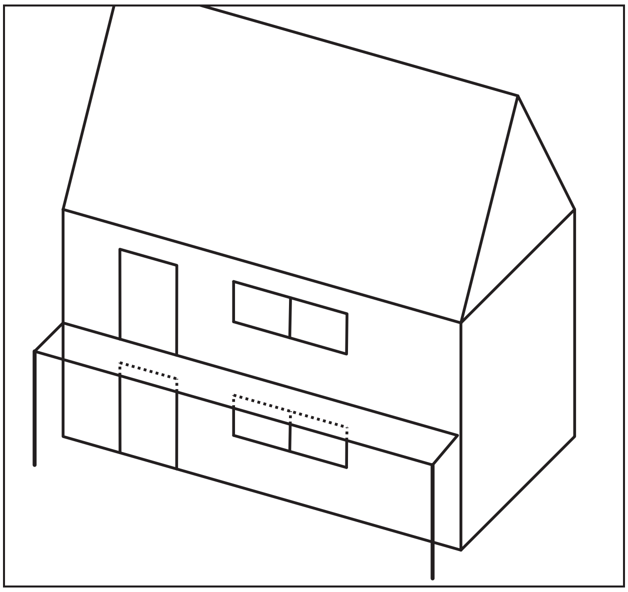
$v_2'(t) = 4,75 \cdot (-a) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot t^2 + 4,75 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot 2 \cdot t$
$= 4,75 \cdot t \cdot e^{-a \cdot t} \cdot (2 - a \cdot t)$

Das Maximum berechnet man über die Nullstellen von v_2' und erhält $t = 0$ und $t = \frac{2}{a}$ Damit ist gezeigt, dass der Wert für *t* kleiner wird, wenn *a* größer gewählt wird.</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

Lineare Algebra/Analytische Geometrie 1

I.1 Balkon

Ein Zweifamilienhaus soll modernisiert werden. Bisher hat nur die Erdgeschosswohnung eine Terrasse. Jetzt soll für das obere Geschoss ein Balkon vorgebaut werden,
vgl. Skizze rechts, die nicht maßstabsgetreu ist.



Die Planung betrifft die nach Südosten gerichtete Hauswand. Die Eckpunkte dieser Wand sind $A(\,4\,|\,0\,|\,0\,)$, $B(\,0\,|\,6\,|\,0\,)$, $C(\,0\,|\,6\,|\,8\,)$ und $D(\,4\,|\,0\,|\,8\,)$. Die Unterkante der Terrassentür im Erdgeschoss hat die Endpunkte $E(\,2\,|\,3\,|\,0\,)$ und $F(\,1\,|\,4{,}5\,|\,0\,)$ und die Tür ist 2,20 Meter hoch. Die Unterkante der einzubauenden Balkontür im 1. Stock ist in 3,10 Meter Höhe. Die Türen sind genau übereinander und haben die gleichen Maße.

Die x-Achse des Koordinatensystems (siehe Anlage) zeigt nach Süden, die y-Achse nach Osten, die z-Achse ist nach oben gerichtet.

Die Längeneinheit in alle Richtungen beträgt 1 Meter.

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild der Hauswand mit den beiden Türen in das Koordinatensystem in der Anlage. Geben Sie die Koordinaten der oberen Eckpunkte G und H der Terrassentür, sowie die Koordinaten der Eckpunkte I, J, K und L der Balkontür an. (15P)

b) Geben Sie die Gleichung der Ebene E_H , in der die Hauswand liegt, in Parameterform an. Beschreiben Sie kurz ihr Vorgehen. (10P)

c) Der rechteckige Balkon ist über die gesamte Breite des Hauses geplant, und die Bodenunterkante liegt in 3 Meter Höhe. Der Eigentümer der oberen Wohnung wünscht sich eine Tiefe von 2 Metern. Die Ecken sind $M(\,0\,|\,6\,|\,3\,)$, $N(\,4\,|\,0\,|\,3\,)$, O_1 und P_1. Bestimmen Sie die Koordinaten von O_1 und P_1 und beschreiben Sie dabei Ihre einzelnen Lösungsschritte. (15P)

d) Um die Verschattung der unten liegenden Wohnungen kleiner zu halten, wird die Tiefe des Balkons auf 1,50 Meter reduziert. Die neuen Koordinaten lauten $O_2(\,5{,}248\,|\,0{,}832\,|\,3\,)$ und $P_2(\,1{,}248\,|\,6{,}832\,|\,3\,)$. Zeichnen Sie den Balkon in die Anlage ein. Berücksichtigen Sie hier nur die erste Stelle hinter dem Komma.
Weisen Sie nach, dass die Tiefe 1,50 Meter beträgt und dass die Grundfläche des Balkons rechteckig ist. (10P)

Der Balkon wurde mit der reduzierten Tiefe von 1,50 m und den Eckpunkten O_2 und P_2 gebaut. Im Folgenden soll die Verschattung des Erdgeschosses durch den Balkon untersucht werden.
Die Sonne steht am 21. Juni in der Mittagszeit am höchsten. Die Richtung der einfallenden Strahlen wird dann durch den Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1{,}81 \end{pmatrix}$ beschrieben.

e) Begründen Sie anhand des Vektors, dass das Licht genau aus südlicher Richtung kommt. Berechnen Sie den Winkel, in dem das Sonnenlicht auf den ebenen Boden trifft. (10P)

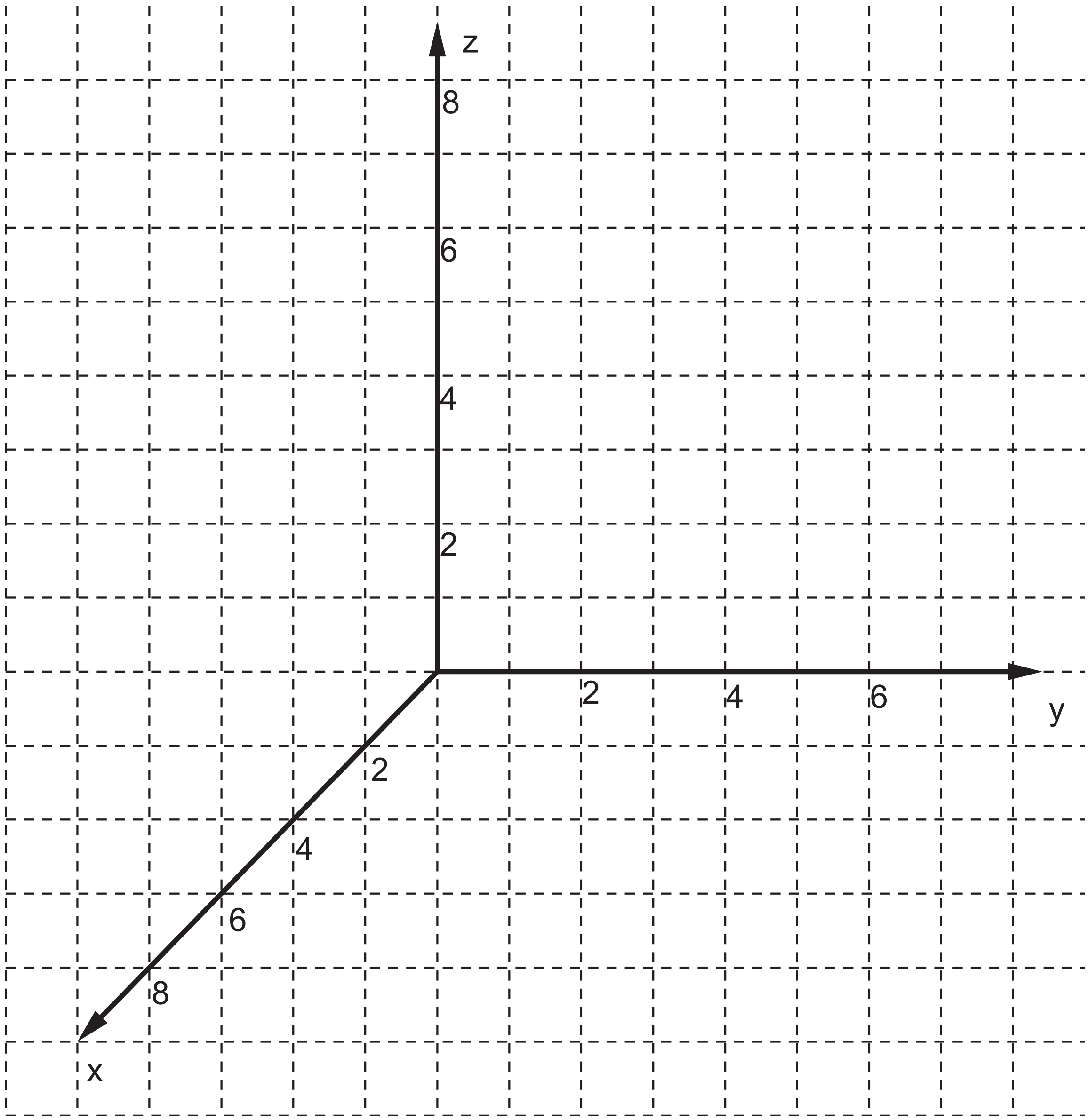
f) Bestimmen Sie die Schattenpunkte O_2' und P_2' der Balkonecken O_2 und P_2.
Entscheiden Sie, ob das Viereck $AO_2{}'P_2{}'B$ die Schattenfläche des Balkons auf dem Boden sein kann. (15P)

Die untere Wohnung erhält eine Markise, die an der Vorderkante des Balkons befestigt wird. Für die obere Wohnung ist ein dreieckiges Sonnensegel vorgesehen, das an zwei Befestigungspunkten $B_1(0\,|\,6\,|\,6{,}5)$ und $B_2(2{,}5\,|\,2{,}25\,|\,6{,}5)$ an der Hauswand und einem Pfosten aufgespannt wird.
Die Ebene, in der sich die Markise befindet, kann annähernd durch die Koordinatengleichung $0{,}052 \cdot x + 0{,}035 \cdot y + 0{,}233 \cdot z = 1$ beschrieben werden.

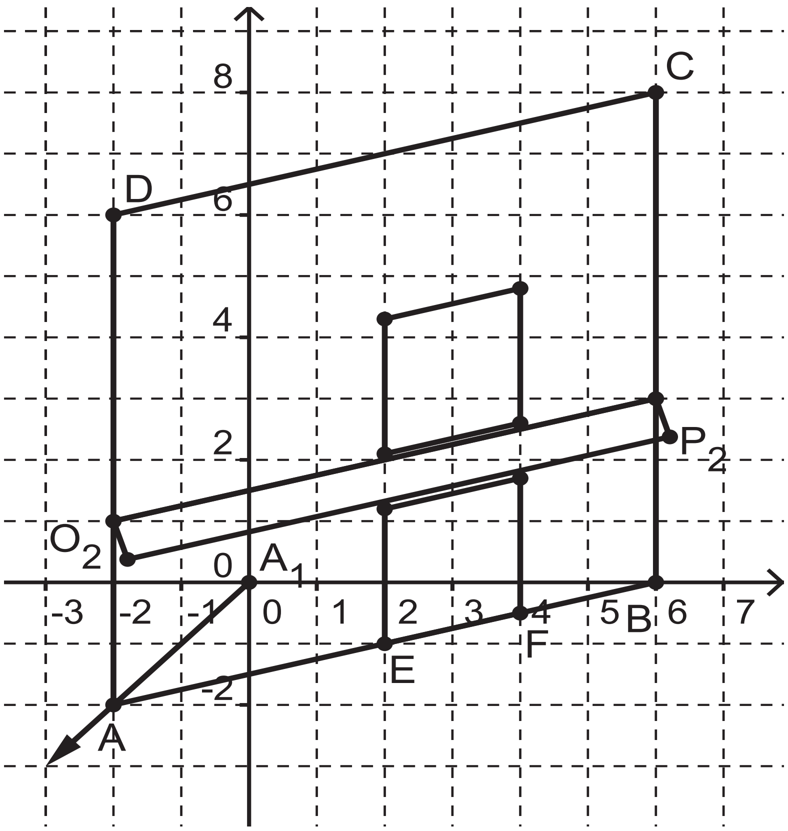
g) Bestätigen Sie, dass die Eckpunkte O_2 und P_2 des Balkons in dieser Ebene liegen. (10P)

h) Der Pfosten für das Sonnensegel steht direkt am Geländer des Balkons und hat den Fußpunkt $F(0{,}448\,|\,8{,}032\,|\,3)$. Aus optischen Gründen soll das Sonnensegel parallel zur Markise verlaufen. Ermitteln Sie die Höhe des Pfostens. (15P)

Anlage zur Aufgabe „Balkon“



Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>


Hinweis: Diese Zeichnung enthält den Balkon, nach dem erst in Teilaufgabe d) gefragt wird.

Die Koordinaten der unteren Tür sind $G(1 \mid 4{,}5 \mid 2{,}2)$ und $H(2 \mid 3 \mid 2{,}2)$. Die obere Balkontür hat die Eckpunkte $I(2 \mid 3 \mid 3{,}1)$, $J(1 \mid 4{,}5 \mid 3{,}1)$, $K(1 \mid 4{,}5 \mid 5{,}3)$ und $L(2 \mid 3 \mid 5{,}3)$.</td><td>10</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

$$E_H: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Die Ebene hat den Aufpunkt A und die Richtungsvektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{d} - \vec{a}$.</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>Die Eckpunkte des Balkons, die sich an der Hauswand befinden, haben die Koordinaten $M(0|6|3)$ und $N(4|0|3)$. Gesucht ist zunächst der Punkt
O_1 so dass $\overrightarrow{NO_1}$ senkrecht zu $\overrightarrow{NM}$ ist und $\left|\overrightarrow{NO_1}\right| = 2$ ist.

Mit $\overrightarrow{NM} = \begin{pmatrix}-4\\6\\0\end{pmatrix}$ lässt sich der orthogonale Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}6\\4\\0\end{pmatrix}$ ablesen, da das Skalarprodukt der beiden Vektoren Null ergeben muss. Die zur Hauswand senkrechte Gerade durch den Punkt N hat die Gleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}6\\4\\0\end{pmatrix}$.

Da O_1 auf g liegt, wird t gesucht, so dass $\left|\overrightarrow{NO_1}\right| = 2$ ist. Es ist
$\overrightarrow{NO_1} = \begin{pmatrix}4+6t-4\\0+4t-0\\3-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6t\\4t\\0\end{pmatrix}$, damit ist $\left|\overrightarrow{NO_1}\right| = \sqrt{36t^2+16t^2} = \sqrt{52}\cdot t$.

Für t ergibt sich $t = \frac{2}{\sqrt{52}} \approx 0,277$, O_1 hat die Koordinaten $O_1(5,66|1,11|3)$.

Alternative: $O_1 = N + \frac{2}{\left|\vec{n}\right|}\cdot\vec{n} = N + \frac{2}{\sqrt{52}}\cdot\vec{n} \approx \begin{pmatrix}5,66\\1,11\\3\end{pmatrix}$.
Die Koordinaten des vierten Eckpunktes lauten $P_1(1,66 \mid 7,11 \mid 3)$.</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>*Der Balkon ist bei der Lösung der Teilaufgabe a) eingezeichnet.*
Es ist z.B. nachzuweisen, dass
$\overrightarrow{NO_2}$ senkrecht zu $\overrightarrow{NM}$ und parallel zu $\overrightarrow{MP_2}$ ist und $\left|\overrightarrow{NO_2}\right| = 1,5$ ist.

Das Skalarprodukt $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NO_2} = \begin{pmatrix}-4\\6\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1,248\\0,832\\0\end{pmatrix} = 0$, also sind die Kanten senkrecht zueinander. $\overrightarrow{NO_2} = \overrightarrow{MP_2}$, damit sind sie parallel und gleich lang.
$\left|\overrightarrow{NO_2}\right| \approx 1,49990 \approx 1,5$.</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	Da die x-Koordinate negativ und die y-Koordinate des Vektors $\vec{s}$ Null ist, kommt das Licht exakt aus Süden. Die Winkelberechnung kann mit dem Normalenvektor der Erde $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ erfolgen: $\cos\alpha=\frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{\lvert\vec{n}\rvert\cdot\lvert\vec{s}\rvert}=\frac{-1{,}81}{\sqrt{4{,}2761}}=-0{,}875$. Damit ist $\alpha=151{,}1°$ und der gesuchte Winkel ist $151{,}1°-90°=61{,}1°$. *Alternative*: $\tan\alpha=\frac{1{,}81}{1}$, damit erhält man $\alpha=61{,}1°$ oder direkt der Winkel-Befehl.	5	5	
f)	• Falls zuerst der Schnittpunkt der Geraden $g_B: \vec{x}=O_2+t\cdot\vec{s}=\begin{pmatrix}5{,}248\\0{,}832\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\-1{,}81\end{pmatrix}$ mit der Ebene E_H berechnet wird, erhält man für t den Wert $\frac{676}{375}$. Einsetzen liefert die Koordinaten $S_1\left(3{,}445 \mid 0{,}832 \mid -0{,}263\right)$. Da die z-Komponente kleiner als Null ist, muss der gesuchte Schattenpunkt auf dem Boden liegen Das Gleiche gilt für den Schattenpunkt von P_2: $S_2\left(0{,}555 \mid 6{,}832 \mid -0{,}263\right)$. Die Ebene, in der die Terrasse liegt, wird durch $z=0$ beschrieben. Der Schattenpunkt ergibt sich durch Gleichsetzen mit g_B, die Lösung der Gleichung $3-1{,}81\cdot t=0$ lautet $t\approx 1{,}657$. Die Schattenpunkte sind damit $O_2'(3{,}591 \mid 0{,}832 \mid 0)$ und $O_2'+(P_2-O_2)=P_2'(-0{,}409 \mid 6{,}832 \mid 0)$. • Das Viereck $AO_2'P_2'B$ ist nicht die Schattenfläche auf dem Boden. Der Punkt A wird zum Beispiel beleuchtet. Die Kante NO_2 wirft (teilweise) einen Schatten auf die Hauswand. *Hier sind auch andere Begründungen möglich.*		10	5
g)	Der Nachweis erfolgt durch Einsetzen der Punkte O_2 und P_2, man erhält die Werte 1,003 bzw. 1,001, die im Rahmen sinnvoller Rundungsgenauigkeit ausreichend dicht an 1 sind.	5	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
h)	Da die Ebenen parallel sein sollen, gilt für die Koordinatengleichung der Ebene des Sonnensegels $0{,}052 \cdot x + 0{,}035 \cdot y + 0{,}233 \cdot z = d$. Man setzt z.B. $B_1(0\,\|\,6\,\|\,6{,}5)$ ein und erhält für $d = 1{,}7245$. (Setzt man B_2 ein, so erhält man d = 1,72325.) Das obere Ende des Pfostens hat die Koordinaten $(0{,}448\,\|\,8{,}032\,\|\,h)$. Zu lösen ist die Gleichung $0{,}052 \cdot 0{,}0448 + 0{,}035 \cdot 8{,}032 + 0{,}233 \cdot h = 1{,}7245$, es ergibt sich $h \approx 6{,}18$. Die Pfostenspitze ist in einer Höhe von 6,18 m, der Pfosten ist 3,18 m lang.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	50	30

Lineare Algebra/Analytische Geometrie 2

II.2 Zecken

Die Zecke ist ein weltweit verbreiteter blutsaugender Parasit, der sich vom Blut seiner Wirte ernährt. Sie hat als Überträger zahlreicher Krankheiten, wie z.B. Borreliose, zweifelhafte Berühmtheit erlangt.

Eine Zecke entwickelt sich vom Ei über die Larve und die Nymphe zur erwachsenen (adulten) Zecke. Das erwachsene Zeckenweibchen legt nach der Paarung ca. 3000 Eier und stirbt kurz danach. Aus etwa 1 % der Eier schlüpfen nach einigen Wochen Larven. Etwa die Hälfte der Larven ist weiblich. Die Überlebensrate von einem Stadium zum nächsten steigt stetig an.

Da die Stadien der Larven, Nymphen und adulten Zecken durchschnittlich ein Jahr betragen, aus den Eiern jedoch schon nach einigen Wochen die Larven schlüpfen, soll bei den folgenden Populationsproblemen das Stadium der Eier nicht betrachtet werden. Deshalb wird im Weiteren von der „Geburtenrate der Larven“ gesprochen.

Die drei Entwicklungsstadien im n-ten Jahr werden durch den Vektor $\overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} L_n \\ N_n \\ Z_n \end{pmatrix}$ beschrieben.

Hierbei sind L_n, N_n und Z_n die jeweiligen Anzahlen der Larven, Nymphen und adulten Zecken. Im Folgenden soll stets nur die Population der weiblichen Zecken betrachtet werden.

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

a) Geben Sie begründet an, welche der drei folgenden Übergangsmatrizen die oben beschriebene Populationsentwicklung der Zecken wiedergibt. (10P)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,35 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,35 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0,35 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Population regional stark schwankt, wird für unsere Breiten folgende Übergangsmatrix A zugrunde gelegt, mit welcher in den folgenden Aufgabenteilen gearbeitet werden soll:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0,26 & 0 & 0 \\ 0 & 0,29 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Ergänzen Sie den noch unvollständigen Übergangsgraphen in der Anlage so, dass die Entwicklung der Population durch die Übergangsmatrix A dargestellt wird. (10P)

Im Folgenden soll für dieses Jahr eine Startpopulation $\overrightarrow{v_0}$ mit 200.000 Larven, 80.000 Nymphen und 50.000 Zecken vorliegen.

c)
- Stellen Sie die Populationsentwicklung der **adulten Zecken** über einen Zeitraum von 10 Jahren im Koordinatensystem in der Anlage grafisch dar. Beschreiben Sie die Entwicklung.
- Berechnen Sie, um welchen Faktor sich die Gesamtpopulation vom siebten zum zehnten Jahr vergrößert hat und begründen Sie, dass $\overrightarrow{v_7}$ und $\overrightarrow{v_8}$ für diese Berechnung nicht geeignet sind.
- Die Anzahl der adulten Zecken in den Jahren 0, 3, 6, ..., kann mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden.
  Geben Sie den Term der zugehörigen Exponentialfunktion an, wobei *x* die Zeit in Jahren beschreiben soll. (30P)

In der Region Norddeutschland sind in diesem Jahr nach Einschätzung von Fachleuten 30 % der adulten Zecken Träger des Borreliosevirus. Der Anteil der adulten Zecken, der seine notwendige Blutmahlzeit durch Stechen eines Menschen erwirbt, wird hier auf 0,025 geschätzt.

d) Bestimmen Sie die Gesamtanzahl der Menschen, die voraussichtlich in diesem Jahr und den nächsten beiden Jahren von den adulten Zecken der beobachteten Population v_0 mit dem Borreliosevirus infiziert werden. Gehen Sie hierbei vereinfachend davon aus, dass kein Mensch mehrfach gestochen wird und berücksichtigen Sie, dass bei der beobachteten Population nur weibliche Tiere betrachtet werden. (10P)

e) Durch das Ansiedeln geeigneter Vogelarten reduziert sich die bisherige Überlebensrate der Larven (in der Matrix A) auf einen Wert *x*. Experten gehen davon aus , dass sich die Anzahl der adulten Zecken bei der beobachteten Population in 10 Jahren auf 500 reduziert, wenn man vom Startvektor $\overrightarrow{v_0}$ ausgeht.
Bestimmen Sie die geänderte Überlebensrate *x* der Larven und geben Sie auch die sich damit ergebenden Anzahlen der Larven und Nymphen nach 10 Jahren an. (15P)

f) Einigkeit besteht darüber, dass der Klimawandel die Population der Zecken beeinflusst.
Eine Matrix, die dies modelliert, hat folgende Gestalt:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}13 & 0 & 0 \\ 0{,}13 & 0{,}29 & 0 \end{pmatrix}$$

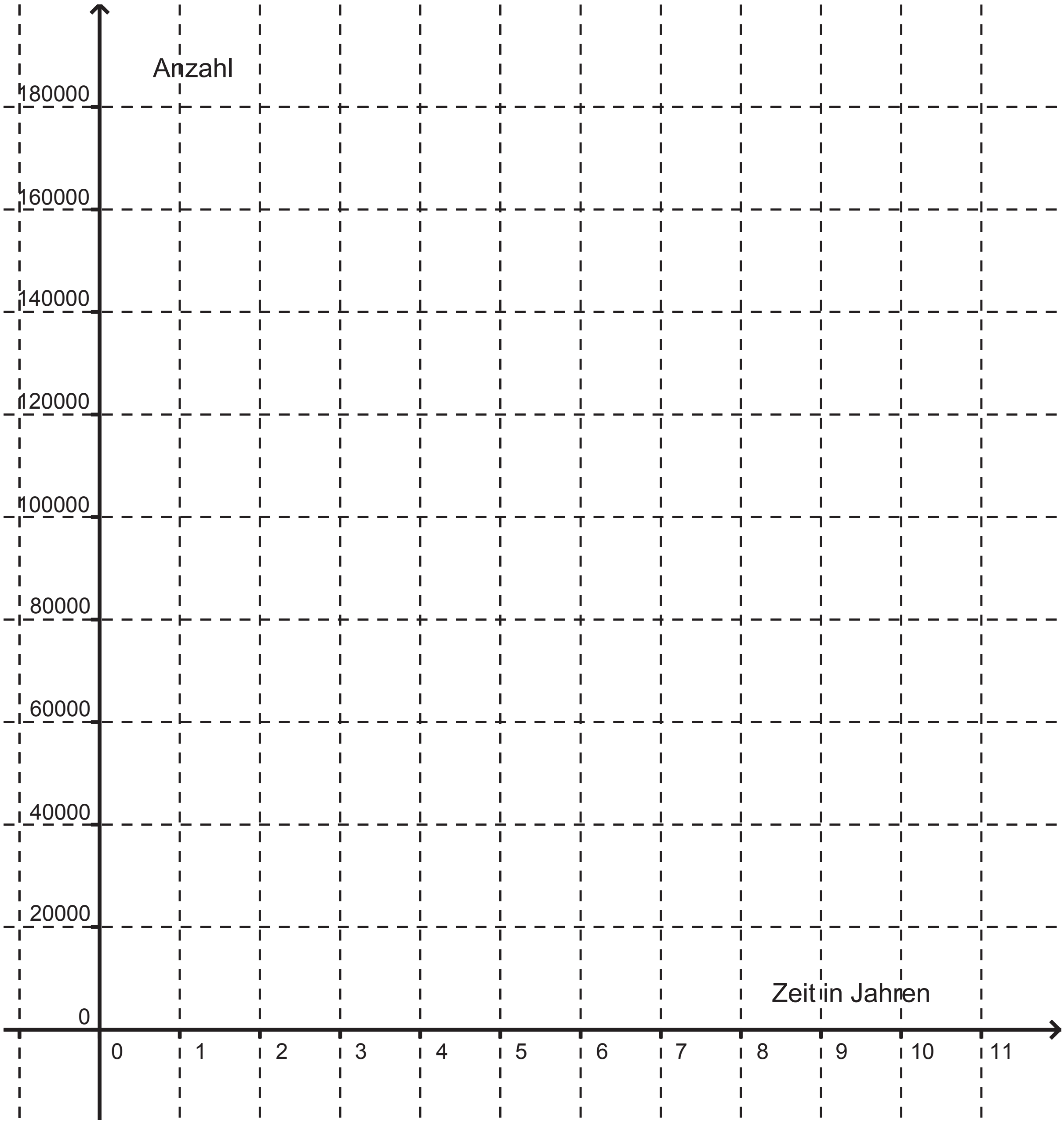
- Beschreiben Sie die Änderungen, die mit der Matrix C dargestellt wird, im Vergleich zu A im Sachzusammenhang.
- Untersuchen Sie die Entwicklung der Population und geben Sie den Unterschied zum bisherigen Entwicklungsverlauf an.
- Beurteilen Sie, ob bei einer veränderten „Geburtenrate der Larven“ eine stabile Zeckenpopulation erreicht werden kann. Bestimmen Sie gegebenenfalls die veränderte „Geburtenrate“. (25P)

Anlage zur Aufgabe „Zecken“

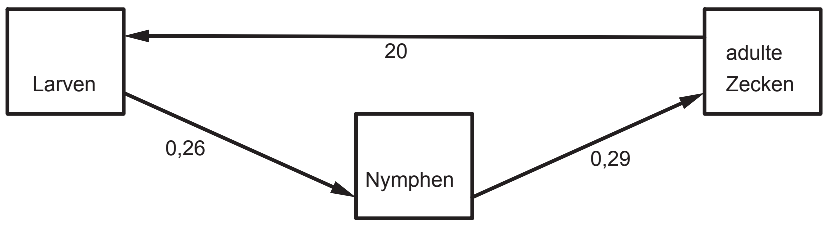
Zu Aufgabenteil b)

Larve	Nymphe	(adulte) Zecke

Zu Aufgabenteil c)



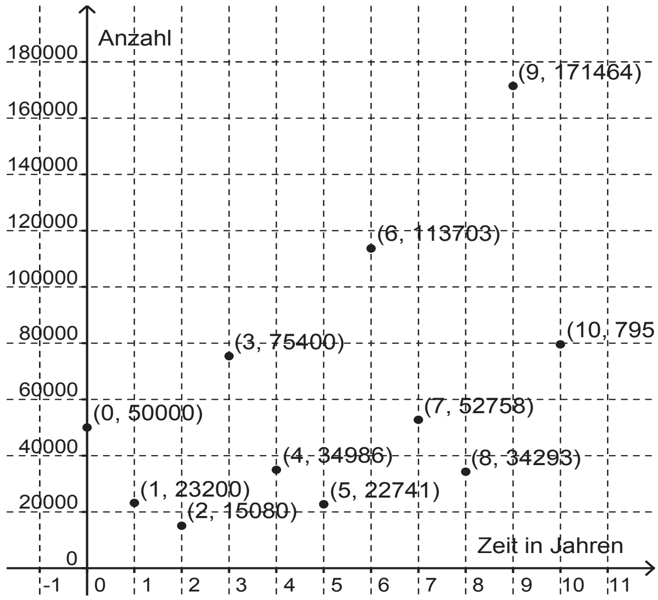
Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Population der Zecken wird durch A_1 wiedergegeben. Das Matrixelement a_{13} begründet sich damit, dass von den 3000 Eiern nur 1 % überleben und nur die weiblichen Eier betrachtet werden. Die Matrixelemente $a_{12} = 0{,}25$ und $a_{23} = 0{,}35$ sind in dieser Reihenfolge richtig, da die Überlebensrate der Zecken mit jedem weiteren Stadium steigt.	10		
b)		10		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

c)

- Graphische Darstellung:

  Die Populationsentwicklung ist periodisch wachsend.

- $\overrightarrow{v_7} \approx \begin{pmatrix} 2.274.060 \\ 118.251 \\ 52.758 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{v_{10}} \approx \begin{pmatrix} 3.429.290 \\ 178.323 \\ 79.559 \end{pmatrix}$

  Der Faktor ist für die Gesamtpopulation ist dann:

  $$\frac{3429290 + 178323 + 79559}{2274060 + 118251 + 52758} \approx 1,507$$

  Alternativ:
  Multiplikation der von Null verschiedenen Matrixelemente
  $0,26 \cdot 0,29 \cdot 20 = 1,508$

  Die überlebenden Nymphen in $\overrightarrow{v_7}$ werden die adulten Zecken in $\overrightarrow{v_8}$. Diese sind aber unabhängig von der Anzahl der adulten Zecken in $\overrightarrow{v_7}$. Daher kann aus diesen beiden Werten allein der Wachstumsfaktor nicht (sinnvoll) bestimmt werden.
  Alternativ sind andere Antworten möglich, die die Periodizität als Grund aufführen.

- Die Exponentialfunktion lautet wegen des durchschnittlichen Wachstumsfaktors von $1,508^{\frac{1}{3}} \approx 1,1467$ und dem Startwert 50.000:

  $f(x) = 50.000 \cdot 1,508^{\frac{1}{3}x} = 50.000 \cdot e^{0,13689 \cdot x}$, wenn x die Zeit ist, gemessen in Jahren.

I	II	III
5	20	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	Laut Aufgabenstellung sind 30 % der Zecken Virenträger, damit ergibt sich: $n = Z_0 + Z_1 + Z_2$ $= (50\,000 + 23\,200 + 15\,080) \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}025$ $= 662{,}1 \approx 662$ Dies ist nur die Anzahl der Personen, welche von weiblichen Zecken infiziert werden. Insgesamt sind es $662 \cdot 2 = 1324$ Personen.		10	
e)	Zu lösen ist folgendes Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}29 & 0 \end{pmatrix}^{10} \cdot \overrightarrow{v_0} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 500 \end{bmatrix}$ Hierbei ergibt sich: $x \approx 0{,}04798$; $a = 21551{,}72$; $b = 206{,}81...$		5	10
f)	• Die Änderungen bestehen in den Matrixeinträgen $a_{21} = 0{,}13$ und $a_{31} = 0{,}13$. Die Überlebensrate der Larven bleibt gleich, a_{21} und a_{31} bedeuten, dass sich 13 % der Larven weiterhin zu Nymphen entwickeln und dass sich 13 % bereits in einem Zeittakt zu adulten Zecken entwickeln.		5	
	• Es gibt keine Periodizität. Der Bestand wächst in allen Altersklassen an. (Nicht gefordert: *Durch besondere Startpopulationen kann es sein, dass es einer gewissen „Einschwingzeit“ bedarf, bis diese Entwicklungstendenz zu erkennen ist.*)		10	
	• Zu lösen ist das folgende Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0{,}13 & 0 & 0 \\ 0{,}13 & 0{,}29 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ Hierfür ergibt sich (neben parameterabhängigen Lösungen für a und b): $x \approx 5{,}96$. Bei einer „Geburtenrate“ von etwa 6 Larven ist also eine stabile Population erreichbar.			10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

STOCHASTIK 1

III.1 Sicherungen

Eine Firma stellt Elektro-Schraubsicherungen her, von denen erfahrungsgemäß etwa 10 % Mängel aufweisen und deshalb unbrauchbar sind.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Sicherungen, die man mindestens überprüfen müsste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % auf mindestens eine unbrauchbare Sicherung zu stoßen. (15P)

Um aus seiner Sicht eine hinreichende Qualität zu sichern, trifft der Großhändler mit der Herstellerfirma folgende Vereinbarung:

Sind mehr als 10 % einer Lieferung unbrauchbar, so darf die ganze Lieferung zurückgeschickt werden. Der Großhändler ist berechtigt, zur Feststellung der Qualität der Lieferungen Qualitätskontrollen in Form von Stichprobenuntersuchungen an 20 Sicherungen durchzuführen.

Dabei hat sich der Großhändler für das folgende Entscheidungsverfahren entschieden:

Sind bei einer ersten Stichprobe von 20 Sicherungen höchstens drei unbrauchbar, wird die ganze Lieferung angenommen. Sind mindestens 5 nicht brauchbar, wird die ganze Lieferung abgelehnt. Sind genau vier Artikel unbrauchbar, so wird eine zweite Stichprobe von 20 Artikeln überprüft. Sind dann höchstens zwei unbrauchbar, wird die ganze Lieferung akzeptiert, andernfalls wird sie abgelehnt.

Eine Lieferung ist gerade eingegangen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse für die erste 20er Stichprobe:

- E_1: Die ersten beiden Sicherungen sind unbrauchbar.
- E_2: Nur die ersten beiden Sicherungen sind unbrauchbar.
- E_3: Genau zwei Sicherungen sind unbrauchbar.
- E_4: Mindestens zwei und höchstens fünf Sicherungen sind unbrauchbar. (20P)

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- E_5: Die Lieferung wird nach der ersten Stichprobe abgelehnt.
- E_6: Es wird eine zweite Stichprobe erforderlich.
- E_7: Die Lieferung wird nach zwei Stichproben abgelehnt.
- E_8: Die Lieferung wird nach der ganzen Überprüfungsprozedur zu Unrecht abgelehnt, weil tatsächlich nur 9,5 % in der Lieferung unbrauchbar sind.
  Interpretieren Sie Ihr Ergebnis. (20P)

Der Großhändler kalkuliert sein Geschäft in Chargen zu 50 Sicherungen. Er geht nach wie vor von einem Ausschussanteil von 10 % aus. Dabei erzielt er für jede intakte Sicherung 2,00 € Gewinn. Wird eine defekte Sicherung verkauft, reklamiert sie der Kunde und es entsteht dem Großhändler dadurch ein Verlust von 1,50 €.

d)
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der unter 50 verkauften Sicherungen höchstens 5 unbrauchbar sind.
- Ermitteln Sie für diesen Fall den Mindestgewinn des Händlers. (10P)

Der zu erwartende Gewinn beim Verkauf von 50 Schraubsicherungen beträgt 82,50 €. Der Großhändler kalkuliert seinen Gewinn in einem Kalkulationsintervall von 72,00 € bis 93,00 €.

e)
- Berechnen Sie, welche Stückzahlen unbrauchbarer Sicherungen einen Gesamtgewinn an den Rändern des Kalkulationsintervalls zur Folge haben. Es wird eine einfache Rechnung erwartet, kein Ausprobieren.
  Kontrollergebnis: Die Stückzahlen betragen 8 bzw. 2.
- Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Gesamtgewinn bei 50 verkauften Sicherungen mindestens 72,00 € und höchstens 93,00 € beträgt. (20P)

Die Herstellerfirma entwickelt ein neues Herstellungsverfahren zur Reduzierung der Ausschusswahrscheinlichkeit. Die Firma behauptet, durch dieses Verfahren betrage die Ausschusswahrscheinlichkeit nur noch 3 %.

f) Zur Überprüfung der Behauptung werden 50 Stücke entnommen. Sind mehr als n Stücke unbrauchbar, so wird die Behauptung verworfen.
- Bestimmen Sie n so, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der die Behauptung der Herstellerfirma zu Unrecht verworfen wird, kleiner als 10 % ist.
- Beschreiben Sie, welchen Sinn eine solche Fragestellung hat. (15P)

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Soll unter n Sicherungen sich mindestens eine befinden, die unbrauchbar ist, so bedeutet dies, dass das Gegenereignis (alle Sicherungen sind brauchbar) auszuschließen ist.
Es muss also gelten:
$1-0,9^n \geq 0,95$
$0,9^n \leq 0,05$
$n \cdot lg\,0,9 \leq lg\,0,05$
$n \geq \frac{lg\,0,05}{lg\,0,9} = 28,43...$
Es sind also mindestens 29 Sicherungen zu untersuchen.
<u>Bemerkung:</u> Eine durch systematisches Probieren gefundene Lösung ist auch zulässig.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>• $P(E_1) = 0,1 \cdot 0,1 = 0,1^2 = 0,01$
• $P(E_2) = 0,1^2 \cdot 0,9^{18} = 0,001500946 \approx 0,0015$
• $P(E_3) = \binom{20}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{18} = \binom{20}{2} \cdot P(E_2) = 0,285179807 \approx 0,29$
• $P(E_4) = \binom{20}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{18} + \binom{20}{3} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^{17} + \binom{20}{4} \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^{16}$
$+\binom{20}{5} \cdot 0,1^5 \cdot 0,9^{15} = 0,596999868 \approx 0,6$</td><td>20</td><td></td><td></td></tr>
</table>

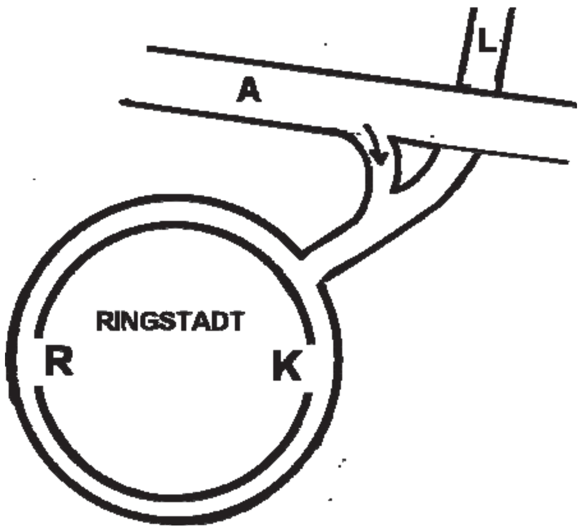
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	$P(E_5)=P(X\geq 5)=1-F_{20}(4)$ $=1-\left(\binom{20}{0}\cdot 0,1^0\cdot 0,9^{20}+\binom{20}{1}\cdot 0,1^1\cdot 0,9^{19}+\binom{20}{2}\cdot 0,1^2\cdot 0,9^{18}+\binom{20}{3}\cdot 0,1^3\cdot 0,9^{17}+\binom{20}{4}\cdot 0,1^4\cdot 0,9^{16}\right)$ $=1-0,956825505=0,043174495\approx 0,043$ $P(E_6)=P(X=4)=\binom{20}{4}\cdot 0,1^4\cdot 0,9^{16}=0,089778828\approx 0,09$ $P(E_7)=P(E_6)\cdot P(Y\geq 3)=P(X=4)\cdot\left(1-P(Y\leq 2)\right)$ $=\binom{20}{4}\cdot 0,1^4\cdot 0,9^{16}\cdot\left(1-B_{20}(2)\right)$ $=\binom{20}{4}\cdot 0,1^4\cdot 0,9^{16}\cdot\left(1-0,9^{20}-\binom{20}{1}\cdot 0,1^1\cdot 0,9^{19}-\binom{20}{2}\cdot 0,1^2\cdot 0,9^{18}\right)$ $=0,089778828\cdot 0,323073194=0,029005133\approx 0,029.$ $P(E_8)=P(E_5\mid p=0,095))+P(E_7\mid p=0,095)$ $\approx 0,03566+0,0799\cdot 0,705\approx 0,092$		15	5
d)	$P=\sum_{i=0}^{5}\binom{50}{i}\cdot 0,1^i\cdot 0,9^{50-i}=B_{50}(5)=0,6161$. Der Mindestgewinn für diesen Fall beträgt $G_{min}=45\cdot 2,00€+5\cdot(-1,50€)=82,50€$		10	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>Bei einem Gesamtgewinn von 72,00 € berechnet sich die Stückzahl unbrauchbarer Sicherungen wie folgt:
$(50-x)\cdot 2{,}00 + x\cdot(-1{,}50) = 72$
$100 - 2x - 1{,}5x = 72$
$28 = 3{,}5x$
$x = 8$
Bei einem Gesamtgewinn von 93,00 € erhalten wir entsprechend:
$(50-x)\cdot 2{,}00 + x\cdot(-1{,}50) = 93$
$100 - 2x - 1{,}5x = 93$
$7 = 3{,}5x$
$x = 2$
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 50 verkauften Sicherungen mindestens 2 und höchstens 8 unbrauchbare finden. Wir erhalten damit
$P = B_{50}(8) - B_{50}(1) = 0{,}9421 - 0{,}0338 = 0{,}9083 \approx 0{,}91.$</td><td>10</td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Es gilt, die erste natürliche Zahl k in der Tabelle der Summierten Binomialverteilung (für $n = 50$ und $p = 0{,}03$) zu finden, deren zugehöriger tabellarisierter kumulativer Wert oberhalb von 0,90 liegt.
Dies ist für $k = 3$ der Fall.
Damit erhalten wir:
$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - B_{50}(3) = 1 - 0{,}9372 = 0{,}0628.$
Damit ist die gesuchte Anzahl 3.
Dies ist die Logik eines Signifikanztests (Hypothesentests) auf dem 10 % - Niveau.
Jede andere plausible Antwort ist als richtig zu bewerten.</td><td></td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

STOCHASTIK 2

III.2 Autofahrer

Nach Ringstadt kommen die Autofahrer entweder von der Autobahn oder von der Landstraße. In beiden Fällen gelangen sie auf eine Ringstraße und dann in die Stadt durch eines der beiden mittelalterlichen Tore, das Karlstor oder das Rudolfstor.



Der Bürgermeister des Ortes hat für die Verkehrsplanung für einen längeren Zeitraum alle von auswärts kommenden Autofahrer über ihren Weg in die Stadt befragen lassen und erhielt das folgende Ergebnis:

Ca. 20 % aller Fahrer fahren durch das Karlstor.

Ca. 40 % aller Fahrer kommen von der Autobahn.

Ca. 70 % der Fahrer, die von der Landstraße kommen, fahren durch das Rudolfstor.

Diese Daten werden im Folgenden für Prognosen als (geschätzte) Wahrscheinlichkeiten verwendet.

Zur Auswertung der Aussagen betrachten Sie die folgenden Ereignisse:

A: Autofahrer kommt von der Autobahn

L: Autofahrer kommt von der Landstraße

K: Autofahrer fährt durch das Karlstor

R: Autofahrer fährt durch das Rudolfstor

a) Erstellen Sie zur Beschreibung der oben erhaltenen Daten zwei Baumdiagramme und eine Vierfeldertafel und ermitteln Sie die fehlenden Daten. (25P)

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

B_1: Ein Fahrer kommt von der Landstraße.

B_2: Ein Fahrer kommt von der Autobahn und fährt durch das Karlstor.

B_3: Ein Fahrer, der von der Autobahn kommt, fährt durch das Karlstor.

B_4: Ein Fahrer, der durch das Rudolfstor fährt, kommt von der Autobahn.

B_5: Von 10 Fahrern, die durch das Rudolfstor fahren, kommen genau vier von der Autobahn. (20P)

c) Beurteilen Sie, ob die oben genannten Ereignisse A und R stochastisch unabhängig sind. (10P)

Bei der nächsten Befragung von auswärts kommenden Fahrern über ihren Weg nach Ringstadt haben sich die empirischen Daten verändert. Insbesondere kamen von 2500 erfassten Fahrern nur 1326 von der Landstraße. Das sind jetzt deutlich weniger als 60 %.
Verkehrsexperten führen das Ergebnis auf die verbreiterte Autobahn zurück. In der Presse stand dazu groß aufgemacht:

„Jetzt kommen nur noch 53,04 % aller von auswärts kommenden Autofahrer über die Landstraße nach Ringstadt"

d) Ist das eine angemessene Darstellung des geschilderten empirischen Befunds?
Begründen Sie. (10P)

Die Polizei führte an einem Samstagabend bei 1000 Autofahrern in der Innenstadt von Ringstadt eine Geschwindigkeitskontrolle durch. Das Testergebnis ist mit absoluten Häufigkeiten im Anhang in einer Tabelle festgehalten. Größere Geschwindigkeiten als in der Tabelle angegeben wurden nicht gemessen, da es der Verkehrsfluss im Stadtverkehr mit Ampelschaltung nicht zulässt. Für Geschwindigkeitsüberschreitungen werden die in Tabelle 3 angegebenen Bußgelder erhoben, die der Stadtkasse zugute kommen.

e) Berechnen Sie die Höhe der Bußgeld-Einnahmen, mit denen die Stadtverwaltung nach dieser Verkehrskontrolle von 1000 Autofahrern rechnen kann. (10P)

f) Aus anderen statistischen Untersuchungen geht hervor, dass bei Kontrollen, die über einen großen Zeitraum an einer festen Kontrollstelle durchgeführt werden, die beim Blitzen gemessene Geschwindigkeit innerhalb geschlossener Ortschaften normalverteilt ist mit einem Mittelwert von 55 km/h.
Man hat außerdem herausgefunden, dass 17,4 % der Autofahrer schneller als 60 km/h fahren.

- Bestätigen Sie unter diesen Annahmen, dass die Standardabweichung der Daten somit ungefähr 5,3 km/h beträgt.
- Die Geschwindigkeiten werden als normalverteilt angenommen.
  Bestimmen Sie dazu die Werte der freien Felder der Tabelle 3 in der Anlage sowie den Erwartungswert der Bußgeldeinnahmen. (25P)

Anlage zur Aufgabe „Autofahrer“

Tabelle 1: Statistische Erhebung

Fahrer kommt von der	Anzahl	Fahrer fährt				
		41-50 km/h	51-60 km/h	61-70 km/h	71-80 km/h	81-90 km/h
Autobahn	700	350	210	120	14	6
Landstraße	300	216	50	30	4	0
insgesamt	1000	566	260	150	18	6

Tabelle 2: Bußgeldkatalog

Für Geschwindigkeitsüberschreitungen gelten laut Bußgeldkatalog-Verordnung (BKatV vom 17.12.2010) die folgenden Regelsätze:

Innerhalb geschlossener Ortschaften (Höchstgeschwindigkeit 50 km/h)

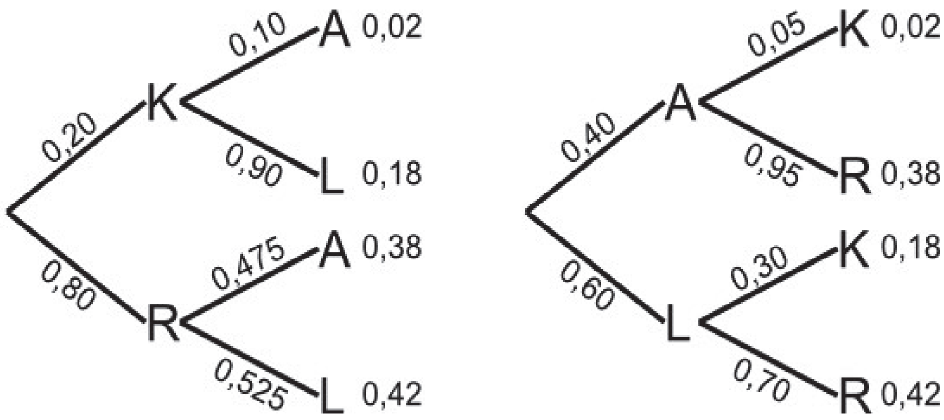
bis 10 km/h	15,- €
11-15 km/h	25,- €
16-20 km/h	35,- €
21-25 km/h	80,- € und 1 Punkt

Tabelle 3: Erwartete Anzahlen pro 1000 geblitzter Fahrer

Geschwindigkeit v in km/h	$50 < v \leq 60$	$60 < v \leq 70$	$70 < v \leq 80$
Insgesamt 1000			

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Zwei Baumdiagramme:



Vierfeldertafel:

<table>
<tr><th></th><th>K</th><th>R</th><th></th></tr>
<tr><td>A</td><td>0,02</td><td>0,38</td><td>0,4</td></tr>
<tr><td>L</td><td>0,18</td><td>0,42</td><td>0,6</td></tr>
<tr><td></td><td>0,2</td><td>0,8</td><td>1</td></tr>
</table>
</td><td>10</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$P(B_1) = P(L) = 0{,}6$
$P(B_2) = P(A \cap K) = 0{,}02$
$P(B_3) = P_A(K) = 0{,}05$
$P(B_4) = P_R(A) = 0{,}475$
$P(B_5) = \binom{10}{4} \cdot 0{,}475^4 \cdot 0{,}525^6 = 0{,}2238461111 \approx 0{,}22$</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$P(A \cap R) \neq P(A) \cdot P(R)$, denn $0{,}38 \neq 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$
Die beiden Ereignisse sind nicht stochastisch unabhängig.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Dieser sehr offen gehaltene Aufgabenteil lässt viele sinnvolle Antworten zu, z.B. dass die ausgerechnete relative Häufigkeit als Wahrscheinlichkeit mit vierstelliger Genauigkeit nicht sinnvoll ist. Hier könnte über eine stochastisch sinnvolle Rundung/Genauigkeit bei n= 2500 nachgedacht werden, bis hin zu einer Abschätzung eines Rundung-/Vertrauensintervalls über eine Approximation der Binomialverteilung durch eine Normalverteilung

oder aber auch über die Frage, ob eine signifikante Abnahme der Anzahl der „Landstraßen-Einbieger“ stattgefunden hat. Das volle Spektrum von 0 bis 10 Punkten kann hier ausgeschöpft werden.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	Höhe des Bußgeldes lt. Tabelle: $260 \cdot 15 + 150 \cdot 25 + 18 \cdot 35 + 4 \cdot 80 = 8760$ Die Stadtverwaltung kann bei einer Verkehrskontrolle von 1000 Autofahrern mit einer Einnahme von 8.760 € rechnen.	5	5	
f)	• Der Mittelwert ist gegeben mit μ = 55. $P(X \le 60) = 1 - 0{,}174 = 0{,}826$ Aus dem Tafelwerk ergibt sich $\Phi(\frac{60-55}{\sigma}) = \Phi(0{,}94)$ Also: $\frac{5}{\sigma} = 0{,}94 \Leftrightarrow \sigma \approx 5{,}3$ Für die Daten der Untersuchung ergibt sich eine stochastische Standardabweichung von 5,3 km/h. • Es gilt also $P(a < v \le b) = \Phi\left(\frac{b-55}{5{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{a-55}{5{,}3}\right)$. Damit erhält man folgendes Ergebnis: (siehe Tabelle 3)		15	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Tabelle 3: Erwartete Anzahlen pro 1000 geblitzter Fahrer

Geschwindigkeit v in km/h	$50 < v \le 60$	$60 < v \le 70$	$70 < v \le 80$
	655	170	2,3