

Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

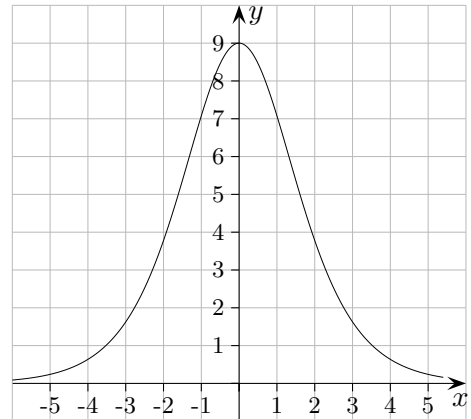
$$f_a(x) = \frac{a \cdot e^x}{(1 + e^x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Schaubild sei K_a .

- a) Die nebenstehende Abbildung zeigt ein Schaubild K_a . Bestimmen Sie den Zahlenwert des zugehörigen Parameters a . Gegeben ist die Funktion g mit

$$g(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes von K_{36} und dem Schaubild von g . Für welche Werte von a hat K_a mit dem Schaubild von g einen Punkt gemeinsam?



- b) Zeigen Sie: Für jedes $a \neq 0$ gilt $f_a(x) = f_a(-x)$, $x \in \mathbb{R}$. K_a und die x -Achse begrenzen eine beidseitig ins Unendliche reichende Fläche. Zeigen Sie, dass diese Fläche einen endlichen Inhalt hat.

Durch

$$F(t) = \frac{36 \cdot e^t}{1 + e^t}$$

wird der Inhalt der Fläche beschrieben, die ein Schimmelpilz auf einer Brotscheibe bedeckt. Dabei wird t in Tagen seit Beobachtungsbeginn und $F(t)$ in cm^2 gemessen.

- c) Zu welchem Zeitpunkt breitet sich der Schimmelpilz am schnellsten aus? Wie groß ist die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit? Weisen Sie nach, dass F eine Differenzialgleichung der Form

$$F'(t) = k \cdot F(t) \cdot [G - F(t)]$$

erfüllt.

Welche Art von Wachstum liegt demnach vor?

Skizzieren Sie das Schaubild von F für $-5 \leq t \leq 5$.

- d) Zeigen Sie: Für kleine Werte von $F(t)$ gilt näherungsweise die Differenzialgleichung $F'(t) = F(t)$. Geben Sie eine mögliche Lösungsfunktion dieser Differenzialgleichung an, die für kleine Werte von $F(t)$ näherungsweise den Inhalt der bedeckten Fläche beschreibt.

Schimmelpilz-Aufgabe Lösungshinweise

Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

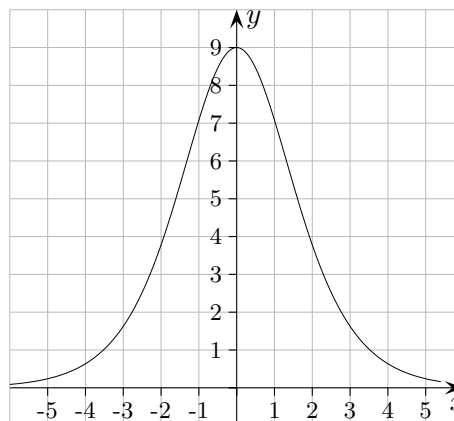
$$f_a(x) = \frac{a \cdot e^x}{(1 + e^x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Schaubild sei K_a .

- a) Die nebenstehende Abbildung zeigt ein Schaubild K_a . Bestimmen Sie den Zahlenwert des zugehörigen Parameters a .
Gegeben ist die Funktion g mit

$$g(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes von K_{36} und dem Schaubild von g . Für welche Werte von a hat K_a mit dem Schaubild von g einen Punkt gemeinsam?



$$e^{2x} + 2e^x - 35 = 0, \quad S(\ln 5 \mid 5)$$

$$e^{2x} + 2e^x + 1 - a = 0, \quad S_a(\ln(\sqrt{a} - 1) \mid \sqrt{a} - 1), \quad a > 1$$

- b) Zeigen Sie: Für jedes $a \neq 0$ gilt $f_a(x) = f_a(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 K_a und die x -Achse begrenzen eine beidseitig ins Unendliche reichende Fläche.
Zeigen Sie, dass diese Fläche einen endlichen Inhalt hat.

Substitution $u = 1 + e^x$

$$A = 2 \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \left(-\frac{a}{1 + e^z} + \frac{a}{2} \right) = a$$

Durch

$$F(t) = \frac{36 \cdot e^t}{1 + e^t}$$

wird der Inhalt der Fläche beschrieben, die ein Schimmelpilz auf einer Brotscheibe bedeckt. Dabei wird t in Tagen seit Beobachtungsbeginn und $F(t)$ in cm^2 gemessen.

- c) Zu welchem Zeitpunkt breitet sich der Schimmelpilz am schnellsten aus?
Wie groß ist die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit?

$$F'(t) = f_{36}(t) \xrightarrow{\text{Graph}} t = 0, \quad F'(0) = 9 \text{ (cm}^2/\text{Tag)}$$

Weisen Sie nach, dass F eine Differentialgleichung der Form

$$F'(t) = k \cdot F(t) \cdot [G - F(t)]$$

erfüllt.

$$G = 36, \quad k = \frac{1}{36}$$

Welche Art von Wachstum liegt demnach vor?

Skizzieren Sie das Schaubild von F für $-5 \leq t \leq 5$.

- d) Zeigen Sie: Für kleine Werte von $F(t)$ gilt näherungsweise die Differentialgleichung $F'(t) = F(t)$.
Geben Sie eine mögliche Lösungsfunktion dieser Differentialgleichung an, die für kleine Werte von $F(t)$ näherungsweise den Inhalt der bedeckten Fläche beschreibt.

$$F'(t) = \frac{1}{36} \cdot F(t) \cdot [36 - F(t)] = F(t) - \frac{1}{36} \cdot (F(t))^2 \approx F(t)$$

$$\text{mit } F(-5) = 0,24 \text{ lautet eine Lösungsfunktion } F^*(t) = 35,6 \cdot e^t$$