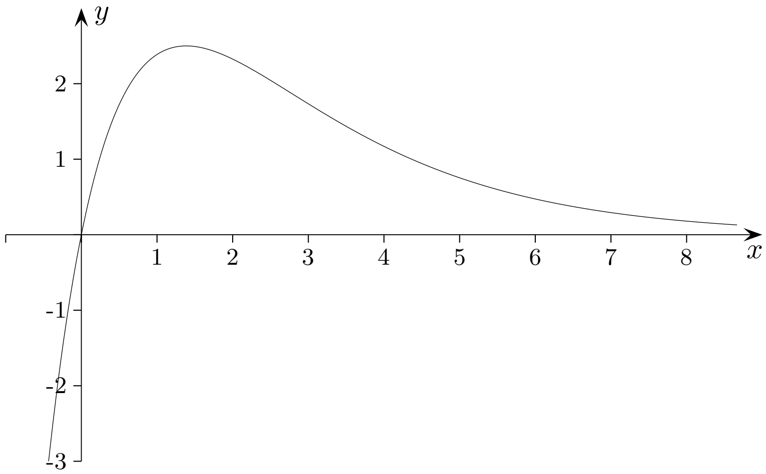
Medikament-Aufgabe LK Abiturprüfung Bayern 2004

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = 10(e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x})$.

Der zugehörige Graph ist nebenstehend skizziert.



1. Untersuchen Sie durch Rechnung

   a) das Verhalten von f für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$,

   b) in welchen Intervallen die Funktionswerte von f positiv bzw. negativ sind,

   c) Lage und Art des Extrempunkts des Graphen von f.

   [Zur Kontrolle: $H(2\ln 2 \mid 2{,}5)$]

2. Einem Patienten wird zum Zeitpunkt $x = 0$ eine bestimmte Menge eines Medikaments verabreicht. Der obige Term $f(x)$ beschreibt die Konzentration dieses Medikaments (Anzahl der Milliliter pro Liter Blut) nach x Stunden.
   Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Konzentration auf 75 % ihres Höchstwerts abgesunken ist.

3. Nun werden die in $\mathbb{R}$ definierten Integralfunktionen $F_a\colon x \to \int_a^x f(t)\,dt$ betrachtet ($a \in \mathbb{R}$).
   Der Graph von F_a wird mit G_a bezeichnet.

   a) Bestimmen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von G_a ohne Ausführung der Integration (kurze Begründung).

   b) Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung von $F_0(x)$ und zeigen Sie, dass gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} F_0(x) = 10$.

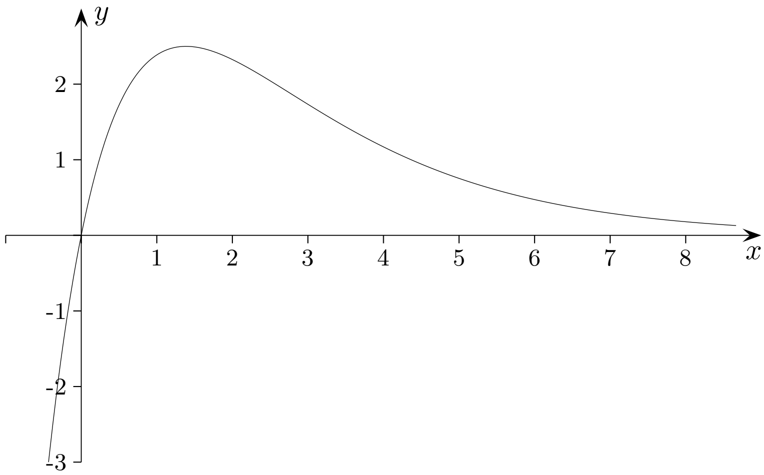
   Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_0. Skizzieren Sie G_0 unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse.

   c) Erklären Sie, warum jede Funktion F_a mit $a > 0$ genau zwei Nullstellen hat (explizite Berechnung der Nullstellen nicht verlangt). Erläutern Sie, warum es Funktionen F_a mit $a < 0$ gibt, die genau eine Nullstelle haben.

Medikament-Aufgabe LK Abiturprüfung Bayern 2004 Lösungen

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = 10(e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x})$.

Der zugehörige Graph ist nebenstehend skizziert.



1. Untersuchen Sie durch Rechnung

 a) das Verhalten von f für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 10e^{-\frac{x}{2}}(1 - e^{-\frac{x}{2}}) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ldots = -\infty$$

 b) in welchen Intervallen die Funktionswerte von f positiv bzw. negativ sind,

$$10e^{-\frac{x}{2}}(1 - e^{-\frac{x}{2}}) > 0 \iff x > 0, \ \ \textit{analog} \ \ f(x) < 0 \iff x < 0$$

 c) Lage und Art des Extrempunkts des Graphen von f.

$$f'(x) = 10(-\tfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + e^{-x}) = 0 \implies x = 2\ln 2$$

$$f''(x) = 10(\tfrac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x})$$

$$f''(2\ln 2) = 10(\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}) < 0$$

$$Max\left(2\ln 2 \mid \frac{5}{2}\right)$$

2. Einem Patienten wird zum Zeitpunkt $x = 0$ eine bestimmte Menge eines Medikaments verabreicht. Der obige Term $f(x)$ beschreibt die Konzentration dieses Medikaments (Anzahl der Milliliter pro Liter Blut) nach x Stunden.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Konzentration auf 75 % ihres Höchstwerts abgesunken ist.

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2} = f(x), \quad z^2 - \frac{16}{3}z + \frac{16}{3} = 0 \quad mit \quad z = e^{\frac{x}{2}} \implies z_1 = \frac{4}{3}, \ z_2 = 4$$

gesuchter Zeitpunkt: $x = 2\ln 4$

3. Nun werden die in $\mathbb{R}$ definierten Integralfunktionen $F_a \colon x \to \int_a^x f(t)\,dt$ betrachtet ($a \in \mathbb{R}$).
Der Graph von F_a wird mit G_a bezeichnet.

 a) Bestimmen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von G_a ohne Ausführung der Integration (kurze Begründung).

Wegen $F_a'(x) = f(x)$ *und* $F_a''(x) = f'(x)$ *gilt:*

F_a *monoton fallend für* $x < 0$, *monoton steigend für* $x > 0$

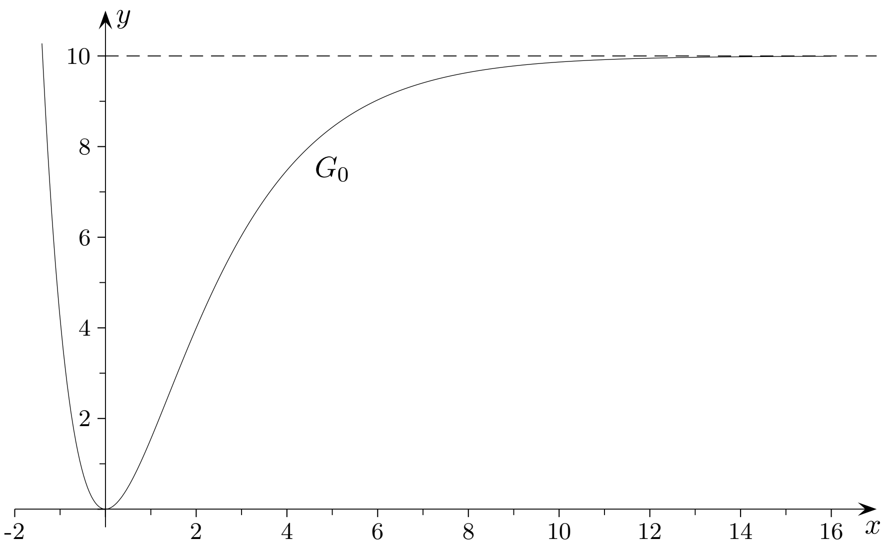
G_a *linksgekrümmt für* $x < 2\ln 2$, *rechtsgekrümmt für* $x > 2\ln 2$

b) Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung von $F_0(x)$ und zeigen Sie, dass gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} F_0(x) = 10$.

$$F_0(x) = 10\left(e^{-x} - 2e^{-\frac{x}{2}} + 1\right)$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_0. Skizzieren Sie G_0 unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse.

$$F_0(2\ln 2) = 2{,}5 \implies W(2\ln 2 \mid 2{,}5)$$



c) Erklären Sie, warum jede Funktion F_a mit $a > 0$ genau zwei Nullstellen hat (explizite Berechnung der Nullstellen nicht verlangt). Erläutern Sie, warum es Funktionen F_a mit $a < 0$ gibt, die genau eine Nullstelle haben.

Integralfunktionen (Inhaltsfunktionen) besitzen mindestens eine Nullstelle und unterscheiden sich lediglich in einer additiven Konstante.
Für eine Nullstelle a mit $a > 0$ wird der Graph um weniger als 10 Einheiten nach unten verschoben. Es liegt dann auch eine negative Nullstelle vor.
Bei einer Verschiebung um mindestens 10 Einheiten nach unten erhalten wir nur eine negative Nullstelle.
Aus $F_0(x) = 10$ folgt $x = -2\ln 2$, für die Nullstelle gilt daher $a \leq -2\ln 2$.