Bevölkerungsentwicklung LK Abiturprüfung Bayern 2005

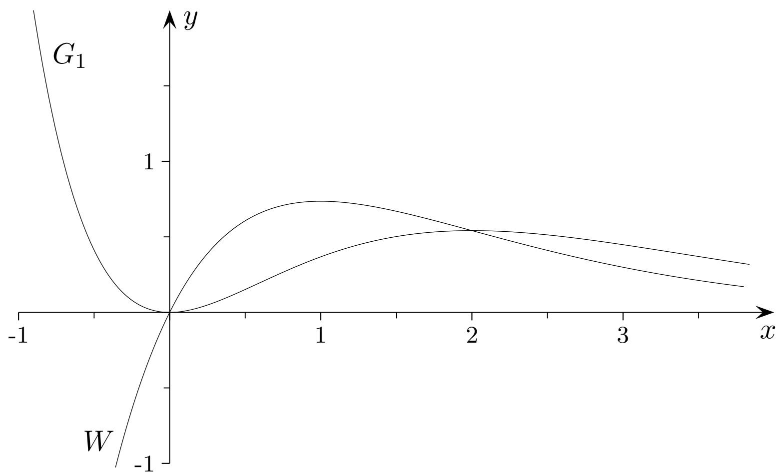
1. Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen
$$f_k\colon \quad x \to (x^2 + 1 - k)e^{-x} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}.$$
Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

   a) Untersuchen Sie f_k auf Nullstellen in Abhängigkeit von k. Bestimmen Sie das Verhalten von f_k für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.

   b) Zeigen Sie, dass sich je zwei verschiedene Graphen G_k nicht schneiden, einander aber beliebig nahe kommen.

   c) Für welche Werte von k besitzt G_k mindestens eine waagrechte Tangente? Zeigen Sie, dass die Punkte von G_k mit waagrechter Tangente auf dem Graphen W der Funktion $w\colon\ x \to 2xe^{-x}$ mit $x \in \mathbb{R}$ liegen.

   d) Die unten stehende Abbildung zeigt die Graphen G_1 und W. Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_2 in die Abbildung ein.



   e) Bestätigen Sie, dass für $k \in \mathbb{R}$ gilt: $f_k(x) = w(x) - f_k'(x)$
   Der Graph begrenzt im ersten Quadranten mit der x-Achse ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück mit endlichem Inhalt. Berechnen Sie diesen Flächeninhalt mit Hilfe der obigen Beziehung.

2. In einer Fachzeitschrift war zu lesen:
„Am oder um den 12. Oktober 1999 hat die Weltbevölkerung die Grenze von sechs Milliarden Menschen überschritten. Zu Beginn des Jahres 2003 lebten bereits 6,274 Milliarden Erdenbürger. Im Jahr 2003 wurden im weltweiten Durchschnitt auf tausend Menschen, die zu Jahresbeginn lebten, 22 Geburten und 9 Todesfälle gezählt.“

   a) Wie viele Kinder wurden 2003 im Durchschnitt näherungsweise pro Minute geboren?
   Wie viele Milliarden Menschen lebten zu Beginn des Jahres 2004?

   b) Sollte sich die Bevölkerungsentwicklung von 2003 in Zukunft nicht ändern, so ließe sich die Anzahl $N(j)$ der Erdenbürger zu Beginn des Jahres j nach der Formel $N(j) = N(2003) \cdot a^{j-2003}$ berechnen. Bestimmen Sie a und das Kalenderjahr, in dem die Zahl von neun Milliarden Menschen überschritten würde.

   c) Bilden Sie die Ableitung der Funktion $N\colon\ x \to N(j)$, $j \in [2003;\ +\infty]$.
   Welcher Zusammenhang besteht zwischen $N(j)$ und $N'(j)$?

1. Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$f_k\colon \quad x \to (x^2 + 1 - k)e^{-x} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}.$$

Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

a) Untersuchen Sie f_k auf Nullstellen in Abhängigkeit von k. Bestimmen Sie das Verhalten von f_k für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.

keine Nullstelle für $k < 1$

eine Nullstelle für $k = 1$ $\quad x = 0$

zwei Nullstellen für $k > 1$ $\quad x_{1/2} = \pm\sqrt{k-1}$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f_k(x) = 0 \quad \text{(l'Hospital)}$$

b) Zeigen Sie, dass sich je zwei verschiedene Graphen G_k nicht schneiden, einander aber beliebig nahe kommen.

$$f_m(x) = f_n(x) \quad \Longrightarrow \quad m = n$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(f_n(x) - f_m(x)\right) = 0$$

c) Für welche Werte von k besitzt G_k mindestens eine waagrechte Tangente? Zeigen Sie, dass die Punkte von G_k mit waagrechter Tangente auf dem Graphen W der Funktion $w\colon\ x \to 2xe^{-x}$ mit $x \in \mathbb{R}$ liegen.

$$f_k'(x) = 0 \iff x^2 - 2x + 1 - k = 0$$

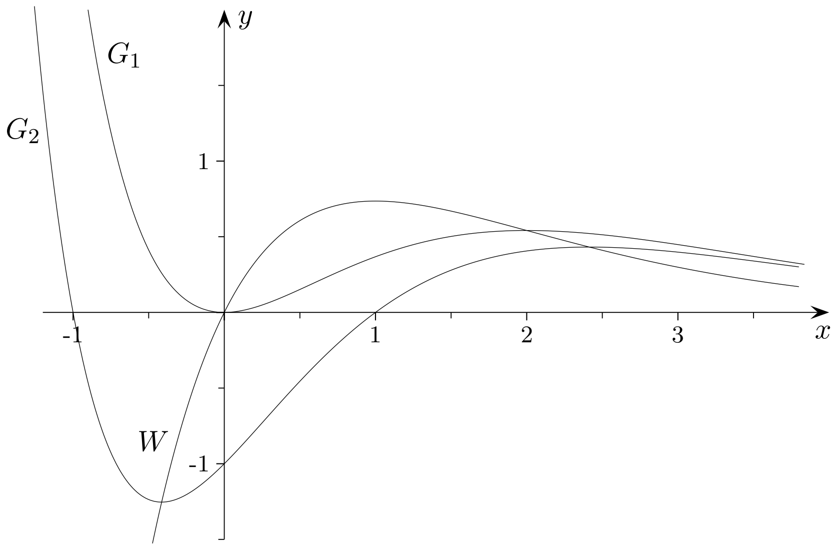
$$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{k}$$

keine waagrechte Tangente für $k < 0$

eine waagrechte Tangente für $k = 0$ $\quad P\left(1 \mid 2e^{-1}\right)$

zwei waagrechte Tangenten für $k > 0$ $\quad P\left(1 \pm \sqrt{k} \mid 2(1 \pm \sqrt{k})e^{-1\mp\sqrt{k}}\right)$

d) Die unten stehende Abbildung zeigt die Graphen G_1 und W. Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_2 in die Abbildung ein.



e) Bestätigen Sie, dass für $k \in \mathbb{R}$ gilt: $f_k(x) = w(x) - f_k'(x)$

Der Graph begrenzt im ersten Quadranten mit der x-Achse ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück mit endlichem Inhalt. Berechnen Sie diesen Flächeninhalt mit Hilfe der obigen Beziehung.

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a f_1(x)\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \left[w(x) - f_1'(x)\right] dx = \ldots = 2$$

$$\text{beachte:} \quad \int_0^a f_1'(x)\,dx = \left[f_1(x)\right]_0^a$$

$$\int 2xe^{-x}\,dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C \quad \text{(partielle Integration)}$$

2. In einer Fachzeitschrift war zu lesen:
„Am oder um den 12. Oktober 1999 hat die Weltbevölkerung die Grenze von sechs Milliarden Menschen überschritten. Zu Beginn des Jahres 2003 lebten bereits 6,274 Milliarden Erdenbürger. Im Jahr 2003 wurden im weltweiten Durchschnitt auf tausend Menschen, die zu Jahresbeginn lebten, 22 Geburten und 9 Todesfälle gezählt."

a) Wie viele Kinder wurden 2003 im Durchschnitt näherungsweise pro Minute geboren?
Wie viele Milliarden Menschen lebten zu Beginn des Jahres 2004?

Geburten im Jahr 2003: $6{,}274 \cdot 10^9 \cdot \frac{22}{1000} = 138 \cdot 10^6$

Geburten pro Minute: $138 \cdot 10^6 : 365 : 24 : 60 = 262{,}6 = 263$

Weltbevölkerung zu Beginn des Jahres 2004: $6{,}274 \cdot 10^9 + 6{,}274 \cdot 10^9 \cdot \frac{22-9}{1000} = 6{,}356 \cdot 10^9$

b) Sollte sich die Bevölkerungsentwicklung von 2003 in Zukunft nicht ändern, so ließe sich die Anzahl $N(j)$ der Erdenbürger zu Beginn des Jahres j nach der Formel $N(j) = N(2003) \cdot a^{j-2003}$ berechnen. Bestimmen Sie a und das Kalenderjahr, in dem die Zahl von neun Milliarden Menschen überschritten würde.

$$6{,}356 \cdot 10^9 = 6{,}274 \cdot 10^9 \cdot a^{2004-2003} \quad \Longrightarrow \quad a = 1{,}013$$

oder einfacher (Wachstumsfaktor unabhängig vom Anfangsbestand):

$$1000 + 22 - 9 = 1000 \cdot a \quad \Longrightarrow \quad a = 1{,}013$$

$$9 \cdot 10^9 = 6{,}274 \cdot 10^9 \cdot 1{,}013^{x-2003} \quad \Longrightarrow \quad x = 2030{,}9$$

Gegen Ende des Jahres 2030 würden 9 Milliarden überschritten.

c) Bilden Sie die Ableitung der Funktion $N\colon\ x \to N(j),\ j \in [2003;\ +\infty]$.
Welcher Zusammenhang besteht zwischen $N(j)$ und $N'(j)$?

$$N'(j) = N(2003) \cdot a^{j-2003} \cdot \ln a$$

$$N'(j) = \ln a \cdot N(j)$$