

Gebiet L 1

Aufgabe 1.1
Analysis

Gegeben sind Funktionen $f_{a,b,c,d}$ durch

$$y = f_{a,b,c,d}(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx + d}, \quad x, a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ und } cx + d \neq 0.$$

- a) Es wird zunächst die Funktion $f_{a,b,c,d}$ mit $a = 4$, $b = -5$, $c = 2$ und $d = -4$ betrachtet; diese Funktion wird im Folgenden kurz mit f bezeichnet.

Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen und auf Polstellen und weisen Sie nach, dass die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{x}{2} + 3$ eine Asymptote des Graphen der Funktion f ist.

Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f .

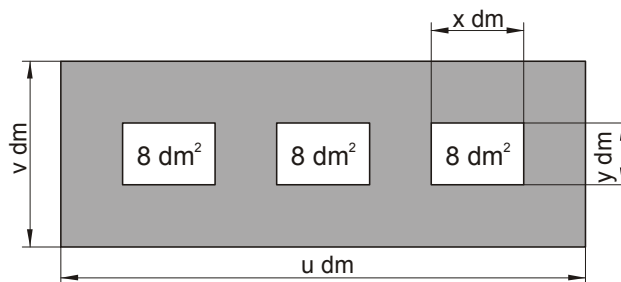
Ermitteln Sie das globale Maximum der Funktion f im Intervall $3 \leq x \leq 6$ und begründen Sie Ihr Vorgehen.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-8 \leq x \leq 8$.

- b) Der Graph der Funktion f und die x -Achse schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

- c) Von einer der Funktionen $f_{a,b,c,d}$ sind folgende Eigenschaften bekannt:
- Eine Nullstelle ist 2.
 - Die Polstelle ist 0.
 - Die Funktion hat an der Stelle 1 den Funktionswert -2 .
 - Der Graph der Funktion hat an der Stelle 1 den Anstieg 3.
- Ermitteln Sie dafür die Werte der Parameter a , b , c und d .

Ein Schornstein soll aus drei gleichen rechteckigen Schächten mit je $8,00 \text{ dm}^2$ Flächeninhalt bestehen. Die Wände, die die Schächte umschließen, sollen jeweils $2,00 \text{ dm}$ stark sein. Die Abbildung zeigt einen Grundriss dieses Schornsteins.



(Abbildung nicht maßstäblich)

- d) Der Flächeninhalt der Grundrissfläche des Schornsteins (in der Abbildung grau unterlegt) soll minimal werden. Ermitteln Sie für diesen Fall die Werte von u und v .

Gebiet L 1

Aufgabe 1.2
Analysis

Gegeben sind die Funktionen f_a durch

$$y = f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2a}x, \quad x, a \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ und } x > 0.$$

Ihre Graphen seien G_a .

- a) Untersuchen Sie die Graphen G_a auf die Existenz von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen sowie auf Art und Lage von Extrem- und Wendepunkten.

[mögliches Teilergebnis zur Kontrolle: Abszissen der Tiefpunkte: $\sqrt[3]{a^2}$]

Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Kurve k , auf der die Tiefpunkte der Graphen G_a liegen (Ortskurve).

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen f_a für $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow \infty$.

Zeichnen Sie die Kurve k und den Graphen G_1 für $x \leq 8$.

- b) Die Tangente und die Normale im Tiefpunkt T_a jedes Graphen G_a und die Koordinatenachsen begrenzen ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $A(a)$.
Weisen Sie nach, dass kein Wert des Parameters a existiert, für den der Flächeninhalt $A(a)$ ein lokales Minimum annimmt.

Untersuchen Sie, ob ein Wert des Parameters a existiert, für den der Abstand $d(a)$ der Tiefpunkte T_a vom Koordinatenursprung am kleinsten ist. Ermitteln Sie gegebenenfalls diesen Wert des Parameters.

- c) Die Parallele zur y -Achse durch den Tiefpunkt T_1 , der Graph G_1 und die Koordinatenachsen begrenzen eine nach oben offene Fläche.
Weisen Sie nach, dass die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche endlich ist, dass aber die Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers, der bei der Rotation dieser Fläche um die x -Achse entsteht, nicht endlich ist.

Gebiet L 2

Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte

$$A(3 \mid 5 \mid -10), \quad B(93 \mid -55 \mid -30), \quad C(3 \mid 8 \mid -19) \quad \text{und} \quad D(51 \mid -32 \mid -27)$$

gegeben.

- a) Die Punkte A und B bestimmen eine Gerade g; die Punkte C und D bestimmen eine Gerade h.
Stellen Sie jeweils eine Gleichung für die Geraden g und h auf und weisen Sie nach, dass diese Geraden zueinander windschief liegen.

Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels unter dem die Geraden g und h zueinander verlaufen.

Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E auf, die die Gerade g enthält und parallel zur Geraden h verläuft.

[mögliches Ergebnis zur Kontrolle: $4x + 3y + 9z + 63 = 0$]

In einem Salzbergwerk wird der Verlauf zweier Stollen im oben genannten kartesischen Koordinatensystem durch die Strecken \overline{AB} (Stollen I) und \overline{CD} (Stollen II) beschrieben. Die als eben betrachtete Erdoberfläche werde durch die x-y-Ebene beschrieben. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 10 m.

- b) Eine Studie besagt, dass die kürzeste Verbindung der Stollen dem Abstand der Geraden g und h entspricht.
Berechnen Sie die Länge dieser kürzesten Verbindung.
- c) Oberhalb der Ebene E (siehe Aufgabe a) soll ein Gasspeicher mit einem Fassungsvermögen von 7000 m^3 , der die Form einer Halbkugel mit dem Mittelpunkt A hat, angelegt werden.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Kugel, auf der diese Halbkugel liegt.

Eine senkrecht zur Erdoberfläche verlaufende Zuleitung soll im höchsten Punkt S des Gasspeichers einmünden.

Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes S und berechnen Sie das Gradmaß des Winkels unter dem die Zuleitung zur Ebene E verläuft.

- d) Für den Havariefall wird gefordert, dass durch eine senkrecht zur Erdoberfläche verlaufende Bohrung von einem Punkt R_0 der Erdoberfläche aus beide Stollen erreichbar sind. Diese Bohrung treffe auf den Stollen I im Punkt R_1 und auf den Stollen II im Punkt R_2 .
Begründen Sie, dass ein derartiger Punkt R_0 existiert und ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte R_0 , R_1 und R_2 .

Gebiet L 2

Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

Gegeben seien in einem kartesischen Koordinatensystem die drei Punkte

$$P(13 \mid 10,5 \mid 21,5), Q(2,5 \mid 3,5 \mid 0,5) \text{ und } T(7,5 \mid 1 \mid 7).$$

Die Gerade durch die Punkte P und Q sei eine Symmetrieachse s eines Würfels mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G und H.

- a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden s an und berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, welchen die Gerade s mit der durch die Punkte Q und T verlaufenden Geraden einschließt.
- b) Die Kante \overline{AE} des Würfels liegt parallel zur Geraden s und wird vom Punkt T halbiert. Berechnen Sie die Maßzahl der Kantenlänge des Würfels und ermitteln Sie die Koordinaten des Eckpunktes E($x_E \mid y_E \mid z_E > 5$) des Würfels.
[Ergebnis zur Kontrolle: E(9 | 2 | 10)]
- c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte D_1 und D_2 der Symmetrieachse s, in denen diese die Oberfläche des Würfels durchstößt.
- d) Begründen Sie ohne Berechnung, dass für die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks TPQ gilt: $A = \frac{1}{2} |\vec{TQ} \times \vec{TP}|$.

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die gegebenen Punkte T, Q und P die Gleichung

$$|\vec{TQ} \times \vec{TP}| = |\vec{TP} \times \vec{QP}| \text{ gilt.}$$

Diese Gleichung gilt auch für beliebige Punkte T, Q und P (T, Q und P sollen nicht auf ein und derselben Geraden liegen).

Deuten Sie dafür die Gleichung geometrisch.

Gebiet L 3**Aufgabe 3.1
Stochastik**

In einer Firma werden Dichtungen produziert. Die Dichtungen werden unabhängig voneinander hergestellt. Die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Dichtung beträgt 5 %.

- a) Der Produktion wird eine Stichprobe von 50 Dichtungen entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der mehr als drei Dichtungen fehlerhaft sind.

Berechnen Sie den Umfang einer Stichprobe, wenn in dieser mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine fehlerhafte Dichtung enthalten sein soll.

- b) Für die Qualitätskontrolle der Dichtungen wird ein Prüfgerät benutzt, das mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % eine fehlerhafte Dichtung als fehlerhaft aussondert. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 % werden aber auch fehlerfreie Dichtungen als fehlerhaft ausgesondert.

Bei einer Qualitätskontrolle wird eine Dichtung durch das Prüfgerät als fehlerhaft ausgesondert.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der es sich dabei tatsächlich um eine fehlerhafte Dichtung handelt.

- c) Eine Baumarktkette soll mit 1000 Dichtungen beliefert werden. Als Ersatz für fehlerhafte Dichtungen will die Firma zusätzlich einige fehlerfreie Dichtungen liefern. Die Lieferung soll dann mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % fehlerfreie Dichtungen enthalten.

Berechnen Sie, wie viele zusätzliche fehlerfreie Dichtungen mindestens zu liefern sind.

- d) Die Lieferung an die Baumarktkette erfolgt in 10 Packungen zu je 100 Dichtungen.
Für eine Stichprobe werden jeder Packung zufällig fünf Dichtungen entnommen. Sind in der so entstandenen Stichprobe mehr als vier fehlerhafte Dichtungen, so wird die Lieferung zurückgewiesen.

Konstruieren Sie für diesen Sachverhalt einen Test und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.

Angenommen, die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Dichtung beträgt 10 %.

Zeigen Sie, dass dann die Wahrscheinlichkeit für das Risiko, die Lieferung irrtümlich anzunehmen, mehr als 40 % beträgt.

Gebiet L 3

Aufgabe 3.2
Stochastik

Eine Unternehmensgruppe untersucht in einem Langzeittest eine Autowaschanlage, die über ein neuartiges Sicherheitssystem zum Schutz der Autos vor Beschädigungen verfügt. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der täglichen störungsbedingten Abschaltungen der Anlage. Es ist die nachstehende Wahrscheinlichkeitsverteilung ermittelt worden:

$X = x_i$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,56	0,24	0,09	0,07	0,04

- a) Beschreiben Sie verbal das Ereignis, das durch $1 \leq X < 4$ dargestellt wird und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.
Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X und interpretieren Sie diesen Erwartungswert.

Bei einer technischen Überprüfung der Anlage wird festgestellt, dass die störungsbedingten Abschaltungen unabhängig voneinander erfolgen und 75 % dieser Abschaltungen auf eine Übersensibilisierung des Sicherheitssystems zurückzuführen sind.

- b) Berechnen Sie näherungsweise mithilfe der Standardnormalverteilung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 175 störungsbedingten Abschaltungen mindestens 125 auf Übersensibilisierung zurückzuführen sind.

Das Sicherheitssystem der Anlage wird neu eingestellt. Es sollen nur noch höchstens 40 % aller störungsbedingten Abschaltungen durch Übersensibilisierung verursacht werden. Wenn dieses Kriterium zutrifft, will die Unternehmensgruppe weitere dieser Anlagen kaufen.

- c) Entwickeln Sie einen Signifikanztest (Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$; Anzahl der störungsbedingten Abschaltungen $n = 100$) zur Überprüfung des Kriteriums.
Geben Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.

Unter 100 störungsbedingten Abschaltungen werden nun 39 durch Übersensibilisierung festgestellt.

Entscheiden und begründen Sie, ob weitere Anlagen gekauft werden.

- d) Charakterisieren Sie für den in Teilaufgabe c) entwickelten Signifikanztest mögliche Auswirkungen eines Fehlers 2. Art sowohl aus der Sicht der Unternehmensgruppe als auch aus der Sicht des Anlagenproduzenten.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen möglichen Fehler 2. Art.

Aufgabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	6	Untersuchen der Funktion auf Nullstellen, auf Polstellen und Nachweis der Asymptote, z. B.: Nullstellen: $x_1 = -5$; $x_2 = 1$ Polstelle: $x_P = 2$ Es gilt: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (\frac{x}{2} + 3)) = 0$. Die Gerade ist eine Asymptote von f.
	9	Berechnen der Koordinaten der lokalen Extrempunkte, z. B.: Hinreichende Bedingung für Hochpunkt $H(2 - \sqrt{7} \mid 4 - \sqrt{7})$ erfüllt, wobei $f''(2 - \sqrt{7}) = -\frac{1}{7}\sqrt{7}$; $H(-0,65 \mid 1,35)$ Hinreichende Bedingung für Tiefpunkt $T(2 + \sqrt{7} \mid 4 + \sqrt{7})$ erfüllt, wobei $f''(2 + \sqrt{7}) = \frac{1}{7}\sqrt{7}$; $T(4,65 \mid 6,65)$
	3	Ermitteln des globalen Maximums und Begründen des Vorgehens, z. B.: Das globale Maximum ist der größte Funktionswert im betrachteten Intervall. Da die Funktion f im Intervall $3 \leq x \leq 6$ stetig ist und genau ein lokales Extremum, und zwar ein Minimum, hat, kann der größte Funktionswert nur am Intervallende liegen, also f(3) oder f(6) sein. Das gesuchte globale Maximum ist f(3), da $f(3) = 8 > f(6) = 6,875$.
	4	Zeichnen des Graphen der Funktion f
b)	7	Berechnen der Maßzahl des Inhalts der Fläche, z. B.: Stammfunktion $F(x) = \frac{x^2}{4} + 3x + \frac{7}{2} \ln 2x - 4 $ $A = \int_{-5}^1 f(x) dx = [F(x)]_{-5}^1 = 12 - 3,5 \cdot \ln 7 \approx 5,19$
c)	7	Ermitteln der Werte der Parameter a, b, c und d, z. B.: Polstelle 0 $\Rightarrow d = 0$ $f(2) = \frac{4 + 2a + b}{2c} = 0 \Rightarrow 4 + 2a + b = 0$ (I) $f(1) = \frac{1 + a + b}{c} = -2 \Rightarrow 1 + a + b = -2c$ (II) $f'(1) = \frac{1 - b}{c} = 3 \Rightarrow 1 - b = 3c$ (III) Aus (I), (II) und (III) folgt: $a = -1$, $b = -2$ und $c = 1$.
d)	9	Ermitteln der Werte u und v, z. B.: Zielfunktion: $A(x) = 12x + \frac{64}{x} + 32$ mit $x > 0$ $A'(x) = 12 - \frac{64}{x^2} = 0 \Rightarrow x_{E1/2} = \pm \sqrt{\frac{16}{3}} \approx \pm 2,31$; Wegen $x > 0$ ist $x_E = 2,31$. $A''(x) = \frac{128}{x^3}$; $A''(2,31) > 0 \Rightarrow A(2,31)$ ist lokales Minimum. Das lokale Minimum ist zugleich das globale Minimum. $u = 14,93$ und $v = 7,46$
45		

Aufgabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	11	<p>Untersuchen der Graphen auf die Existenz von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen sowie auf Art und Lage von Extrem- und Wendepunkten, z. B.: keine Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen</p> <p>hinreichende Bedingung für Tiefpunkt $T_a \left(\sqrt[3]{a^2} \mid \frac{3}{2\sqrt[3]{a}} \right)$ erfüllt, wobei</p> $f_a'' \left(\sqrt[3]{a^2} \right) = \frac{3}{4\sqrt[3]{a^5}} > 0$ <p>notwendige Bedingung für Wendepunkte für kein $x \in D_{f_a}$ erfüllt</p> <p>3 Ermitteln einer Gleichung der Kurve k, z. B.: $y = \frac{3}{2\sqrt{x}}$</p> <p>4 Untersuchen des Verhaltens der Funktionen f_a für $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow \infty$, z. B.: $\lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = \infty$</p> <p>5 Zeichnen der Kurve k und des Graphen G_1</p>
b)	5	<p>Nachweisen, dass $A(a)$ nicht minimal werden kann, z. B.:</p> $A(a) = \sqrt[3]{a^2} \cdot \frac{3}{2\sqrt[3]{a}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{a}$ <p>notwendige Bedingung für kein a erfüllt \Rightarrow Es existiert kein lokales Minimum.</p> <p>7 Untersuchen, ob $d(a)$ minimal wird und Ermitteln des Wertes für a, z. B.:</p> $[d(x)]^2 = \overline{OT}_a^2 = x^2 + \frac{9}{4x},$ <p>hinreichendes Kriterium erfüllt für $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{9} \Rightarrow$ Es existiert ein lokales Minimum, das zugleich globales Minimum ist.</p> <p>Wert des Parameters: $a = \frac{3}{4}\sqrt{2}$</p>
c)	10	<p>Nachweise zum Flächeninhalt und Volumen, z. B.:</p> $A_1 = \lim_{u \rightarrow 0} \int_u^1 \left(x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x \right) dx = 2,25$ $V = \lim_{u \rightarrow 0} \pi \int_u^1 \left(x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x \right)^2 dx = \lim_{u \rightarrow 0} \pi \left[\ln x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{12}x^3 \right]_u^1 = \infty$

Aufgabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	7	<p>Aufstellen von Gleichungen für die Geraden g und h und Nachweisen der windschiefen Lage, z. B.:</p> $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -19 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$ <p>Zeigen, dass für Richtungsvektoren gilt: $\vec{v}_g \neq r \cdot \vec{v}_h, r \in \mathbb{R}$ Zeigen, dass das Gleichungssystem aus den Geradengleichungen keine Lösung besitzt; Schlussfolgerung</p> <p>2 Berechnen des Gradmaßes des Winkels, z. B.:</p> $\cos \angle(g, h) = \cos \angle(\vec{v}_h, \vec{v}_g) = \frac{86}{11\sqrt{62}} \Rightarrow \angle(g, h) \approx 6,8^\circ$ <p>5 Ermitteln einer Koordinatengleichung der Ebene E, z. B.:</p> $\vec{v}_h \times \vec{v}_g = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \vec{n} \wedge \vec{OA} \cdot \vec{n} = -63; \Rightarrow E: 4x + 3y + 9z + 63 = 0$
b)	3	<p>Berechnen der kürzesten Entfernung, z. B.:</p> $d(g, h) = d(h, E) = d(C, E) = \left \frac{1}{\sqrt{106}} (12 + 24 - 171 + 63) \right = \frac{72}{\sqrt{106}} \approx 6,99$ <p>\Rightarrow kürzeste Entfernung: 70 m</p>
c)	2	<p>Ermitteln einer Kugelgleichung, z. B.:</p> $r \approx \frac{1}{10} \sqrt[3]{\frac{21000}{2\pi}} \approx 1,5 \Rightarrow r^2 = (x - 3)^2 + (y - 5)^2 + (z + 10)^2$ <p>4 Ermitteln der Koordinaten von S und Berechnen des Gradmaßes des Winkels, z. B.:</p> $\vec{OS} = \vec{OA} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} \Rightarrow S(3 \mid 5 \mid -8,5)$ $\sin \alpha = \frac{9}{\sqrt{106}} \Rightarrow \alpha \approx 60,9^\circ$
d)	7	<p>Begründen der Existenz von R_0 und Ermitteln der Koordinaten der Punkte R_0, R_1 und R_2, z. B.:</p> <p>(1) R_0 ist Schnittpunkt der auf die x-y-Ebene projizierten Geraden g und h. \Rightarrow I $3 + 9t = 3 + 6s$ II $5 - 6t = 8 - 5s$ $\Rightarrow t = 2, s = 3$</p> <p>(2) $0 \leq t \leq 10 \wedge 0 \leq s \leq 8$ (1) \wedge (2) \Rightarrow Existenz von R_0</p> <p>$R_0(21 \mid -7 \mid 0), \quad R_1(21 \mid -7 \mid -14), \quad R_2(21 \mid -7 \mid -22)$</p>
	30	

Aufgabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	5	Angeben einer Geradengleichung und Berechnen des Gradmaßes des Schnittwinkels, z. B.: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{QT} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2,5 \\ 6,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{3}\sqrt{6} \Rightarrow \varphi \approx 35,3^\circ$
b)	8	Berechnen der Maßzahlen und Ermitteln der Koordinaten des Eckpunktes, z. B.: (M: Lotfußpunkt des Lotes von T auf s) $\sin \varphi = \frac{ \overline{MT} }{ \overline{QT} } \Rightarrow \overline{MT} = \frac{7}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \text{Kantenlänge } k_W = 7$ $\vec{OE} = \vec{OT} + \frac{k_W}{2} \cdot \frac{\vec{PQ}}{ \vec{PQ} } \Rightarrow E(9 2 10)$
c)	8	Berechnen der Koordinaten der Durchstoßpunkte, z. B.: $E_E: 3x + 2y + 6z - 91 = 0$ $E_E \cap s \Rightarrow D_1(7 6,5 9,5)$ $\vec{OD}_2 = \vec{OD}_1 + 2 \cdot \vec{ET} \Rightarrow D_2(4 4,5 3,5)$
d)	2	Begründen, z. B.: \vec{TQ}, \vec{TP} : Spannvektoren des Parallelogramms mit den Seiten \overline{TQ} und \overline{TP} , welches in zwei zueinander kongruente Teildreiecke zerlegt werden kann; eines der beiden Dreiecke ist das Dreieck PQT; der Betrag des Vektorproduktes ist gleich der Maßzahl des Flächeninhaltes des Parallelogramms 3 Zeigen der Gültigkeit der Gleichung, z. B.: $ \vec{TQ} \times \vec{TP} = \vec{TP} \times \vec{QP} = \sqrt{14706,125}$ 4 Angeben einer geometrischen Deutung, z. B.: Die angegebenen Vektorprodukte können zur Berechnung der Maßzahlen der Flächeninhalte der Parallelogramme mit den Seiten \overline{TQ} und \overline{TP} bzw. \overline{PQ} und \overline{PT} verwendet werden. Diese beiden Parallelogramme sind flächengleich. Jedes der beiden Parallelogramme kann in zwei zueinander kongruente Dreiecke zerlegt werden, von denen jeweils ein Dreieck das Dreieck PQT ist. Mithin sind die berechneten Flächeninhalte gleich.
30		

Aufgabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	2	Berechnen der Wahrscheinlichkeit für mehr als drei fehlerhafte Dichtungen, z. B.: X: Anzahl fehlerhafter Dichtungen; $X \sim B_{50; 0,05}$ $P(X > 3) = 0,2396$
	5	Berechnen des Umfangs einer Stichprobe, z. B.: X_n : Anzahl fehlerhafter Dichtungen; $X_n \sim B_{n; 0,05}$ $P(X_n \geq 1) \geq 0,95 \Leftrightarrow n \geq \frac{\lg 0,05}{\lg 0,95} = 58,40$ Mindestumfang der Stichprobe: 59
b)	5	Ermitteln der Wahrscheinlichkeit für das Aussondern einer tatsächlich fehlerhaften Dichtung, z. B.: A: Dichtung ausgesondert; F: Dichtung fehlerhaft $P(F) = 0,05$; $P(\bar{F}) = 0,95$; $P_F(A) = 0,95$ $P_{\bar{F}}(A) = 0,005$ nach Satz von Bayes: $P_A(F) = \frac{P(F) \cdot P_F(A)}{P(\bar{F}) \cdot P_{\bar{F}}(A) + P(F) \cdot P_F(A)} = 0,9091$
c)	4	Berechnen der Anzahl zusätzlicher Dichtungen, z. B.: Y: Anzahl fehlerhafter Dichtungen; $Y \sim B_{1000; 0,05}$ $\mu = 50$; $\sigma = 6,89$ $P(Y \leq k) \geq 0,9 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k + 0,5 - \mu}{\sigma}\right) \geq 0,9 \Leftrightarrow k \geq 58,38$ Mindestens 59 fehlerfreie Dichtungen sind zusätzlich zu liefern.
d)	6	Konstruieren eines Tests und Berechnen der Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art, z. B.: $H_0: p_0 \leq 0,05$ Z: Anzahl fehlerhafter Dichtungen in der Stichprobe bei wahrer H_0 gilt $Z \sim B_{50; 0,05}$ Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{ 5; 6; \dots; 50 \}$ Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art: $P(Z > 4) = 0,1036$
	3	Zeigen, dass das Risiko mehr als 40 % beträgt, z. B.: Es ist $p_1 = 0,1$ und damit $Z \sim B_{50; 0,1}$. $P(Z \leq 4) = 0,4312$
25		

Aufgabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	6	Verbale Beschreibung, Berechnen der Wahrscheinlichkeit, des Erwartungswertes $E(X)$ und Interpretieren, z. B.: Die Anlage ist täglich mindestens einmal, aber weniger als viermal störungsbedingt abgeschaltet. $P(1 \leq X < 4) = 0,40$; $E(X) = 0,79$ Auf lange Sicht ist eine durchschnittliche störungsbedingte Abschaltung von 0,8 zu erwarten, also weniger als eine tägliche störungsbedingte Abschaltung.
b)	6	Berechnen der Wahrscheinlichkeit, z. B.: Zufallsgröße Y : Anzahl der störungsbedingten Abschaltungen durch Übersensibilisierung; $Y \sim B_{175; 0,75}$ $P(Y \leq k - 1) \approx \Phi\left(\frac{(k - 1) - \mu + 0,5}{\sigma}\right)$ $k = 125$; $\mu = E(Y) = 131,25$; $\sigma = 5,73$ $P(Y \geq 125) = 1 - P(Y \leq 124) = 1 - \Phi(-1,18) = 0,881$
c)	5	Entwickeln eines Signifikanztests, z. B.: Z : Anzahl der störungsbedingten Abschaltungen durch Übersensibilisierung; $Z \sim B_{100; 0,40}$ $H_0: p_0 \leq 0,40$ Große Werte der ZG Z sprechen gegen H_0 . \Rightarrow rechtsseitiger Signifikanztest mit $\bar{A} = \{k; k + 1; \dots; 100\}$ $P(Z \geq k) = 1 - P(Z \leq k - 1) = 1 - B_{100; 0,40}(\{0; 1; \dots; k - 1\}) \leq 0,05$ $\Leftrightarrow B_{100; 0,40}(\{0; 1; \dots; k - 1\}) \geq 0,95 \Rightarrow k - 1 = 48$; $k = 49$ 2 Angeben des Ablehnungsbereichs und Berechnen der Wahrscheinlichkeit, z. B.: $\bar{A} = \{49; 50; \dots; 100\}$; $\alpha = 1 - B_{100; 0,40}(\{0; 1; \dots; 48\}) = 1 - 0,9577 = 0,0423$ 2 Entscheiden und Begründen, z. B.: Da die 40 % - Angabe (Kriterium) nicht abgelehnt werden kann ($Z = 39$ und $Z \notin \bar{A}$), werden weitere Anlagen gekauft.
d)	2	Charakterisieren möglicher Auswirkungen eines Fehlers 2. Art, z. B.: <ul style="list-style-type: none"> - Kauf von weiteren Anlagen, obwohl das Kriterium nicht erfüllt ist; keine wirklich verbesserten Anlagen erworben - Anlagenproduzent kann Imageschäden erleiden, da die Anlagen nicht verbessert worden sind 2 Berechnen einer möglichen Fehlerwahrscheinlichkeit, z. B.: Wahl eines mögliche Wertes p_1 : $p_1 = 0,60$ $\beta = B_{n; p_1}(A) = B_{100; 0,60}(\{0; 1; \dots; 48\}) = 0,0100$; $\beta \approx 1 \%$
25		