Gebiet L 1 **Aufgabe 1.1**
Analysis

Gegeben sind die Funktionen f_a durch

$$y = f_a(x) = x - 2 + e^{1-ax}, \qquad a, x \in R, a > 0.$$

Ihre Graphen seien mit G_a bezeichnet.

a) Jeder Graph G_a hat genau einen Extrempunkt.
Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art dieses Extrempunktes.

[Teilergebnis zur Kontrolle: $P_a\left(\frac{1+\ln a}{a} \middle| f_a\left(\frac{1+\ln a}{a}\right)\right)$]

Der Extrempunkt genau eines Graphen G_a liegt auf der Winkelhalbierenden des I. Quadranten.
Ermitteln Sie den Wert des zugehörigen Parameters a.

Weisen Sie nach, dass die Gerade mit der Gleichung $y = x - 2$ Asymptote der Graphen G_a ist und dass die Graphen G_a stets oberhalb dieser Asymptote liegen.

Zeichnen Sie den Graphen $G_{0,5}$ und dessen Asymptote im Intervall $-2 \le x \le 5$ in ein und dasselbe Koordinatensystem.

b) Der Graph $G_{0,5}$, die Asymptote mit der Gleichung $y = x - 2$, die y-Achse und eine beliebige Gerade mit der Gleichung $x = b$, $b \in R$ und $b > 0$, begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie die Maßzahl A(b) des Inhalts dieser Fläche.

Ermitteln Sie alle Werte des Parameters b für den Fall, dass die Maßzahl A(b) im Intervall $2e - 0,01 < A(b) < 2e + 0,01$ liegt.

c) Jede Gerade mit der Gleichung $x = c$, $c \in R$, schneidet den Graphen $G_{0,5}$ in einem Punkt P und den Graphen $G'_{0,5}$ der Ableitungsfunktion $f'_{0,5}$ in einem Punkt Q.
Berechnen Sie den Wert des Parameters c, so dass die Strecke $\overline{PQ}$ minimal wird.

Der Graph $G'_{0,5}$ und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig. Diese Fläche erzeugt bei der Rotation um die x-Achse einen Körper.
Berechnen Sie die Maßzahl seines Volumens.

Gebiet L 1 **Aufgabe 1.2**
Analysis

Für jeden Wert des Parameters a ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$y = f_a(x) = \frac{27 - ax^3}{3x^2}; \qquad x \in R,\ x \neq 0 \text{ und } a \in R,\ a > 0.$$

Die Graphen der Funktionen f_a werden mit G_a bezeichnet.

a) Untersuchen Sie die Graphen G_a auf Schnittpunkte mit der x-Achse, lokale Extrempunkte sowie Wendepunkte und ermitteln Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte.

Geben Sie die Art der lokalen Extrempunkte und eine Gleichung der Kurve an, auf der die lokalen Extrempunkte liegen (Ortskurve).

Ermitteln Sie die Gleichungen aller Asymptoten der Graphen G_a.

Zeichnen Sie den Graphen G_1 und die zugehörigen Asymptoten für $-6 \leq x \leq 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

b) Die vom Punkt $P(x \mid f_1(x))$ mit $x < 0$ auf die Koordinatenachsen gefällten Lote sowie die Koordinatenachsen selbst schließen jeweils ein Rechteck ein.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P, so dass der Flächeninhalt des Rechtecks minimal ist.

c) Durch die Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{x}{3}$, den Graphen G_1 sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = 3$ und $x = u$ ($u > 0$ und $u \neq 3$) wird jeweils eine Fläche vollständig begrenzt.

Für $u > 3$ soll die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche 1,5 betragen.
Berechnen Sie dafür den Wert von u.

Ermitteln Sie die Maßzahl A(u) des Inhalts dieser Flächen für den Fall $0 < u < 3$ und für den Fall $u > 3$.

Untersuchen Sie A(u) sowohl für $u \to \infty$ als auch für $u \to 0$.

Gebiet L 2 **Aufgabe 2.1**
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind
die Punkte $A(5 \mid 4 \mid -2)$ und $B(-1 \mid -2 \mid -2)$ sowie
die Punktmenge $P_k(2k+1 \mid -k \mid 2k)$, $k \in R$,
gegeben.

a) Die Punkte A und B bestimmen eine Gerade g, die Punkte der Punktmenge P_k liegen auf einer Geraden h.
Stellen Sie für die Geraden g und h je eine Gleichung auf und zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief zueinander liegen.

Der Punktmenge P_k gehört genau ein Punkt C an, so dass die Punkte A, B und C Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C.

Ermitteln Sie die Maßzahl des Abstandes des Punktes C von der Geraden g.

b) Die Punktmenge P_k und der Punkt A bestimmen eine Ebene E.
Stellen Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene E auf.
[mögliches Ergebnis zur Kontrolle: E: $x - 2y - 2z - 1 = 0$]

c) Durch senkrechte Projektion des Punktes B auf die Ebene E (aus Aufgabe b) entsteht der Punkt $\bar{B}$. Die Punkte B und $\bar{B}$ liegen auf einer Kugel K, für die die Ebene E Tangentialebene ist.
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Kugel K.

Gebiet L 2

Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

In einen Berg führen von gegenüberliegenden Seiten aus zwei geradlinige Stollen vom Punkt A_1 zum Punkt B_1 sowie vom Punkt A_2 zum Punkt B_2.

Eine analytische Beschreibung erfolgt in einem kartesischen Koordinatensystem, wobei die x-y-Ebene der Horizontalebene entspricht; eine Koordinateneinheit beträgt 1 m.
Gegeben sind:
$A_1(20 \mid 300 \mid 0)$, $A_2(0 \mid 0 \mid 30)$,
$B_1(20 \mid 260 \mid 4)$, $B_2(0 \mid 60 \mid 24)$.

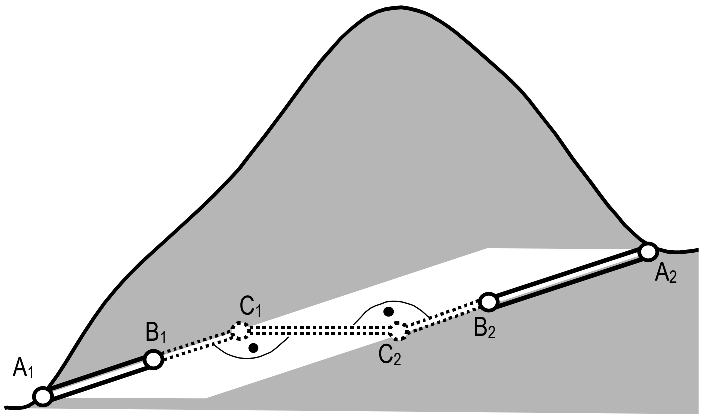

Abbildung nicht maßstäblich

Die Punkte A_1 und B_1 bestimmen die Gerade g_1.
Die Punkte A_2 und B_2 bestimmen die Gerade g_2.

a) Stellen Sie für die Geraden g_1 und g_2 jeweils eine Gleichung auf und weisen Sie nach, dass diese Geraden eine Ebene bestimmen.

Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, den die Gerade g_1 mit der Horizontalebene einschließt.

b) Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels zwischen den Vektoren $\overrightarrow{A_1B_1}$ und $\overrightarrow{B_1B_2}$ sowie die Entfernung der Punkte B_1 und B_2 voneinander.

c) Eine Ebene E verlaufe senkrecht zur Geraden g_1 sowie zur Geraden g_2 und schneide diese Geraden in den Punkten C_1 bzw. C_2 so, dass die Strecken $\overline{B_1C_1}$ und $\overline{B_2C_2}$ gleichlang sind.
Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E auf und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C_1 und C_2.
[mögliches Ergebnis zur Kontrolle: E: $10y - z - 1586 = 0$]

d) Für eine Verbindung der Stollen werden als Trassen die direkte Verbindungsstrecke $\overline{B_1B_2}$ sowie der Streckenzug $B_1C_1C_2B_2$ in Betracht gezogen.
Berechnen Sie den Unterschied der Längen dieser Trassen.

Gebiet L 3 **Aufgabe 3.1**
Stochastik

Eine Firma produziert Chipsätze. Diese Chipsätze werden unabhängig voneinander hergestellt. Es ist davon auszugehen, dass $\frac{1}{6}$ der Chipsätze fehlerhaft ist.
Die Chipsätze werden in Packungen zu je 100 Stück ausgeliefert.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Packung
  - höchstens 10;
  - mehr als 10 aber weniger als 20

  Chipsätze fehlerhaft sind.

b) Durch eine Störung der Produktionsanlagen steigt der Anteil fehlerhafter Chipsätze auf $\frac{1}{4}$ an. Man will mit einem Alternativtest entscheiden, ob die Chipsätze in einer Packung mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ oder $\frac{1}{4}$ fehlerhaft sind. Dazu werden 10 Chipsätze zufällig entnommen und auf Fehlerfreiheit untersucht.
Geben Sie für diesen Sachverhalt an, bei welcher Entscheidung ein Fehler 1. Art bzw. ein Fehler 2. Art bezogen auf die Nullhypothese H_0: $p_0 = \frac{1}{6}$ vorliegt.

Ein Fehler 1. Art mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit α bewirkt einen finanziellen Schaden von 2,00 € pro Chipsatz und ein Fehler 2. Art mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit β einen finanziellen Schaden von 0,50 € pro Chipsatz.
Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße S: „Finanzieller Schaden pro Chipsatz“ in Abhängigkeit von α und β an.

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße S, wenn als Ablehnungsbereich im obigen Test $\overline{A} = \{4; 5; ... ; 10\}$ gewählt wird.

c) Ein Produzent von Telefonen baut jeweils Chipsätze in ein Telefon ein. Bei der Endkontrolle sind 10 % der Telefone fehlerhaft. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Chipsatz fehlerfrei ist, wenn das Telefon nicht fehlerfrei ist, betrage 20 %.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Telefon fehlerhaft ist, wenn die Ursache ein fehlerhafter Chipsatz ist.

Gebiet L 3 **Aufgabe 3.2**
Stochastik

Auf einer Abflugbasis werden jeweils zu Tagesbeginn Wetterdaten erfasst. Auf der Grundlage dieser Daten erfolgt unabhängig voneinander eine Einteilung in starttaugliche bzw. startuntaugliche Tage.
Ein Tag sei mit der Wahrscheinlichkeit p starttauglich und mit einer Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ startuntauglich.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse für zehn aufeinander folgende Tage in Abhängigkeit von p und q an:
   A: Höchstens zwei Tage sind starttauglich.
   B: Mindestens drei Tage sind starttauglich.
   C: Der vierte und der siebente Tag sind die einzigen starttauglichen Tage.
   D: Die ersten drei Tage sind startuntauglich und insgesamt gibt es genau zwei starttaugliche Tage.

b) Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit p mindestens sein muss (gerundet auf Hundertstel), so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % unter zehn Tagen mindestens ein starttauglicher Tag ist.

c) Die Datenerfassung soll verändert werden, wenn ein Tag mit einer Wahrscheinlichkeit $p > 0{,}2$ starttauglich ist. Dazu werden 900 Tage in die Datenerfassung einbezogen. Die Zufallsgröße T beschreibe dabei die Anzahl starttauglicher Tage.

   Berechnen Sie den Erwartungswert sowie die Standardabweichung der Zufallsgröße T für $p = 0{,}2$.

   Ermitteln Sie für die Nullhypothese „Die Datenerfassung muss nicht verändert werden" den größtmöglichen Ablehnungsbereich auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$.