CD-Aufgabe Abiturprüfung LK Bayern 2005

1. In einem Tonstudio wird eine CD mit 8 Liedern und 5 Instrumentalstücken zusammengestellt.
   a) Auf wie viele Arten können die 13 Musikstücke angeordnet werden, wenn nur zwischen den Kategorien Lied und Instrumentalstück unterschieden wird?
   b) Die CD wird in einem CD-Player mit der Random-Funktion abgespielt, so dass die 13 Musikstücke in zufälliger Reihenfolge ohne Wiederholung aufeinander folgen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten vier gespielten Stücken höchstens zwei Instrumentalstücke sind?
   c) 20 Personen geben jeweils ihrem Favoriten unter den 8 Liedern eine Stimme. Wie viele verschiedene Stimmverteilungen sind möglich, wenn es nur darauf ankommt, wie viele Stimmen die einzelnen Lieder erhalten?

2. Von allen in einem Musikladen verkauften CDs entfallen 25 % auf klassische Musik und 30 % auf Volksmusik. Der Rest wird der Popmusik zugeordnet.
   60 % der Käufer einer Klassik-CD und 25 % der Käufer einer Popmusik-CD sind älter als 30 Jahre. Insgesamt werden 48 % der verkauften CDs von Kunden erworben, die älter als 30 Jahre sind.
   a) Ein Kunde betritt den Musikladen und kauft eine Volksmusik-CD. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er höchstens 30 Jahre alt?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kauft ein Kunde, der älter als 30 Jahre ist, eine Klassik- oder Popmusik-CD?

3. Der Musikladen bezieht seine Ware zu gleichen Teilen von den Großhändlern A und B. A liefert ausnahmslos Originalware. In jeder Lieferung des Großhändlers B befinden sich 15 % willkürlich eingestreute Raubkopien, die nur dadurch erkannt werden können, dass diesen CDs der Kopierschutz fehlt.
   a) Wie viele zufällig aus dem Musikladen ausgewählte CDs muss man mindestens überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens eine Raubkopie zu entdecken? Rechnen Sie wie bei „Ziehen mit Zurücklegen“.
   b) Eine Lieferung von 500 CDs von Großhändler B wird untersucht. Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Bereich symmetrisch zum Erwartungswert, in dem die Zahl der Raubkopien mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % liegt (Näherung mit der Normalverteilung).

4. Der Betrug von Großhändler B wurde aufgedeckt. Er behauptet, dass er keinesfalls mehr als 15 % Raubkopien untergemischt habe. Es werden zufällig 200 CDs aus seinen Lieferungen ausgewählt und überprüft.
   a) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel mit der Behauptung des Großhändlers als Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau von 5 %.
   b) In welchem kleinstmöglichen Bereich liegt die Wahrscheinlichkeit, dass bei dieser Entscheidungsregel die Nullhypothese trotz eines Raubkopieanteils von mindestens 25 % nicht abgelehnt wird?

CD-Aufgabe Abiturprüfung LK Bayern 2005 Lösungen

1. In einem Tonstudio wird eine CD mit 8 Liedern und 5 Instrumentalstücken zusammengestellt.

   a) Auf wie viele Arten können die 13 Musikstücke angeordnet werden, wenn nur zwischen den Kategorien Lied und Instrumentalstück unterschieden wird?
   $$\binom{13}{8} = 1287 \quad \left(= \frac{13!}{8!\cdot 5!}\right)$$

   b) Die CD wird in einem CD-Player mit der Random-Funktion abgespielt, so dass die 13 Musikstücke in zufälliger Reihenfolge ohne Wiederholung aufeinander folgen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten vier gespielten Stücken höchstens zwei Instrumentalstücke sind?
   $$\frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{8}{4}+\binom{5}{1}\cdot\binom{8}{3}+\binom{5}{2}\cdot\binom{8}{2}}{\binom{13}{4}} = 88{,}1\,\%$$

   c) 20 Personen geben jeweils ihrem Favoriten unter den 8 Liedern eine Stimme. Wie viele verschiedene Stimmverteilungen sind möglich, wenn es nur darauf ankommt, wie viele Stimmen die einzelnen Lieder erhalten?
   20 Stimmen werden auf 8 Lieder verteilt: $\binom{20+8-1}{20} = 888030$

2. Von allen in einem Musikladen verkauften CDs entfallen 25 % auf klassische Musik und 30 % auf Volksmusik. Der Rest wird der Popmusik zugeordnet.
   60 % der Käufer einer Klassik-CD und 25 % der Käufer einer Popmusik-CD sind älter als 30 Jahre. Insgesamt werden 48 % der verkauften CDs von Kunden erworben, die älter als 30 Jahre sind.

   a) Ein Kunde betritt den Musikladen und kauft eine Volksmusik-CD. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er höchstens 30 Jahre alt?
   $$0{,}25\cdot 0{,}6+0{,}3\cdot p+0{,}45\cdot 0{,}25 = 0{,}48 \quad\Longrightarrow\quad p = P_V(>30) = 0{,}725$$
   $$P_V(\le 30) = 27{,}5\,\%$$

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kauft ein Kunde, der älter als 30 Jahre ist, eine Klassik- oder Popmusik-CD?
   (bedingte Wahrscheinlichkeit) $\dfrac{0{,}25\cdot 0{,}6+0{,}45\cdot 0{,}25}{0{,}48} = 54{,}7\,\%$

3. Der Musikladen bezieht seine Ware zu gleichen Teilen von den Großhändlern A und B. A liefert ausnahmslos Originalware. In jeder Lieferung des Großhändlers B befinden sich 15 % willkürlich eingestreute Raubkopien, die nur dadurch erkannt werden können, dass diesen CDs der Kopierschutz fehlt.

   a) Wie viele zufällig aus dem Musikladen ausgewählte CDs muss man mindestens überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens eine Raubkopie zu entdecken? Rechnen Sie wie bei „Ziehen mit Zurücklegen“.
   $$P(Y\ge 1) = 1-P(Y=0) > 0{,}9 \quad\Longleftrightarrow\quad 1-0{,}925^n > 0{,}9 \quad\Longrightarrow\quad n > 29{,}5 \quad \text{mindestens } 30$$

   b) Eine Lieferung von 500 CDs von Großhändler B wird untersucht. Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Bereich symmetrisch zum Erwartungswert, in dem die Zahl der Raubkopien mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % liegt (Näherung mit der Normalverteilung).
   $$\mu = 500\cdot 0{,}15 = 75, \qquad \sigma = \sqrt{500\cdot 0{,}15\cdot 0{,}85} = \sqrt{63{,}75}$$
   $$P(\,|\,X-\mu\,|\le a) \approx 2\Phi\left(\frac{a+0{,}5}{\sigma}\right)-1 \ge 0{,}8 \quad\Longrightarrow\quad a\ge 10, \quad \text{Bereich } [65;\,85]$$

4. Der Betrug von Großhändler B wurde aufgedeckt. Er behauptet, dass er keinesfalls mehr als 15 % Raubkopien untergemischt habe. Es werden zufällig 200 CDs aus seinen Lieferungen ausgewählt und überprüft.

   a) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel mit der Behauptung des Großhändlers als Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau von 5 %.
   $$P_{0{,}15}^{200}(X\ge k)\le 0{,}05 \quad\Longrightarrow\quad \overline{A} = \{39,\ldots,200\} \quad \text{(Ablehnungsbereich für die Nullhypothese)}$$

   b) In welchem kleinstmöglichen Bereich liegt die Wahrscheinlichkeit, dass bei dieser Entscheidungsregel die Nullhypothese trotz eines Raubkopieanteils von mindestens 25 % nicht abgelehnt wird?
   $$P_{0{,}25}^{200}(X\le 38) = 2{,}8\,\%$$

LuckyAir-Aufgabe   Abiturprüfung LK Bayern 2005

1. Die Fluggesellschaft „LuckyAir“ wirbt mit 9 gleich großen quadratischen Fotos, die in Form eines Quadrats in 3 Reihen zu je 3 Fotos auf einem Plakat angeordnet sind, für Städtereisen. Vier dieser Aufnahmen zeigen Ansichten von Paris, drei von London und zwei von Rom.

   a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 9 Aufnahmen auf dem Plakat anzuordnen, wenn nur nach den Städten unterschieden wird?

   b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 9 Aufnahmen auf dem Plakat anzuordnen, wenn die vier Ansichten von Paris höchstens an ihren Ecken aneinander stoßen dürfen und alle 9 Fotos unterschieden werden?

2. LuckyAir bietet pro Flug 10 % der Flugtickets als Billigtickets für Frühbucher an. Die Anzahl der täglich pro Flug eingehenden Buchungswünsche für Billigtickets wurde registriert und statistisch ausgewertet. Dabei zeigte sich, dass diese Anzahlen annähernd binomialverteilt und voneinander unabhängig sind und dass sie während der ersten Woche nach Buchungsbeginn jeweils den Mittelwert 10 und die Varianz 6 haben.

   a) Bestimmen Sie die Parameter n und p der zugehörigen Binomialverteilung.

   [Ergebnis: $n = 25$; $p = 0{,}4$]

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass am ersten Tag mindestens 9, aber höchstens 11 Buchungswünsche für Billigtickets für einen Flug eingehen?

   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für einen Flug mit 300 Plätzen nach vier Tagen noch mindestens ein Billigticket erhältlich ist, wenn bis dahin alle Anfragen auch zu Buchungen geführt haben?

3. Die 10 % Billigtickets zum Preis von 49 € für Flüge an ein beliebtes Reiseziel werden stets alle in kürzester Zeit verkauft. Danach werden alle verbleibenden Tickets zunächst zum regulären Flugpreis von 199 € angeboten. Für die Flugtickets, die zwei Wochen vor Abreise noch nicht verkauft worden sind, wird ein Last-Minute-Preis von 99 € festgelegt. Durch dieses Angebot können im Mittel noch 60 % der Last-Minute-Tickets verkauft werden.

   a) Welcher Anteil der für dieses Reiseziel zunächst zum regulären Flugpreis angebotenen Tickets muss mindestens verkauft werden, damit der Durchschnittspreis pro Sitzplatz größer als 150 € ist? Geben Sie das Ergebnis auf ganze Prozent genau an.

   b) Tatsächlich wurden von allen zunächst zum regulären Flugpreis angebotenen Tickets 75 % verkauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Fluggast den Last-Minute-Preis bezahlt?

4. Um Kosten zu sparen, lässt LuckyAir eine Besatzung jeweils zweimal am Tag zu einem Ziel im Mittelmeerraum fliegen. Die reine Flugzeit für einen solchen Doppelflug beträgt im Mittel 9,0 Stunden bei einer Standardabweichung von 0,5 Stunden. Unabhängig davon sind für die Standzeiten am Boden insgesamt durchschnittlich 4,6 Stunden erforderlich, wobei relativ große Schwankungen dabei zu einer Standardabweichung von 1,0 Stunden führen.

   a) Bestimmen Sie unter der Annahme, dass die erforderliche Gesamtzeit für einen Doppelflug normalverteilt ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die maximal zulässige Einsatzzeit der Besatzung von 14 Stunden überschritten wird.

   Durch verschiedene Maßnahmen optimiert LuckyAir die Standzeiten, so dass sowohl der Mittelwert als auch die Schwankungen verringert werden.

   b) Die optimierten Standzeiten seien normalverteilt. Wie groß darf bei einem Mittelwert von 4 Stunden 15 Minuten die Standardabweichung auf Minuten genau höchstens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % eine Standzeit von 5 Stunden nicht überschritten wird?

Lucky Air-Aufgabe   Abiturprüfung LK Bayern 2005   Lösungen

1. Die Fluggesellschaft „Lucky Air“ wirbt mit 9 gleich großen quadratischen Fotos, die in Form eines Quadrats in 3 Reihen zu je 3 Fotos auf einem Plakat angeordnet sind, für Städtereisen. Vier dieser Aufnahmen zeigen Ansichten von Paris, drei von London und zwei von Rom.

   a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 9 Aufnahmen auf dem Plakat anzuordnen, wenn nur nach den Städten unterschieden wird?

   b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 9 Aufnahmen auf dem Plakat anzuordnen, wenn die vier Ansichten von Paris höchstens an ihren Ecken aneinander stoßen dürfen und alle 9 Fotos unterschieden werden?

■ □ ■	□ □ ■	■ □ ■	■ □ □	■ □ ■	□ ■ □
□ ■ □	□ ■ □	□ ■ □	□ ■ □	□ □ □	■ □ ■
■ □ □	■ □ ■	□ □ ■	■ □ ■	■ □ ■	□ ■ □

$6 \cdot 4! \cdot 5! = 17280$

2. Lucky Air bietet pro Flug 10 % der Flugtickets als Billigtickets für Frühbucher an. Die Anzahl der täglich pro Flug eingehenden Buchungswünsche für Billigtickets wurde registriert und statistisch ausgewertet. Dabei zeigte sich, dass diese Anzahlen annähernd binomialverteilt und voneinander unabhängig sind und dass sie während der ersten Woche nach Buchungsbeginn jeweils den Mittelwert 10 und die Varianz 6 haben.

   a) Bestimmen Sie die Parameter n und p der zugehörigen Binomialverteilung.

   [Ergebnis: $n = 25$; $p = 0{,}4$]

   folgt aus (einfach) $$\begin{aligned} n \cdot p &= 10 \\ n \cdot p \cdot (1-p) &= 6 \end{aligned}$$

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass am ersten Tag mindestens 9, aber höchstens 11 Buchungswünsche für Billigtickets für einen Flug eingehen?

   $P_{0,4}^{25}(9 \le X \le 11) = 45{,}9\,\%$

   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für einen Flug mit 300 Plätzen nach vier Tagen noch mindestens ein Billigticket erhältlich ist, wenn bis dahin alle Anfragen auch zu Buchungen geführt haben?

   insgesamt 30 Billigtickets, in 4 Tagen $4 \cdot 25 = 100$ Buchungswünsche,
   höchstens 29 Billigtickets dürfen verkauft worden sein,
   $P_{0,4}^{100}(X \le 29) = 1{,}5\,\%$

3. Die 10 % Billigtickets zum Preis von 49 € für Flüge an ein beliebtes Reiseziel werden stets alle in kürzester Zeit verkauft. Danach werden alle verbleibenden Tickets zunächst zum regulären Flugpreis von 199 € angeboten. Für die Flugtickets, die zwei Wochen vor Abreise noch nicht verkauft worden sind, wird ein Last-Minute-Preis von 99 € festgelegt. Durch dieses Angebot können im Mittel noch 60 % der Last-Minute-Tickets verkauft werden.

   a) Welcher Anteil der für dieses Reiseziel zunächst zum regulären Flugpreis angebotenen Tickets muss mindestens verkauft werden, damit der Durchschnittspreis pro Sitzplatz größer als 150 € ist? Geben Sie das Ergebnis auf ganze Prozent genau an.

   $$10\,\% \cdot 49 + 90\,\% \cdot p \cdot 199 + 90\,\% \cdot (1-p) \cdot 60\,\% \cdot 99 > 150 \quad \Longrightarrow \quad p > 73\,\%$$

   b) Tatsächlich wurden von allen zunächst zum regulären Flugpreis angebotenen Tickets 75 % verkauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Fluggast den Last-Minute-Preis bezahlt?

   (bedingte Wahrscheinlichkeit, beachte: Gesamtauslastung des Flugs) $\dfrac{0,9 \cdot (1-0,75) \cdot 0,6}{1-0,9 \cdot 0,25 \cdot 0,4} = 14{,}8\,\%$

4. Um Kosten zu sparen, lässt Lucky Air eine Besatzung jeweils zweimal am Tag zu einem Ziel im Mittelmeerraum fliegen. Die reine Flugzeit für einen solchen Doppelflug beträgt im Mittel 9,0 Stunden bei einer Standardabweichung von 0,5 Stunden. Unabhängig davon sind für die Standzeiten am Boden insgesamt durchschnittlich 4,6 Stunden erforderlich, wobei relativ große Schwankungen dabei zu einer Standardabweichung von 1,0 Stunden führen.

   a) Bestimmen Sie unter der Annahme, dass die erforderliche Gesamtzeit für einen Doppelflug normalverteilt ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die maximal zulässige Einsatzzeit der Besatzung von 14 Stunden überschritten wird.

Gesamtzeit $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 9 + 4{,}6 = 13{,}6$

Varianz $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 0{,}5^2 + 1^2 = 1{,}25$

$$P(Y > 14) = 1 - P(Y \leq 14) \approx 1 - \Phi\Big(\frac{14 - \mu}{\sigma}\Big) = 35{,}9\,\%$$

Durch verschiedene Maßnahmen optimiert Lucky Air die Standzeiten, so dass sowohl der Mittelwert als auch die Schwankungen verringert werden.

   b) Die optimierten Standzeiten seien normalverteilt. Wie groß darf bei einem Mittelwert von 4 Stunden 15 Minuten die Standardabweichung auf Minuten genau höchstens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % eine Standzeit von 5 Stunden nicht überschritten wird?

Standzeit $\mu = 4 + \frac{15}{60} = 4{,}25$ (Stunden)

$$P(Z \leq 5) \approx \Phi\Big(\frac{5 - \mu}{\sigma}\Big) > 0{,}9 \quad \Longrightarrow \quad \sigma < 0{,}585$$

höchstens 35 Minuten

Die Wahrscheinlichkeit für eine Bauchlandung erscheint mir ziemlich groß.