Kaufhaus-Aufgabe aus Abiturprüfung Bayern LK *(abgeändert)*

5\. a) Ein Kunde eines Kaufhauses benutzt mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % die hauseigene Tiefgarage. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % bleibt ein Kunde länger als 30 Minuten im Kaufhaus (Langzeitbesucher). Die Ereignisse T: "Tiefgaragenbenutzer" und L: "Langzeitbesucher" seien stochastisch unabhängig.

1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein beliebiger Kunde weder Tiefgaragenbenutzer noch Langzeitbesucher?

2) An einer Kasse stehen drei Kunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens einer davon ein Tiefgaragenbenutzer und nicht gleichzeitig Langzeitbesucher?

3) In der Tiefgarage sind noch 16 Plätze frei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese freien Plätze für die nächsten 20 Kunden des Kaufhauses reichen?

b) Das Kaufhaus will einen Restaurantbetrieb einrichten.

1) In einer Umfrage unter 200 Kunden soll die Zahl k derjenigen ermittelt werden, die Interesse an dem Angebot haben. Bestimmen Sie unter Verwendung der Ungleichung von Tschebyschew einen möglichst kleinen Bereich, in dem k mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % liegen wird, falls tatsächlich 1/3 aller Kunden an dem Angebot interessiert ist.

2) Wie groß müsste der Anteil der Restaurantnutzer unter allen Kaufhauskunden mindestens sein, damit von 50 zufällig ausgewählten Kunden des Kaufhauses mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95 % mindestens einer das Restaurant aufsucht?

c) *1)* Mit einer elektronischen Anlage wird am Ausgang überprüft, ob ein Kunde unbezahlte Kleidungsstücke bei sich führt. Bei Kaufhausdieben spricht die Anlage mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % an, allerdings auch bei ehrlichen Kunden mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 %. 40 % der Verdachtsfälle erweisen sich als gerechtfertigt. Wie groß ist demnach der Anteil der Diebe unter allen Kunden?

2) Durch Verbesserungsmaßnahmen soll der Anteil von 40 % der überführten Diebe unter den verdächtigen Kunden erhöht werden. Wie viele Diebe müssen mindestens unter 256 Verdachtsfällen sein, damit die Behauptung, dass die Verbesserungsmaßnahmen keine Erhöhung des besagten Anteils erbringen, auf dem Signifikanzniveau 5 % abgelehnt werden kann?

d) In der Endausscheidung einer Modenschau werden 9 Modellkleider des Kaufhauses hintereinander vorgeführt.

1) Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es hierfür, wenn zwischen den drei Modellkleidern des Designers Liegerwiese keine anderen Kleider präsentiert werden sollen?

2) Jedes Mitglied einer vierköpfigen Jury gibt seine Stimme dem Kleid, das ihm am besten gefällt. Wie viele verschiedene Stimmenverteilungen sind möglich, wenn man nur nach der Stimmenzahl unterscheidet, die jedes Kleid erhält?

Bei Verwendung eines GTR ist die ursprünglich geforderte Verwendung der Normalverteilung in Teilaufgabe c) *2)* nicht mehr sinnvoll.

Kaufhaus-Aufgabe Lösungen

5. a) Ein Kunde eines Kaufhauses benutzt mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% die hauseigene Tiefgarage. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% bleibt ein Kunde länger als 30 Minuten im Kaufhaus (Langzeitbesucher). Die Ereignisse T: "Tiefgaragenbenutzer" und L: "Langzeitbesucher" seien stochastisch unabhängig.

   1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein beliebiger Kunde weder Tiefgaragenbenutzer noch Langzeitbesucher?

   Ereignisbaum (einfach) $0{,}25 \cdot 0{,}6 = 15{,}0\,\%$

   2) An einer Kasse stehen drei Kunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens einer davon ein Tiefgaragenbenutzer und nicht gleichzeitig Langzeitbesucher?

   $1 - 0{,}55^3 = 83{,}4\,\%$

   3) In der Tiefgarage sind noch 16 Plätze frei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese freien Plätze für die nächsten 20 Kunden des Kaufhauses reichen?

   $n = 20,\ p = 0{,}75,\ P(X \leq 16) = 77{,}5\,\%$

b) Das Kaufhaus will einen Restaurantbetrieb einrichten.

   1) In einer Umfrage unter 200 Kunden soll die Zahl k derjenigen ermittelt werden, die Interesse an dem Angebot haben. Bestimmen Sie unter Verwendung der Ungleichung von Tschebyschew einen möglichst kleinen Bereich, in dem k mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% liegen wird, falls tatsächlich 1/3 aller Kunden an dem Angebot interessiert ist.

   $$P(|\,X - \mu\,| < \alpha) \ \geq \ 1 - \frac{V(X)}{\alpha^2} \ \geq \ 0{,}9,\ \mu = \frac{200}{3},\ V(X) = \frac{400}{9} \implies \alpha = 21{,}1$$

   Bereich $[46, 87]$

   2) Wie groß müsste der Anteil der Restaurantnutzer unter allen Kaufhauskunden mindestens sein, damit von 50 zufällig ausgewählten Kunden des Kaufhauses mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95% mindestens einer das Restaurant aufsucht?

   $1 - (1-p)^{50} \geq 0{,}95 \implies p \geq 5{,}8\,\%$

c) *1)* Mit einer elektronischen Anlage wird am Ausgang überprüft, ob ein Kunde unbezahlte Kleidungsstücke bei sich führt. Bei Kaufhausdieben spricht die Anlage mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% an, allerdings auch bei ehrlichen Kunden mit einer Wahrscheinlichkeit von 1%. 40% der Verdachtsfälle erweisen sich als gerechtfertigt. Wie groß ist demnach der Anteil der Diebe unter allen Kunden?

   $$\frac{p \cdot 0{,}95}{p \cdot 0{,}95 + (1-p) \cdot 0{,}01} = 0{,}4 \implies p = 0{,}7\,\%$$

   2) Durch Verbesserungsmaßnahmen soll der Anteil von 40% der überführten Diebe unter den verdächtigen Kunden erhöht werden. Wie viele Diebe müssen mindestens unter 256 Verdachtsfällen sein, damit die Behauptung, dass die Verbesserungsmaßnahmen keine Erhöhung des besagten Anteils erbringen, auf dem Signifikanzniveau 5% abgelehnt werden kann?

   $n = 256,\ p = 0{,}40,\ P(X \geq k) \leq 5\,\%$

   mindestens 116

d) In der Endausscheidung einer Modenschau werden 9 Modellkleider des Kaufhauses hintereinander vorgeführt.

   1) Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es hierfür, wenn zwischen den drei Modellkleidern des Designers Liegerwiese keine anderen Kleider präsentiert werden sollen?

   $7! \cdot 3! = 30240$, wobei die drei Modellkleider als Einheit betrachtet werden.

   2) Jedes Mitglied einer vierköpfigen Jury gibt seine Stimme dem Kleid, das ihm am besten gefällt. Wie viele verschiedene Stimmenverteilungen sind möglich, wenn man nur nach der Stimmenzahl unterscheidet, die jedes Kleid erhält?

   mögliche Stimmenverteilungen, Anzahl der Möglichkeiten:

   a) 4, d.h. ein Kleid erhält alle 4 Stimmen, 9 Möglichkeiten

   b) $3+1,\ 9 \cdot 8$ *c)* $2+2$, d.h. zwei Kleider erhalten jeweils 2 Stimmen, $\binom{9}{2}$

   d) $2+1+1,\ 9 \cdot \binom{8}{2}$ *e)* $1+1+1+1,\ \binom{9}{4}$ insgesamt 495 Möglichkeiten $(= \binom{9+4-1}{4})$

Flughafen-Aufgabe aus Abiturprüfung Bayern LK *(abgeändert)*

6. a) Auf einem Flughafen werden die aufgegebenen Gepäckstücke unabhängig voneinander auf ein Förderband gelegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gepäckstück das Ziel München hat, sei p.

   1) Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei aufeinanderfolgenden Gepäckstücken mindestens eines nicht den Zielflughafen München hat, sei 93,75 %.
   Berechnen Sie daraus die Wahrscheinlichkeit p. [Ergebnis: $p = 0{,}25$]

   2) Nun werden 10 aufeinanderfolgende Gepäckstücke betrachtet. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   E_1 = "Genau drei Gepäckstücke haben München als Ziel."
   E_2 = "Das zehnte Gepäckstück ist das dritte nach München."
   E_3 = "Genau drei Gepäckstücke haben München als Ziel und liegen direkt hintereinander."
   E_4 = "Genau drei Gepäckstücke haben München als Ziel, wobei mindestens zwei dieser drei direkt hintereinanderliegen."

   3) 1 % der Gepäckstücke werden fehlgeleitet; von den fehlgeleiteten Gepäckstücken haben 20 % das Ziel München. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird demnach ein Gepäckstück, das das Ziel München hat, richtig weitergeleitet?

   b) Das Gepäck wird mit einem Strichcode auf Papieraufklebern gekennzeichnet, mit dessen Hilfe der Zielflughafen ermittelt wird. Diese Ermittlung schlägt in 11,5 % der Fälle fehl, da mindestens einer der voneinander unabhängigen Fehler A ("Papier zerknittert") oder B ("Papier verschmutzt") auftritt.

   1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler A, wenn bekannt ist, dass der Fehler B eine Wahrscheinlichkeit von 8,5 % hat.

   2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt nur einer der Fehler A oder B auf?

   c) Einer Fluggesellschaft wird ein Lesegerät für das Sortieren des Gepäcks auf der Basis von Mikrochips angeboten, das eine Quote von weniger als 1 % an Lesefehlern verspricht. Die Fluggesellschaft testet die Hypothese H_0 "Die Quote bei den Lesefehlern ist mindestens 1 %" auf dem 2 %-Signifikanzniveau von 3000 mit Mikrochips gekennzeichneten Gepäckstücken. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel für diesen Test.

   d) Aus langjähriger Erfahrung weiß man bei einer Fluggesellschaft, dass Gepäckstücke ein durchschnittliches Gewicht von 18 kg bei einer Standardabweichung von 5 kg besitzen.
   Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschew-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass bei 300 aufgegebenen Gepäckstücken das Gesamtgewicht zwischen 4800 kg und 6000 kg liegt. Für die Berechnung darf angenommen werden, dass das Gewicht der Gepäckstücke voneinander unabhängig ist.

Bei Verwendung eines GTR ist die ursprünglich geforderte Verwendung der Normalverteilung in Teilaufgabe c) nicht mehr sinnvoll.

Flughafen-Aufgabe Lösungen

6. a) Auf einem Flughafen werden die aufgegebenen Gepäckstücke unabhängig voneinander auf ein Förderband gelegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gepäckstück das Ziel München hat, sei p.

   1) Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei aufeinanderfolgenden Gepäckstücken mindestens eines nicht den Zielflughafen München hat, sei 93,75 %.
   Berechnen Sie daraus die Wahrscheinlichkeit p. $1 - p^2 = 0{,}9375 \implies p = 0{,}25$

   2) Nun werden 10 aufeinanderfolgende Gepäckstücke betrachtet. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   E_1 = "Genau drei Gepäckstücke haben München als Ziel."
   $n = 10,\ p = 0{,}25,\ P(X = 3) = 25{,}0\,\%$
   E_2 = "Das zehnte Gepäckstück ist das dritte nach München." $n = 9,\ P(X = 2) \cdot 2 = 7{,}5\,\%$
   E_3 = "Genau drei Gepäckstücke haben München als Ziel und liegen direkt hintereinander."
   □□□_ _ _ _ _ _ _ 8 Möglichkeiten, $8 \cdot p^3 \cdot q^7 = 1{,}7\,\%$
   E_4 = "Genau drei Gepäckstücke haben München als Ziel, wobei mindestens zwei dieser drei direkt hintereinanderliegen."
   □□_ _ _ _ ■_ _ _ 9 Möglichkeiten für □□, 8 für ■,
   insgesamt $9 \cdot 8 - 8$ Möglichkeiten, da 8 doppelt gezählt werden,
   □□■_ _ _ _ _ _ _
   ■□□_ _ _ _ _ _ _
   $64 \cdot p^3 \cdot q^7 = 13{,}3\,\%$

   3) 1 % der Gepäckstücke werden fehlgeleitet; von den fehlgeleiteten Gepäckstücken haben 20 % das Ziel München. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird demnach ein Gepäckstück, das das Ziel München hat, richtig weitergeleitet? bedingte Wahrscheinlichkeit, $1 - \frac{0{,}01 \cdot 0{,}20}{0{,}25} = 99{,}2\,\%$

   b) Das Gepäck wird mit einem Strichcode auf Papieraufklebern gekennzeichnet, mit dessen Hilfe der Zielflughafen ermittelt wird. Diese Ermittlung schlägt in 11,5 % der Fälle fehl, da mindestens einer der voneinander unabhängigen Fehler A ("Papier zerknittert") oder B ("Papier verschmutzt") auftritt.

   1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler A, wenn bekannt ist, dass der Fehler B eine Wahrscheinlichkeit von 8,5 % hat. Ereignisbaum $(1 - p_0) \cdot 0{,}915 = 0{,}885 \implies p_0 = 3{,}3\,\%$

   2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt nur einer der Fehler A oder B auf?
   $p_0 \cdot (1 - 0{,}085) + (1 - p_0) \cdot 0{,}085 = 11{,}2\,\%$

   c) Einer Fluggesellschaft wird ein Lesegerät für das Sortieren des Gepäcks auf der Basis von Mikrochips angeboten, das eine Quote von weniger als 1 % an Lesefehlern verspricht. Die Fluggesellschaft testet die Hypothese H_0 "Die Quote bei den Lesefehlern ist mindestens 1 %" auf dem 2 %-Signifikanzniveau von 3000 mit Mikrochips gekennzeichneten Gepäckstücken. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel für diesen Test.
   $n = 3000,\ p = 0{,}01,\ P(X \leq k) \leq 2\,\%$
   Für $X \leq 18$ wird die Nullhypothese verworfen.

   d) Aus langjähriger Erfahrung weiß man bei einer Fluggesellschaft, dass Gepäckstücke ein durchschnittliches Gewicht von 18 kg bei einer Standardabweichung von 5 kg besitzen.
   Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschew-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass bei 300 aufgegebenen Gepäckstücken das Gesamtgewicht zwischen 4800 kg und 6000 kg liegt. Für die Berechnung darf angenommen werden, dass das Gewicht der Gepäckstücke voneinander unabhängig ist.
   Für 300 Gepäckstücke gilt $\mu = 5400$, $P(|\,X - \mu\,| < 600) \geq 1 - \frac{V(X)}{600^2}$
   $V(X) = 300 \cdot 25 \implies P(4800 < X < 6000) = P(|\,X - \mu\,| < 600) \geq 97{,}9\,\%$

Turnier-Aufgabe aus Abiturprüfung Bayern LK *(abgeändert)*

7. An einem Turnier nehmen 16 Mannschaften mit je 8 Spielern teil.

   a) Für die Vorrunde werden vier Gruppen I, II, III und VI zu je vier Mannschaften ausgelost, wobei es innerhalb einer Gruppe nicht auf die Reihenfolge der Mannschaften ankommt.

      1) Wie viele Möglichkeiten der Gruppeneinteilung gibt es?

      2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die beiden spielstärksten Mannschaften in dieselbe Gruppe gelost?

   b) Nach dem Endspiel, in dem sich die Mannschaften A und B gegenüberstanden, werden auf gut Glück vier Spieler zu einer Dopingprobe ausgewählt. In der Mannschaft A sei ein Spieler, in B seien zwei Spieler gedopt. Für die Auswahl der Spieler zur Dopingprobe werden zwei verschiedene Verfahren diskutiert:

      V_1 = "In jeder Mannschaft werden zwei Spieler ausgelost."

      V_2 = "Aus allen 16 Spielern werden vier Spieler ausgelost."

      1) Entscheiden Sie durch Rechnung, bei welchem Verfahren die Chance größer ist, genau zwei Dopingsünder zu ermitteln.

      2) Bei einer Anwendung des Verfahrens V_1 werden genau zwei Dopingsünder überführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es die beiden aus der Mannschaft B?

   c) In einer Veröffentlichung wird behauptet, dass mindestens 20 % der an solchen Turnieren teilnehmenden Spieler gedopt seien. Zur Überprüfung werden 500 Spieler einer unangemeldeten Dopingprobe unterzogen. In welchem Bereich muss die Anzahl der dabei ertappten Dopingsünder liegen, damit man die Behauptung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% zurückweisen kann?

   d) Für das Endspiel des Turniers steht ein Stadion mit 20000 Plätzen zur Verfügung. Die Eintrittskarten sind nicht an bestimmte Plätze gebunden. 8000 Eintrittskarten werden vorab an Sponsoren verteilt. Diese Karten werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 83 % tatsächlich genutzt, unabhängig davon regulär gekaufte Eintrittkarten dagegen mit 95 %. Um eine größere Anzahl von leeren Plätzen zu vermeiden, werden (neben den Sponsorenkarten) 14000 reguläre Karten verkauft.

      1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Besucher des Endspiels eine Sponsorenkarte?

      2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die 20000 Plätze nicht ausreichen? Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung.

Bei Verwendung eines GTR ist die ursprünglich geforderte Verwendung der Normalverteilung in der Teilaufgabe c) nicht erforderlich.

Turnier-Aufgabe Lösungen

7. An einem Turnier nehmen 16 Mannschaften mit je 8 Spielern teil.

a) Für die Vorrunde werden vier Gruppen I, II, III und VI zu je vier Mannschaften ausgelost, wobei es innerhalb einer Gruppe nicht auf die Reihenfolge der Mannschaften ankommt.

1) Wie viele Möglichkeiten der Gruppeneinteilung gibt es? $\binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} = 63063000$

2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die beiden spielstärksten Mannschaften in dieselbe Gruppe gelost?

$$P(\text{Nr. 2 gelangt zur Gruppe von Nr. 1}) = \frac{3}{15} \quad \text{oder} \quad \frac{4 \cdot \binom{14}{2} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4}}{\binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4}} = \frac{4 \cdot \binom{14}{2}}{\binom{16}{4}} = 20\,\%$$

b) Nach dem Endspiel, in dem sich die Mannschaften A und B gegenüberstanden, werden auf gut Glück vier Spieler zu einer Dopingprobe ausgewählt. In der Mannschaft A sei ein Spieler, in B seien zwei Spieler gedopt. Für die Auswahl der Spieler zur Dopingprobe werden zwei verschiedene Verfahren diskutiert:

V_1 = "In jeder Mannschaft werden zwei Spieler ausgelost."

V_2 = "Aus allen 16 Spielern werden vier Spieler ausgelost."

1) Entscheiden Sie durch Rechnung, bei welchem Verfahren die Chance größer ist, genau zwei Dopingsünder zu ermitteln.

V_1: *(aus A und B jeweils einer, aus B beide)*

$$\frac{7}{\binom{8}{2}} \cdot \frac{2 \cdot \binom{6}{1}}{\binom{8}{2}} + \underbrace{\frac{\binom{7}{2}}{\binom{8}{2}} \cdot \frac{1}{\binom{8}{2}}}_{2{,}68} = 13{,}4\,\%$$

V_2:

$$\frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{13}{2}}{\binom{16}{4}} = 12{,}9\,\%$$

2) Bei einer Anwendung des Verfahrens V_1 werden genau zwei Dopingsünder überführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es die beiden aus der Mannschaft B? $\frac{2{,}68}{13{,}4} = 20\,\%$

c) In einer Veröffentlichung wird behauptet, dass mindestens 20% der an solchen Turnieren teilnehmenden Spieler gedopt seien. Zur Überprüfung werden 500 Spieler einer unangemeldeten Dopingprobe unterzogen. In welchem Bereich muss die Anzahl der dabei ertappten Dopingsünder liegen, damit man die Behauptung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% zurückweisen kann?

$n = 500,\ p = 0{,}2,\ P(X \le k) \le 5\,\%$

höchstens 85 (Approximation mit der Normalverteilung ergibt 84)

d) Für das Endspiel des Turniers steht ein Stadion mit 20000 Plätzen zur Verfügung. Die Eintrittskarten sind nicht an bestimmte Plätze gebunden. 8000 Eintrittskarten werden vorab an Sponsoren verteilt. Diese Karten werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 83 % tatsächlich genutzt, unabhängig davon regulär gekaufte Eintrittkarten dagegen mit 95 %. Um eine größere Anzahl von leeren Plätzen zu vermeiden, werden (neben den Sponsorenkarten) 14000 reguläre Karten verkauft.

1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Besucher des Endspiels eine Sponsorenkarte?

$$\frac{0{,}83 \cdot 8000}{0{,}83 \cdot 8000 + 0{,}95 \cdot 14000} = 33{,}3\,\%$$

2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die 20000 Plätze nicht ausreichen?

$$P(X > k) = 1 - P(X \le k) \approx 1 - \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) = 7{,}6\,\%$$

$$k = 20000, \quad X = X_1 + X_2$$

Zahl der Zuschauer im Stadion = Zahl der Sponsoren + Zahl der Zuschauer mit gekauften Karten

$$\mu = E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 8000 \cdot 0{,}83 + 14000 \cdot 0{,}95 = 19940$$

$$\sigma^2 = V(X) = V(X_1) + V(X_2) = 8000 \cdot 0{,}83 \cdot 0{,}17 + 14000 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 1793{,}8$$