

Theater-Aufgabe Abiturprüfung Bayern LK 1993 (abgeändert)

8. Ein Theater hat 200 Plätze. Man weiß aus Erfahrung, dass bei einer Aufführung ein Platz mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% verkauft wird.
- a) Vereinfachend kann angenommen werden, dass die Ereignisse unabhängig sind.
- 1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden für die nächste Aufführung mindestens 185 Plätze verkauft?
 - 2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man bei den drei folgenden Vorstellungen mindestens noch einmal mit diesem guten Besuch von wenigstens 185 Personen rechnen?
- b) Zehn befreundete Ehepaare setzen sich in eine Reihe, die 20 Plätze umfasst.
Wie viele Sitzordnungen gibt es, wenn
- 1) sich die Personen beliebig setzen,
 - 2) die Ehepartner nebeneinander sitzen,
 - 3) die Frauen nebeneinander sitzen?
- c) Im Programmheft sind im Mittel zwei Druckfehler auf drei Seiten. Berechnen Sie mit der Poisson-Verteilung die Wahrscheinlichkeit, dass auf der dritten Seite mindestens zwei Druckfehler sind.
- d) Erfahrungsgemäß kaufen 40% der Besucher ein Programmheft.
- 1) Die Direktion legt für die 200 Besucher einer ausverkauften Vorstellung 90 Hefte bereit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt mindestens ein Programmheft übrig?
 - 2) Wie viele Hefte müssen wenigstens bereitliegen, damit man mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit die zu erwartende Nachfrage nach einem Programmheft bei 200 Besuchern befriedigen kann?
- e) Eine Vorstellung wird von Erwachsenen und Jugendlichen besucht. 60% der Erwachsenen und 20% der Jugendlichen kaufen ein Programmheft.
- 1) Wie groß ist der Anteil der Jugendlichen unter den Besuchern, wenn 40% der Besucher ein Programmheft kaufen?
 - 2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Käufer eines Programmhefts ein Jugendlicher ist?
- f) Die Theaterleitung will das Kaufinteresse für ihr Programmheft überprüfen. Dazu soll das Verhalten der nächsten 800 Erwachsenen beobachtet werden.
- 1) Geben Sie die Entscheidungsregel der Theaterleitung für ihre Nullhypothese H_0 : "Mindestens 60% der Erwachsenen kaufen ein Programmheft" auf dem 5%-Signifikanzniveau an.
 - 2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dann ein Absinken der Kaufbereitschaft auf 55% nicht erkannt?

Bei Verwendung eines GTR ist die ursprünglich geforderte Verwendung der Normalverteilung in der Teilaufgabe f) nicht erforderlich.

Theater-Aufgabe Lösungen

8. Ein Theater hat 200 Plätze. Man weiß aus Erfahrung, dass bei einer Aufführung ein Platz mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% verkauft wird.

a) Vereinfachend kann angenommen werden, dass die Ereignisse unabhängig sind.

1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden für die nächste Aufführung mindestens 185 Plätze verkauft? $P(X \geq 185) = 14,3\%$

2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man bei den drei folgenden Vorstellungen mindestens noch einmal mit diesem guten Besuch von wenigstens 185 Personen rechnen?

$$1 - (1 - P(X \geq 185))^3 = 37,1\%$$

b) Zehn befreundete Ehepaare setzen sich in eine Reihe, die 20 Plätze umfasst. Wie viele Sitzordnungen gibt es, wenn

1) sich die Personen beliebig setzen, 20!

2) die Ehepartner nebeneinander sitzen, $10! \cdot 2^{10}$

3) die Frauen nebeneinander sitzen? $11 \cdot 10! \cdot 10!$

c) Im Programmheft sind im Mittel zwei Druckfehler auf drei Seiten. Berechnen Sie mit der Poisson-Verteilung die Wahrscheinlichkeit, dass auf der dritten Seite mindestens zwei Druckfehler sind.

$$\mu = \frac{2}{3}, \quad P(X \geq 2) = 14,4\%$$

d) Erfahrungsgemäß kaufen 40% der Besucher ein Programmheft.

1) Die Direktion legt für die 200 Besucher einer ausverkauften Vorstellung 90 Hefte bereit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt mindestens ein Programmheft übrig?

$$n = 200, \quad p = 0,40, \quad P(X \leq 89) = 91,4\%$$

2) Wie viele Hefte müssen wenigstens bereitliegen, damit man mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit die zu erwartende Nachfrage nach einem Programmheft bei 200 Besuchern befriedigen kann?

$$P(X \leq k) \geq 0,95 \implies \text{mindestens } k = 91$$

e) Eine Vorstellung wird von Erwachsenen und Jugendlichen besucht. 60% der Erwachsenen und 20% der Jugendlichen kaufen ein Programmheft.

1) Wie groß ist der Anteil der Jugendlichen unter den Besuchern, wenn 40% der Besucher ein Programmheft kaufen? (Baumdiagramm) $(1 - p) \cdot 0,6 + p \cdot 0,2 = 0,4 \implies p = 0,5$

2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Käufer eines Programmhefts ein Jugendlicher ist?

$$\frac{0,5 \cdot 0,2}{0,4} = 25\%$$

f) Die Theaterleitung will das Kaufinteresse für ihr Programmheft überprüfen. Dazu soll das Verhalten der nächsten 800 Erwachsenen beobachtet werden.

1) Geben Sie die Entscheidungsregel der Theaterleitung für ihre Nullhypothese H_0 : "Mindestens 60% der Erwachsenen kaufen ein Programmheft" auf dem 5%-Signifikanzniveau an.

$$n = 800, \quad p = 0,60, \quad P(X \leq k) \leq 0,05$$

$$H_0 \text{ wird für } X \leq 456 \text{ abgelehnt.}$$

2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dann ein Absinken der Kaufbereitschaft auf 55% nicht erkannt?

$$\text{Binomialverteilung } n = 800, \quad p = 0,55, \quad P(X \geq 457) = 12,0\%$$

$$\text{Die Normalverteilung ergibt } 12,1\%$$

City-Zug-Aufgabe Abiturprüfung Bayern LK 1993 (*abgeändert*)

9. a) Ein "City-Zug" besteht aus 10 Waggons: 4 Wagen der Touristenklasse (T), 3 Wagen der ersten Klasse (E), 2 Großraumwagen (G) sowie 1 Speisewagen (S). Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Zug zusammenzustellen, wenn nur nach den Kategorien T, E, G und S unterschieden wird und
- 1) sonst keine Vorgaben zu beachten sind,
 - 2) die Großraumwaggons am Anfang und am Ende des Zuges stehen und der Speisewagen 5. oder 6. Wagen sein soll?
- b) Die meisten Reisenden lassen sich einen Platz reservieren. Dabei kommt es in 0,5% der Reservierungen zu Problemen. Verwenden Sie bei den folgenden beiden Teilaufgaben die Näherung durch die Poisson-Verteilung.
- 1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es bei 600 Reservierungen zu mehr als 4 Problemfällen?
 - 2) Ab wie vielen Reservierungen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Problemfall auftritt, größer als 90%?
- c) Durch eine Umfrage soll der Anteil der Kunden ermittelt werden, die mit dem Reservierungssystem unzufrieden sind. Bestimmen Sie mit der Tschebyschew-Ungleichung die Mindestzahl von Personen, die befragt werden müssen, damit man mit einer Sicherheit von mindestens 95% den gesuchten Anteil mit einer Abweichung von höchstens 5 Prozentpunkten erhalten kann.
- d) Auf Grund langjähriger Beobachtungen weiß man, dass 1% der Bahnkunden ohne gültigen Fahrausweis fährt. Ein Kontrolleur erkennt einen Schwarzfahrer mit 95% und einen Kunden, der eine gültige Fahrkarte hat, mit 98% Sicherheit.
- 1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Kunde, der falsch eingeschätzt wird, ein Schwarzfahrer?
 - 2) Mit p wird der Anteil der Reisenden mit gültigem Fahrausweis, die als solche erkannt werden, bezeichnet. Der Wert p hat sich so geändert, dass die Ereignisse $SF =$ "Der Kunde ist Schwarzfahrer" und $R =$ "Der Kunde wird richtig eingeschätzt" unabhängig sind. Bestimmen Sie den Wert von p .
 - 3) Ein Zug ist mit 200 Fahrgästen besetzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens drei Personen mehr als erwartet ohne gültigen Fahrausweis fahren?
- e) Die Nullhypothese "Mindestens 70% aller Geschäftsreisen unter 400 km werden mit dem Zug zurückgelegt" soll durch eine Umfrage unter 600 Geschäftsleuten getestet werden.
- 1) Bestimmen Sie den Annahmehereich der Nullhypothese, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art nicht über 5% liegt.
 - 2) Wie groß ist bei der Entscheidungsregel aus Teilaufgabe e) 1) die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn der fragliche Anteil nur 65% beträgt?
 - 3) Skizzieren Sie die Gütefunktion für diesen Test.

Bei Verwendung eines GTR ist die ursprünglich geforderte Verwendung der Normalverteilung in den Teilaufgaben e) 1), 2) nicht erforderlich.

City-Zug-Aufgabe Lösungen

9. a) Ein "City-Zug" besteht aus 10 Waggons: 4 Wagen der Touristenklasse (T), 3 Wagen der ersten Klasse (E), 2 Großraumwagen (G) sowie 1 Speisewagen (S). Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Zug zusammenzustellen, wenn nur nach den Kategorien T, E, G und S unterschieden wird und

1) sonst keine Vorgaben zu beachten sind, $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 12600 \quad (= \frac{10!}{6! \cdot 3! \cdot 2!})$

2) die Großraumwaggons am Anfang und am Ende des Zuges stehen und der Speisewagen 5. oder 6. Wagen sein soll? $\binom{7}{4} \cdot 2 = 70$

- b) Die meisten Reisenden lassen sich einen Platz reservieren. Dabei kommt es in 0,5% der Reservierungen zu Problemen. Verwenden Sie bei den folgenden beiden Teilaufgaben die Näherung durch die Poisson-Verteilung.

1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es bei 600 Reservierungen zu mehr als 4 Problemfällen? $\mu = 3, \quad P(X > 4) = 18,5\%$

2) Ab wie vielen Reservierungen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Problemfall auftritt, größer als 90%?

$$\mu = n \cdot 0,005, \quad 1 - P(X = 0) > 0,9, \quad e^{-n \cdot 0,005} < 0,1, \quad \text{mehr als 460}$$

- c) Durch eine Umfrage soll der Anteil der Kunden ermittelt werden, die mit dem Reservierungssystem unzufrieden sind. Bestimmen Sie mit der Tschebyschew-Ungleichung die Mindestzahl von Personen, die befragt werden müssen, damit man mit einer Sicherheit von mindestens 95% den gesuchten Anteil mit einer Abweichung von höchstens 5 Prozentpunkten erhalten kann.

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 0,05\right) \geq 1 - \frac{1}{4 \cdot 0,05^2 \cdot n} \geq 0,95$$

(oder direkt) $\frac{1}{4 \cdot 0,05^2 \cdot n} \leq 0,05 \implies n \geq 2000, \quad \text{mindestens 2000 Personen}$

- d) Auf Grund langjähriger Beobachtungen weiß man, dass 1% der Bahnkunden ohne gültigen Fahrausweis fährt. Ein Kontrolleur erkennt einen Schwarzfahrer mit 95% und einen Kunden, der eine gültige Fahrkarte hat, mit 98% Sicherheit.

1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Kunde, der falsch eingeschätzt wird, ein Schwarzfahrer? $\frac{0,01 \cdot 0,05}{0,01 \cdot 0,05 + 0,99 \cdot 0,02} = 2,5\%$

2) Mit p wird der Anteil der Reisenden mit gültigem Fahrausweis, die als solche erkannt werden, bezeichnet. Der Wert p hat sich so geändert, dass die Ereignisse $SF =$ "Der Kunde ist Schwarzfahrer" und $R =$ "Der Kunde wird richtig eingeschätzt" unabhängig sind. Bestimmen Sie den Wert von p . dem Ereignisbaum direkt entnehmen: $p = 0,95$

3) Ein Zug ist mit 200 Fahrgästen besetzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens drei Personen mehr als erwartet ohne gültigen Fahrausweis fahren? $P(X \geq 5) = 5,2\%$

- e) Die Nullhypothese "Mindestens 70% aller Geschäftsreisen unter 400 km werden mit dem Zug zurückgelegt" soll durch eine Umfrage unter 600 Geschäftsleuten getestet werden.

1) Bestimmen Sie den Annahmehereich der Nullhypothese, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art nicht über 5% liegt. $n = 600, \quad p = 0,70, \quad P(X \leq k) \leq 0,05$

H_0 wird für $X \leq 400$ abgelehnt. Die Normalverteilung ergibt $X \leq 401$

2) Wie groß ist bei der Entscheidungsregel aus Teilaufgabe e) 1) die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn der fragliche Anteil nur 65% beträgt? $P(X \geq 401) = 18,5\%$

Die Normalverteilung ergibt $P(X \geq 402) = 16,4\%$